УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

Объект авторского права

УДК 539.12.01

ПАВЛЕНКО
Андрей Васильевич

ДВУМЕРНЫЕ ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ПАРЦИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ ЛОГУНОВА–ТАВХЕЛИДЗЕ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.04.02 – теоретическая физика

Гомель, 2026

Научная работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Научный руководитель: **Капшай Валерий Николаевич**
кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры теоретической физики
учреждения образования «Гомельский
государственный университет имени
Франциска Скорины»

Официальные оппоненты: **Курочкин Юрий Андреевич**
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий центром
«Фундаментальные взаимодействия
и астрофизика» государственного научного
учреждения «Институт физики имени
Б. И. Степанова Национальной академии наук
Беларуси»

Зыкунов Владимир Александрович
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
автоматизированных систем обработки
информации учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Оппонирующая организация – Белорусский государственный университет.

Защита состоится «24» апреля 2026 года в 11^{00} на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.02 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» (246028, г. Гомель, ул. Советская, 104, тел. 8 (0232) 50 38 41, e-mail: grishechkin@gsu.by).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Автореферат разослан « 20 » марта 2026 г.

Учёный секретарь совета
по защите диссертаций Ю.А. Гришечкин

ВВЕДЕНИЕ

Описание явлений, изучаемых в физике высоких энергий и физике элементарных частиц, основано на квантовой теории поля. Основным инструментом квантовой теории поля применительно к описанию состояний двухчастичных систем является уравнение Бете–Солпитера, предложенное в 1951 году. Несмотря на сохраняющийся интерес к этому формализму и его успешное применение, например, для описания состояний адронов и легких ядер, решение ряда задач на основе этого подхода осложнено принципиальными трудностями. В частности, решение уравнения Бете–Солпитера в случае нетривиальных потенциалов обычно получают численными методами, из-за невозможности получить точные аналитические выражения. Предметом дискуссий остается и физическая интерпретация двухвременной волновой функции (ВФ).

По этим причинам А. А. Логуновым и А. Н. Тавхелидзе был предложен альтернативный подход, впоследствии названный квазипотенциальным[1]. Ключевые преимущества этого подхода заключаются в использовании трехмерных уравнений в импульсном представлении (ИП), геометрически соответствующих пространству Лобачевского, – как альтернативы четырехмерному уравнению Бете–Солпитера – и в возможности стандартной вероятностной интерпретации ВФ. Присущая квазипотенциальному подходу неоднозначность в определении функции Грина стимулировала формулировку других вариантов квазипотенциальных уравнений, например, уравнений Гросса и Кадышевского.

Разработка методов решения интегральных квазипотенциальных уравнений, изначально сформулированных в ИП, впоследствии получила развитие на основе идеи о разложении всех функций по матричным элементам унитарных неприводимых представлений группы Лоренца. Это преобразование представляет релятивистский аналог трёхмерного преобразования Фурье. С его использованием открылась возможность перехода в трёхмерное релятивистское конфигурационное представление (РКП), являющееся прямым обобщением координатного представления нерелятивистской квантовой механики. В РКП для состояний рассеяния формулируется интегральное уравнение, структурно аналогичное уравнению Липпмана–Швингера. Переход к конечно-разностной форме в трёхмерном РКП реализуется посредством применения рекуррентных соотношений для функций Лежандра первого рода, содержащихся в разложении релятивистских плоских волн по сферическим гармоникам. Существенными достижениями на этом этапе стали вывод конечно-разностных уравнений и формулировка интегрального представления для парциальных функций Грина.

Со времени разработки квазипотенциального подхода он использовался при решении задач в одномерном и трехмерном РКП, а применительно

[1] Logunov, A. A. Quasi-optical approach in quantum field theory/ A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze // II Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.

к задачам о рассеянии и связанных состояниях **двумерных двухчастичных систем** данный подход долгое время оставался практически вне внимания физиков-теоретиков. Попытки исследований в этом направлении были предприняты в работах [2,3].

В работе [2] введено понятие двумерного РКП, получено двумерное конечно-разностное уравнение в РКП и найдено его точное решение применительно к релятивистскому гармоническому осциллятору. Авторами этой работы для стационарных состояний определены ВФ и спектр энергий, при этом в нерелятивистском пределе корректно воспроизведены решения, соответствующие двумерному уравнению Шрёдингера. Также в работе[2] определен явный вид двумерного оператора импульса, впервые рассмотрено интегральное преобразование ВФ из ИП в РКП с использованием функций, связанных с представлениями группы Лоренца SO(2,1). Однако, решения конечно-разностных уравнений неоднозначны и определяются с точностью до «i-периодических» множителей, по этой причине исключается их однозначная физическая интерпретация и ограничивается практическая применимость.

В статье[3] произведен парциальный анализ релятивистских функций, полученных в работе[2], – в целях перехода в двумерное РКП. К сожалению, эти исследования не получили развития.

В настоящее время основными инструментами для описания двумерных квантовых систем являются двумерное уравнение Шрёдингера и уравнение Дирака. Первое из них является нерелятивистским, второе – релятивистским, но применимо для рассмотрения только одночастичных состояний. Таким образом, в теоретическом аппарате современной физики сохраняется существенный пробел: не существует последовательного метода описания релятивистских **двухчастичных** систем в двумерном РКП – несмотря на доказанную эффективность квазипотенциального подхода при решении задач в одномерном и трехмерном пространстве.

Центральной задачей настоящего исследования является создание последовательного математического аппарата для описания в двумерном пространстве двухчастичных систем на основе квазипотенциального подхода. Разработка такого формализма является актуальной проблемой теоретической физики, что связано с возрастающим интересом к низкоразмерным квантовым системам, в которых проявляются специфические релятивистские эффекты, не имеющие аналогов в трехмерном пространстве.

---

[2] Nagiyev, S. M. The relativistic two-dimensional harmonic oscillator / S. M. Nagiyev, E. I. Jafarov, M. Y. Efendiyev // IL Nuovo Cimento. – 2009. – 124B. – P. 395–403.

[3] Мир-Касимов, Р. М. Релятивистские операторы кинематического импульса / Р. М. Мир-Касимов // Физика элементарных частиц и атомного ядра теория Письма в ЭЧАЯ. – 2010. – Т. 7, № 5 (161). – С. 505–515.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами, темами

Исследования по теме диссертации выполнены с 2020 по 2025 год в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» в рамках следующих научных программ:

– ГПНИ «Конвергенция – 2020», подпрограмма «Микромир, плазма, Вселенная», НИР «Двухчастичные и малочастичные квантовополевые системы с энергозависимыми и Лобачевско-локальными взаимодействиями» (№ ГР 20160792, 2016–2020 гг.);

– ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Микромир, плазма и Вселенная», НИР «Парциальный анализ составных квантовополевых систем частиц» (№ ГР 20211772, 2021–2025 гг.);

– грант БРФФИ по теме «Методы решения двухчастичных двумерных квазипотенциальных уравнений» (№ ГР 20251009, 2025–2027 гг.).

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Целью исследования является описание связанных состояний и состояний рассеяния двумерных релятивистских систем двух скалярных частиц одинаковой массы в рамках квазипотенциального подхода Логунова–Тавхелидзе.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие *задачи*:

– сформулировать двумерные парциальные интегральные квазипотенциальные уравнения в РКП, описывающие связанные состояния и состояния рассеяния системы двух скалярных частиц одинаковой массы;

– определить явный вид двумерных парциальных ФГ в подходе Логунова–Тавхелидзе для связанных состояний и состояний рассеяния двухчастичной системы в РКП;

– найти точные аналитические решения парциальных интегральных уравнений в РКП с квазипотенциалами взаимодействия в виде «дельта-окружность» и суперпозиции двух квазипотенциалов «дельта-окружность» для описания связанных состояний и состояний рассеяния двухчастичных систем;

– найти точные аналитические решения двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе в ИП для системы двух скалярных частиц одинаковой массы, взаимодействующих посредством различных релятивистских аналогов потенциала гармонического осциллятора;

– найти точные решения двумерных парциальных уравнений Логунова–Тавхелидзе в ИП, описывающих связанные состояния двухчастичных систем с потенциалами взаимодействия, представляющими релятивистские обобщения потенциала типа «дельта-окружность» и суперпозиции двух «дельта-окружностей», заданных в координатном представлении.

Объектом исследования являются двумерные релятивистские квантовые системы двух элементарных частиц.

Для описания состояния частиц на плоскости двумерное уравнение Логунова–Тавхелидзе в ИП и РКП было выбрано по следующим основным причинам:

– в рамках данного формализма допускается чёткая физическая интерпретация ВФ, что принципиально важно в анализе и последующем применении полученных решений;

– квазипотенциальные уравнения представляют релятивистское обобщение двух фундаментальных уравнений квантовой механики – уравнения Шрёдингера (для связанных состояний) и уравнения Липпмана–Швингера (для состояний рассеяния). При использовании такой аналогии для решения релятивистских уравнений можно адаптировать методы, надежно апробированные при решении нерелятивистских задач;

– в случае локальных азимутально-симметричных квазипотенциалов в РКП двумерные интегральные уравнения в РКП могут быть сведены к одномерным парциальным интегральным уравнениям, решение которых – значительно более простая задача, чем анализ полных двумерных уравнений.

Предмет исследования – двумерные парциальные интегральные двухчастичные уравнения Логунова–Тавхелидзе.

Научная новизна

Наиболее важные результаты, полученные в диссертации впервые, следующие:

– сформулированы двумерные парциальные интегральные квазипотенциальные уравнения в РКП, описывающие связанные состояния и состояния рассеяния систем двух скалярных частиц одинаковой массы;

– определён явный вид парциальных ФГ двумерного квазипотенциального уравнения Логунова–Тавхелидзе при произвольном значении азимутального квантового числа, определены их асимптотическое поведение и нерелятивистский предел парциальных волн и парциальных ФГ;

– получены точные решения двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе для связанных состояний системы двух скалярных частиц одинаковой массы для четырех релятивистских аналогов потенциала гармонического осциллятора;

– получены точные решения релятивистских парциальных уравнений – как в РКП, так и в ИП – с использованием операторов взаимодействия типа «дельта-окружность» и их суперпозиций;

– получены численные решения двумерных парциальных интегральных квазипотенциальных уравнений для связанных состояний в случае квазипотенциала Гаусса, заданного в РКП;

– в случае модельных квазипотенциалов типа «дельта-окружность» и их суперпозиций получены точные аналитические выражения для двумерных парциальных амплитуд и сечений рассеяния.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся полученные впервые:

1. Парциальные интегральные квазипотенциальные уравнения для описания связанных состояний и состояний рассеяния двумерных систем двух скалярных частиц одинаковой массы в релятивистском конфигурационном представлении, а также найденный при всех значениях азимутального квантового числа явный вид парциальных функций Грина уравнения Логунова–Тавхелидзе, выраженных через функции Лежандра второго рода с комплексным нижним и целым верхним индексами;

2. Точные решения двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе в случае квазипотенциала «дельта-окружность» и суперпозиции двух таких квазипотенциалов для связанных состояний, парциальные волновые функции которых выражены в релятивистском конфигурационном представлении через соответствующие парциальные функции Грина, а в импульсном представлении – через релятивистские парциальные волны;

3. Точные решения двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе, соответствующие четырём релятивистским аналогам потенциала гармонического осциллятора.

Личный вклад соискателя учёной степени

Диссертационная работа и все представленные в ней результаты отражают личный вклад автора в проведенные исследования. Работы [1] – [15] опубликованы в соавторстве с Ю.А. Гришечкиным, который участвовал в обсуждении промежуточных и конечных результатов исследований. Все оригинальные результаты по теме диссертации получены и опубликованы в работах [2] – [7] и [11] – [15] совместно с научным руководителем В.Н. Капшаем, которым была сформулирована тема и поставлены задачи исследования, осуществлялось общее руководство работой и обсуждались результаты и возможности применения разработанных в диссертационной работе подходов.

Апробация диссертации и информация об использовании её результатов

Результаты исследований, включённые в диссертацию, были обсуждены на восьми научных собраниях:

четырёх международных – 19th International Conference on Global Research and Education «Inter-Academia 2021» (Гомель, 2021); VI Международной научной конференции «Проблемы взаимодействия излучения с веществом», посвящённой академику Б. В. Бокутю (Гомель, 2024); XV и XVI Международных школах-конференциях «Актуальные проблемы физики микромира» (г. Минск, 2022, 2025);

одном республиканском – Научной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Ф. И. Фёдорова (Гомель, 2021);

трёх республиканских научных конференциях аспирантов, магистрантов, студентов – X, XI, XIII Республиканских научных конференциях студентов, магистрантов и аспирантов «Актуальные вопросы физики и техники» (Гомель, 2021, 2022, 2024).

Результаты диссертационного исследования частично внедрены в учебный процесс факультета физики и информационных технологий УО «ГГУ им. Ф. Скорины».

Опубликованность результатов диссертации

Результаты диссертации опубликованы в 15 научных работах, из которых 7 статей общим объёмом 3,9 авторского листа, удовлетворяющих требованиям пункта 19 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь, и 8 работ в сборниках трудов научных собраний.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав, заключения, списка использованных источников и четырех приложений, представляющих дополнения к тексту первой и второй глав. Полный объём диссертации составляет 110 страниц, включая 31 рисунок (на 24 страницах), 4 приложения (на 9 страницах). В списке использованных источников на 12 страницах приведены библиографические описания 125 использованных научных работ, из которых 15 – работы соискателя.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В главе 1 произведен аналитический обзор основных методов описания взаимодействий частиц на основе уравнения Шрёдингера, уравнения Дирака и конечно-разностных уравнений в РКП – в одномерных, двумерных и трехмерных системах. Установлено принципиальное преимущество интегральных квазипотенциальных уравнений перед конечно-разностными, заключающееся в отсутствии неоднозначных решений.

Предложена альтернативная математическая формулировка [5], [12]

$$s_{\mu}(\chi_p,\rho)=i^{\mu}\,\frac{\Gamma(1/2-im\rho)\exp(\pi m\rho)}{\Gamma(1/2+\mu-im\rho)\Gamma(1/2-\mu+im\rho)}\left(\frac{2}{\pi\,\mathrm{sh}\,\chi_p}\right)^{1/2}Q^{im\rho}_{-\mu-1/2}(\mathrm{cth}\chi_p),\quad(1)$$

$$e_{\mu}^{\pm}(\chi_p,\rho)=\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{cth}(\pi m\rho)\Gamma(1/2-im\rho)\Gamma(1/2+\mu\mp im\rho)}{i^{\mu}\sqrt{\pi\,\mathrm{sh}\,\chi_p}\,\Gamma(1/2+\mu-im\rho)}P_{-\mu-1/2}^{\pm im\rho}(\mathrm{cth}\chi_p), \qquad (2)$$

двумерных релятивистских парциальных волн[3]

$$s_{\mu}(\chi_p,\rho)=i^{\mu}\frac{\Gamma(1/2-im\rho)}{\Gamma(1/2+\mu-im\rho)}P_{-im\rho-1/2}^{\mu}(\mathrm{ch}\chi_p), \qquad (3)$$

$$e_{\mu}^{\pm}(\chi_p,\rho)=i^{\mu}\frac{2}{\pi}\mathrm{cth}(\pi m\rho)\frac{\Gamma(1/2-im\rho)}{\Gamma(1/2+\mu-im\rho)}Q_{-1/2\mp im\rho}^{\mu}(\mathrm{ch}\chi_p), \qquad (4)$$

где $P_a^{b}(z)$ и $Q_a^{b}(z)$ – функции Лежандра первого и второго рода;

$\Gamma(z)$ – гамма-функция;

m – масса частицы;

$\mu=0;\pm1;\pm2...$ – азимутальное квантовое число.

Для функций (3) и (4) установлены асимптотическое поведение и нерелятивистский предел [5].

Впервые сформулированы в интегральной форме парциальные уравнения в двумерном РКП [5], описывающие состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы, применимые как для состояний рассеяния –

$$\psi_{\mu}(\chi_q,\rho)=\sqrt{m\rho\,\mathrm{sh}\,\chi_q}\,s_{\mu}(\chi_q,\rho)+2\pi\int_0^{\infty}G_{\mu}(\chi_q;\rho,\rho')V(m\,\mathrm{ch}\,\chi_q;\rho')\psi_{\mu}(\chi_q,\rho')d\rho', \qquad (5)$$

так и для связанных состояний –

$$\psi_{\mu}(i\mathrm{w}_q,\rho)=2\pi\int_0^{\infty}G_{\mu}(i\mathrm{w}_q;\rho,\rho')V(m\,\mathrm{ch}\,i\mathrm{w}_q;\rho')\psi_{\mu}(i\mathrm{w}_q,\rho')d\rho', \qquad (6)$$

где $\psi_{\mu}(\chi_q,\rho)$ и $\psi_{\mu}(i\mathrm{w}_q,\rho)$ – парциальные ВФ;

$G_{\mu}(i\mathrm{w}_q;\rho,\rho')$ – парциальные функции Грина в РКП;

$V(m\,\mathrm{ch}\,i\mathrm{w}_q;\rho')$ – квазипотенциал.

В главе 2 получены аналитические выражения для парциальных функций Грина уравнения Логунова–Тавхелидзе в двумерном РКП [5]:

– в случае связанных состояний

$$G_{\mu}(i\mathrm{w}_q;\rho,\rho')=\frac{-i\sqrt{\rho\rho'}\,\mathrm{sh}(i\mathrm{w}_q)}{4\mathrm{sh}(2i\mathrm{w}_q)}\left[\frac{e_{\mu}^{+}(i\mathrm{w}_q,\rho)e_{\mu}^{+*}(i\mathrm{w}_q,\rho')}{1-\exp\left[-\pi m(\rho-\rho')\right]}+\frac{e_{\mu}^{-}(i\mathrm{w}_q,\rho)e_{\mu}^{-*}(i\mathrm{w}_q,\rho')}{1-\exp\left[\pi m(\rho-\rho')\right]}-\right.$$

$$\left.-\frac{e_{\mu}^{+}(i\mathrm{w}_q,\rho)e_{\mu}^{-*}(i\mathrm{w}_q,\rho')}{1-\exp\left[-\pi m(\rho+\rho')\right]}-\frac{e_{\mu}^{-}(i\mathrm{w}_q,\rho)e_{\mu}^{+*}(i\mathrm{w}_q,\rho')}{1-\exp\left[\pi m(\rho+\rho')\right]}\right], \qquad (7)$$

– в случае состояний рассеяния

$$G_{\mu}(\chi_q;\rho,\rho')=\frac{-i\sqrt{\rho\rho'}\,\mathrm{sh}(\chi_q)}{4\mathrm{sh}(2\chi_q)}\times\left[\frac{e_{\mu}^{+}(\chi_q,\rho)e_{\mu}^{+*}(\chi_q,\rho')}{1-\exp\left[-\pi m(\rho-\rho')\right]}+\right.$$

$$\left.+\frac{e_{\mu}^{-}(\chi_q,\rho)e_{\mu}^{-*}(\chi_q,\rho')}{1-\exp\left[\pi m(\rho-\rho')\right]}-\frac{e_{\mu}^{+}(\chi_q,\rho)e_{\mu}^{-*}(\chi_q,\rho')}{1-\exp\left[-\pi m(\rho+\rho')\right]}-\frac{e_{\mu}^{-}(\chi_q,\rho)e_{\mu}^{+*}(\chi_q,\rho')}{1-\exp\left[\pi m(\rho+\rho')\right]}\right]. \qquad (8)$$

Определено асимптотическое поведение функций (8) [5].

Получены формулы для парциальных амплитуд рассеяния [4]

$$f_{\mu}(\chi_q)=\frac{-\sqrt{2\pi}}{m\,\mathrm{sh}(2\chi_q)}\int_0^{\infty}d\rho'\sqrt{\rho'}\,V(\rho')s_{\mu}^{*}(\chi_q,\rho')\psi_{\mu}(\chi_q,\rho'), \qquad (9)$$

а также для парциальных двумерных сечений рассеяния и полного двумерного сечения рассеяния [4]:

$$\sigma_{\mu}(\chi_q)=2\pi\left|f_{\mu}(\chi_q)\right|^2, \qquad (10)$$

$$\sigma(\chi_q)=\sigma_0(\chi_q)+2\sum_{\mu=1}^{\infty}\sigma_{\mu}(\chi_q). \qquad (11)$$

В главе 3 в случае квазипотенциала «дельта-окружность» и суперпозиции двух таких квазипотенциалов

$$V(\rho)=-\lambda_1\delta(\rho-a_1), \qquad (12)$$

$$V(\rho)=-\lambda_1\delta(\rho-a_1)-\lambda_2\delta(\rho-a_2), \qquad (13)$$

где $\lambda_{1,2}$ – действительные константы,

$a_2 > a_1 > 0$ – радиусы «дельта-окружностей»,

получены точные условия квантования энергии и парциальные ВФ как в РКП так и в ИП [6]:

– в случае квазипотенциала «дельта-окружность»

$$1 = -2\pi\lambda_1 G_\mu(i\mathrm{w}_q; a_1, a_1), \tag{14}$$

$$\psi_\mu(i\mathrm{w}_q, \rho) = -2\pi\lambda_1 G_\mu(i\mathrm{w}_q; \rho, a_1)\psi_\mu(i\mathrm{w}_q, a_1), \tag{15}$$

$$\psi_\mu(i\mathrm{w}_q, \chi_p) = C_{1,\mu}\lambda_1 a_1 \frac{\sqrt{\operatorname{sh}\chi_p}\, s_\mu^*(\chi_p, a_1)}{\operatorname{ch}^2\chi_p - \operatorname{ch}^2 i\mathrm{w}_q}, \tag{16}$$

– в случае суперпозиции двух квазипотенциалов «дельта-окружность»

$$\left[2\pi\lambda_1 G_\mu(i\mathrm{w}_q; a_1, a_1) + 1\right]\left[2\pi\lambda_2 G_\mu(i\mathrm{w}_q; a_2, a_2) + 1\right] -$$

$$-(2\pi)^2\lambda_1\lambda_2 G_\mu(i\mathrm{w}_q; a_1, a_2) G_\mu(i\mathrm{w}_q; a_2, a_1) = 0, \tag{17}$$

$$\psi_\mu(i\mathrm{w}_q, \rho) = \psi_\mu(i\mathrm{w}_q, a_1)\times$$

$$\times\left[\frac{2\pi\lambda_1 G_\mu(i\mathrm{w}_q; a_1, a_1) + 1}{G_\mu(i\mathrm{w}_q; a_1, a_2)} G_\mu(i\mathrm{w}_q; \rho, a_2) - 2\pi\lambda_1 G_\mu(i\mathrm{w}_q; \rho, a_1)\right], \tag{18}$$

$$\psi_\mu(i\mathrm{w}_q, \chi_p) = C_{1,\mu}\times$$

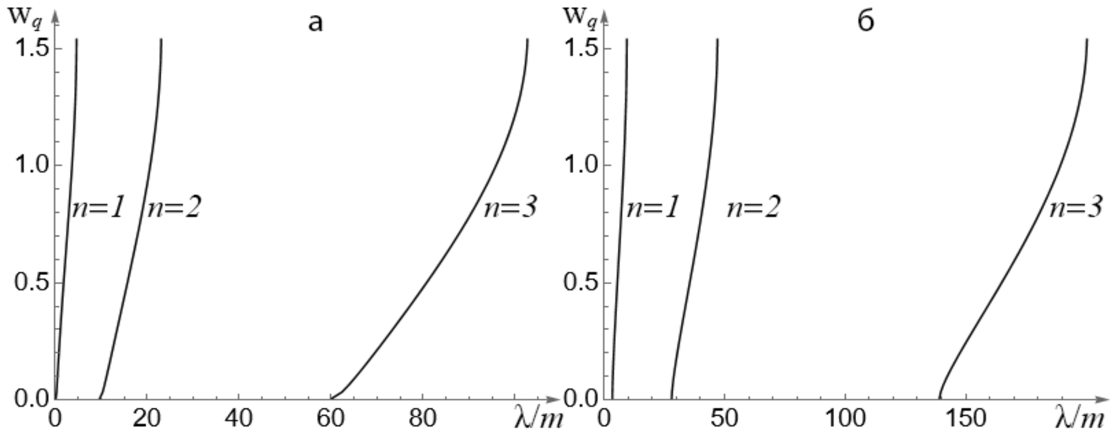
$$\times\left[\lambda_1 a_1 \frac{\sqrt{\operatorname{sh}\chi_p}\, s_\mu^*(\chi_p, a_1)}{\operatorname{ch}^2\chi_p - \operatorname{ch}^2 i\mathrm{w}_q} - \frac{1 + 2\pi\lambda_1 G_\mu(i\mathrm{w}_q; a_1, a_1)}{2\pi G_\mu(i\mathrm{w}_q; a_1, a_2)} \frac{\sqrt{a_2 a_1 \operatorname{sh}\chi_p}\, s_\mu^*(\chi_p, a_2)}{\operatorname{ch}^2\chi_p - \operatorname{ch}^2 i\mathrm{w}_q}\right]. \tag{19}$$

Установлено, что – в зависимости от параметров – в случае квазипотенциала «дельта-окружность» возможно или одно связанное состояние системы двух частиц, или ни одного; а в случае квазипотенциала, моделируемого суперпозицией двух «дельта-окружностей», система может иметь одно, два связанных состояния или не иметь их вовсе. Обнаружено, что при определенных значениях параметров условию квантования энергии (17) при использовании суперпозиции двух квазипотенциалов «дельта-окружность» свойственно наличие точки разрыва второго рода. В результате анализа выявлены различия в поведении квадрата модуля парциальных ВФ в обоих представлениях: в конфигурационном представлении (15), (18) число нулей ВФ равно номеру состояния, а в ИП (16), (19) оно больше этого значения.

В случае квазипотенциала Гаусса

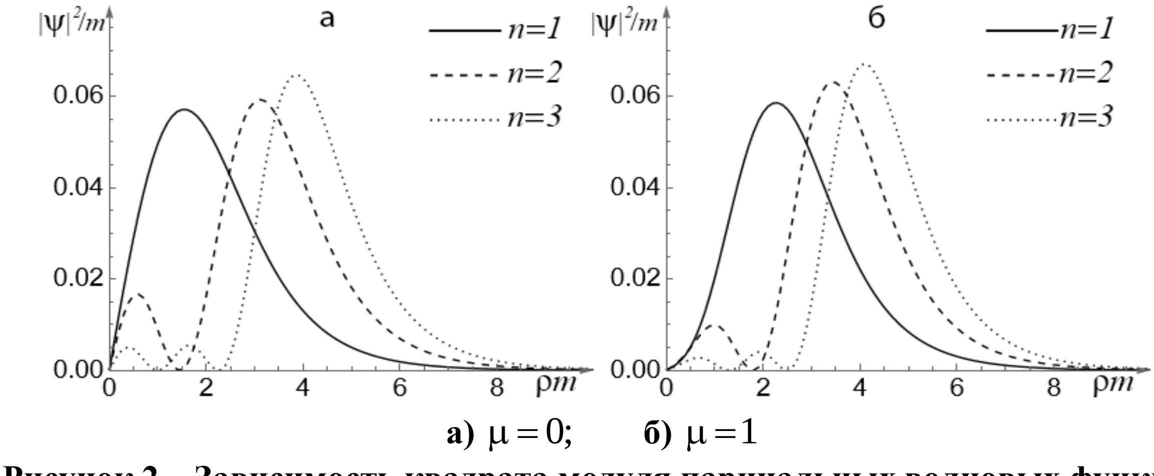
$$V_{\alpha}(\rho) = -\lambda \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\rho-\rho_0)^2}{2\alpha^2}\right), \tag{20}$$

где λ, α и ρ_0 – положительные константы, получены численные решения двумерных парциальных интегральных квазипотенциальных уравнений Логунова–Тавхелидзе в РКП для связанных состояний. В результате численного решения уравнений [3] получены условия квантования энергии (рисунок 1), а также парциальные ВФ и зависимости квадратов их модулей от ρm – в РКП (рисунок 2).



а) $\mu = 0$; **б)** $\mu = 1$

Рисунок 1 – Условие квантования энергии двухчастичной системы



а) $\mu = 0$; **б)** $\mu = 1$

Рисунок 2 – Зависимость квадрата модуля парциальных волновых функций в РКП при $w_q = 0,5$

При анализе условий квантования энергии выявлено, что в определенных диапазонах параметров квазипотенциала основному состоянию может соответствовать ВФ с одним нулем, двумя нулями, тремя и более нулями.

Показано, что при $\alpha \to 0$ квазипотенциал (20) переходит в квазипотенциал «дельта-окружность» (12) при $\rho_0 = a_1$. Продемонстрировано, что с уменьшением параметра α найденные численно результаты асимптотически приближаются к точным аналитическим решениям, соответствующим предельному варианту – квазипотенциалу «дельта-окружность».

В разделах 3.4 и 3.5 с учётом квазипотенциалов

$$V(\rho) = \lambda_1 \delta(\rho - a_1), \tag{21}$$

$$V(\rho) = \lambda_1 \delta(\rho - a_1) + \lambda_2 \delta(\rho - a_2), \tag{22}$$

получены точные аналитические выражения парциальных двумерных амплитуд рассеяния и двумерных парциальных сечений рассеяния системы двух скалярных частиц одинаковой массы:

– в случае квазипотенциала (21)

$$f_\mu(\chi_q) = \frac{\sqrt{2\pi}\,\lambda_1 a_1}{\sqrt{m}\,\mathrm{sh}(2\chi_q)} \frac{\sqrt{\mathrm{sh}\,\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, a_1) s_\mu^*(\chi_q, a_1)}{2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q; a_1, a_1) - 1}, \tag{23}$$

$$\sigma_\mu(\chi_q) = \frac{4\pi^2 \lambda_1^2 a_1^2}{m\,\mathrm{sh}^2(2\chi_q)} \frac{\mathrm{sh}\,\chi_q \left| s_\mu(\chi_q, a_1)\right|^4}{\left|2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q; a_1, a_1) - 1\right|^2}, \tag{24}$$

– в случае квазипотенциала (22)

$$\begin{gathered} f_\mu(\chi_q) = \frac{\sqrt{2\pi}}{m\,\mathrm{sh}(2\chi_q)} \times \\ \times\left[-\lambda_1\sqrt{a_1}\, s_\mu^*(\chi_q, a_1)\psi_\mu(\chi_q, a_1) - \lambda_2 \sqrt{a_2}\, s_\mu^*(\chi_q, a_2)\psi_\mu(\chi_q, a_2)\right], \end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered} \sigma_\mu(\chi_q) = \frac{4\pi^2}{m^2\,\mathrm{sh}^2(2\chi_q)\left|\Delta(\chi_q)\right|^2} \times \\ \times\left|\lambda_1\sqrt{a_1}\, s_\mu^*(\chi_q, a_1)\Delta_1(\chi_q) + \lambda_2\sqrt{a_2}\, s_\mu^*(\chi_q, a_2)\Delta_2(\chi_q)\right|^2, \end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\psi_\mu(\chi_q, a_1) = \frac{\Delta_1(\chi_q)}{\Delta(\chi_q)}; \qquad \psi_\mu(\chi_q, a_2) = \frac{\Delta_2(\chi_q)}{\Delta(\chi_q)}; \tag{27}$$

$$\Delta(\chi_q) = \left(1 - 2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q; a_1, a_1)\right)\left(1 - 2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q; a_2, a_2)\right) -$$

$$-(2\pi)^2 \lambda_2 \lambda_1 G_\mu(\chi_q; a_1, a_2) G_\mu(\chi_q; a_2, a_1);$$

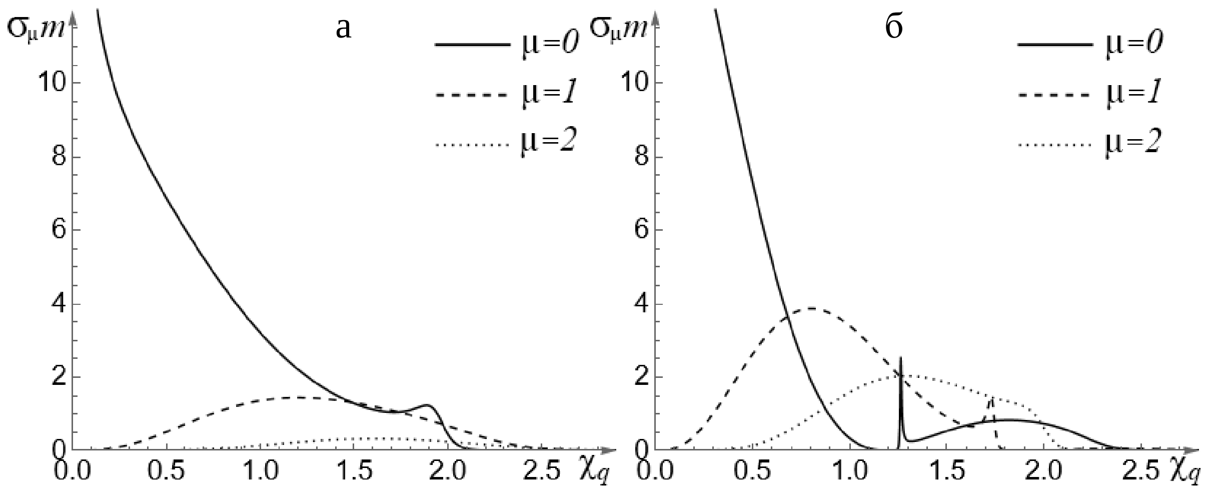
$$\Delta_1(\chi_q) = \sqrt{m a_1 \operatorname{sh}\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, a_1)\left(1 - 2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q; a_2, a_2)\right) +$$

$$+\sqrt{m a_2 \operatorname{sh}\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, a_2) 2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q; a_1, a_2);$$

$$\Delta_2(\chi_q) = \left(1 - 2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q; a_1, a_1)\right)\sqrt{m a_2 \operatorname{sh}\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, a_2) +$$

$$+2\pi\lambda_1 \sqrt{m a_1 \operatorname{sh}\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, a_1) G_\mu(\chi_q; a_2, a_1).$$

Сформулировано условие унитарности парциальных амплитуд рассеяния в двумерном пространстве. В зависимостях двумерных парциальных (19), (21) и полного сечения рассеяния от быстроты выявлены локальные резкие изменения, проявляющиеся на их графических изображениях характерными пиками (рисунок 3).



а) $a_1 m = 1$; **б)** $a_1 m = 2$

Рисунок 3 – Зависимость парциальных сечений (19) от быстроты при $\lambda_1/m = 10$

Установлено, что при моделировании взаимодействия суперпозицией двух потенциалов «дельта-окружность» при увеличении радиуса внешней «дельта-окружности» количество пиков в полном сечении рассеяния растет вследствие проявления вклада в них состояний со всё большими значениями азимутального квантового числа, что свойственно и системе, в которой взаимодействие моделируется одиночным квазипотенциалом «дельта-окружность».

В главе 4 связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы исследованы на основе двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе в ИП. При моделировании взаимодействия использованы суперпозиции сепарабельных потенциалов, которым в координатном представлении соответствуют комбинации потенциалов типа «дельта-окружность», а также четыре их релятивистских обобщения (здесь и далее опускаем индекс q у энергии E_q, обозначая полную энергию системы через $2E$) [7]:

$$V_{1,\mu}(E;p,k) = -2\pi \frac{E}{E_k} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\, a_i J_\mu(pa_i) J_\mu(ka_i), \tag{28}$$

$$V_{2,\mu}(E;p,k) = -2\pi \frac{E}{E_p} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\, a_i J_\mu(pa_i) J_\mu(ka_i), \tag{29}$$

$$V_{3,\mu}(E;p,k) = -2\pi \frac{E}{\sqrt{E_p E_k}} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\, a_i J_\mu(pa_i) J_\mu(ka_i), \tag{30}$$

$$V_{4,\mu}(E;p,k) = -2\pi \frac{\sqrt{E_p E_k}}{E} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\, a_i J_\mu(pa_i) J_\mu(ka_i), \tag{31}$$

где $J_\mu(z)$ – функция Бесселя;

$E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$.

С учетом таких моделей установлено, что парциальные ВФ в ИП обладают бесконечным количеством нулей. Найдены точные условия квантования энергии с учетом квазипотенциалов (28) – (31) при $N = 1$ [7]:

– квазипотенциалам (28) – (30) соответствует условие

$$1 = \lambda_1 a_1 \frac{m}{E}\left[I_\mu\left(a_1\sqrt{m^2 - E^2}\right) K_\mu\left(a_1\sqrt{m^2 - E^2}\right) - I_\mu(a_1 m) K_\mu(a_1 m) \right], \tag{27}$$

– квазипотенциалу (31) – условие

$$1 = \lambda_1 a_1 \frac{m}{E} I_\mu\left(a_1\sqrt{m^2 - E^2}\right) K_\mu\left(a_1\sqrt{m^2 - E^2}\right), \tag{28}$$

где $I_\mu(z)$ и $K_\mu(z)$ – модифицированные функции Бесселя.

Точные условия квантования энергии, найденные с учетом квазипотенциалов (28) – (31) при $N = 2$, выражаются формулами [7]:

– соответствующими уравнениям с квазипотенциалами (28) – (30)

$$\left[\lambda_1 a_1 \frac{m}{E}\Big(I_\mu(a_1 z)K_\mu(a_1 z) - I_\mu(a_1 m)K_\mu(a_1 m)\Big) - 1\right]\times$$

$$\times\left[\lambda_2 a_2 \frac{m}{E}\Big(I_\mu(a_2 z)K_\mu(a_2 z) - I_\mu(a_2 m)K_\mu(a_2 m)\Big) - 1\right]-$$

$$-\lambda_1 a_1 \lambda_2 a_2 \frac{m^2}{E^2}\Big[I_\mu(a_1 z)K_\mu(a_2 z) - I_\mu(a_1 m)K_\mu(a_2 m)\Big]^2 = 0, \tag{29}$$

– соответствующими уравнениям с квазипотенциалом (31)

$$\left[\lambda_1 a_1 \frac{m}{E} I_\mu(a_1 z)K_\mu(a_1 z) - 1\right]\left[\lambda_2 a_2 \frac{m}{E} I_\mu(a_2 z)K_\mu(a_2 z) - 1\right]-$$

$$-\lambda_1 a_1 \lambda_2 a_2 \frac{m^2}{E^2}\Big[I_\mu(a_1 z)K_\mu(a_2 z)\Big]^2 = 0. \tag{30}$$

В результате исследования парциальных ВФ в координатном представлении показано, что количество их нулей совпадает с номером связанного состояния [7], а максимумы квадратов модулей ВФ локализованы при значениях переменной ρm, совпадающих с радиусами «дельта-окружностей».

В главе 5 исследованы связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы, описываемые квазипотенциальным двумерным уравнением Логунова – Тавхелидзе в ИП. В качестве моделей взаимодействия использованы четыре релятивистских аналога потенциала гармонического осциллятора [1], [2]:

$$V_1\big(E;\mathbf{p},\mathbf{k}\big) = -(2\pi)^2\omega^2\Delta_p\left[\frac{E_p}{m}\delta\big(\mathbf{p}-\mathbf{k}\big)\right], \tag{31}$$

$$V_2\big(E;\mathbf{p},\mathbf{k}\big) = -(2\pi)^2\omega^2\frac{E_k}{E}\Delta_p\delta\big(\mathbf{p}-\mathbf{k}\big), \tag{32}$$

$$V_3\big(E;\mathbf{p},\mathbf{k}\big) = -(2\pi)^2\omega^2\frac{E_p}{E}\Delta_p\delta\big(\mathbf{p}-\mathbf{k}\big), \tag{33}$$

$$V_4(E;\mathbf{p},\mathbf{k}) = -(2\pi)^2\omega^2\frac{E_k}{E_p}\Delta_p\left[\frac{E_p}{E}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})\right]. \tag{34}$$

С учетом всех четырёх квазипотенциалов (31) – (34) получены точные условия квантования энергии двухчастичной системы [2]:

– при использовании потенциала (31)

$$2E_n = 2\sqrt{2\omega\left(2n+|\mu|+1\right)+m^2}, \tag{35}$$

– при моделировании взаимодействия потенциалами (32) – (34)

$$\sqrt{E_n}\left(E_n^2 - m^2\right) = 2\omega\sqrt{m}\left(2n+|\mu|+1\right). \tag{36}$$

Кроме того, в [2] выведены явные выражения для парциальных ВФ:

$$\psi_{1,\mu,n}\left(p\right) = C_{1,\mu,n}\frac{n!|\mu|!}{(|\mu|+n)!}\,p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\exp\left(-\frac{1}{\omega}\frac{p^2}{2}\right)L_n^{|\mu|}\left(\frac{1}{\omega}p^2\right), \tag{37}$$

$$\psi_{2,\mu,n}\left(p\right) = C_{2,\mu,n}\frac{n!|\mu|!}{(|\mu|+n)!}\,p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\exp\left(-\sqrt{\frac{E_n}{m\omega^2}}\frac{p^2}{2}\right)L_n^{|\mu|}\left(\sqrt{\frac{E_n}{m\omega^2}}p^2\right), \tag{38}$$

$$\psi_{3,\mu,n}\left(p\right) = C_{3,\mu,n}\frac{n!|\mu|!}{(|\mu|+n)!}\frac{E_p}{m}\,p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\exp\left(-\sqrt{\frac{E_n}{m\omega^2}}\frac{p^2}{2}\right)L_n^{|\mu|}\left(\sqrt{\frac{E_n}{m\omega^2}}p^2\right), \tag{39}$$

$$\psi_{4,\mu,n}\left(p\right) = C_{4,\mu,n}\frac{n!|\mu|!}{(|\mu|+n)!}\frac{m}{E_p}\,p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\exp\left(-\sqrt{\frac{E_n}{m\omega^2}}\frac{p^2}{2}\right)L_n^{|\mu|}\left(\sqrt{\frac{E_n}{m\omega^2}}p^2\right), \tag{40}$$

где $L_n^{|\mu|}\left(z\right)$ – полиномы Лагерра.

Парциальные ВФ (39), преобразованные с помощью интегрального преобразования Фурье–Бесселя в координатное представление, обладают одним дополнительным нулём – по сравнению с нерелятивистскими парциальными ВФ. Парциальные ВФ (37) и (38) в координатном представлении имеют точный вид и выражены через полиномы Лагерра. При исследовании парциальных ВФ (37) – (39) в РКП установлено, что количество их нулей отличается от количества нулей в решениях соответствующей нерелятивистской задачи, что является следствием релятивистских эффектов.

Заключение

Развитый в настоящей диссертационной работе квазипотенциальный подход применен к описанию связанных состояний и состояний рассеяния релятивистских двумерных систем двух скалярных частиц одинаковой массы. Сформулирован последовательный математический аппарат и получен ряд результатов, которые в совокупности представляют вклад в теорию релятивистских двумерных двухчастичных уравнений. Основные результаты работы следующие:

1. Разработан последовательный математический формализм для описания релятивистских двумерных систем на основе интегральных уравнений. В отличие от конечно-разностных уравнений в РКП, в предложенном подходе исключена неоднозначность решений и обеспечена однозначная физическая интерпретация результатов. Это достигнуто за счет:

– применения впервые сформулированных парциальных уравнений Логунова–Тавхелидзе в двумерном РКП в интегральной форме [5], пригодных для анализа как связанных состояний, так и состояний рассеяния;

– разработки альтернативной математической формулировки двумерных релятивистских парциальных волн через функции Лежандра с полуцелым нижним и комплексным верхним индексами [5], [12];

– установления корректного нерелятивистского предела и анализа асимптотического поведения релятивистских плоских волн [5].

2. Создана основа для построения теории рассеяния в двумерном РКП. Получены аналитические выражения для парциальных ФГ [5], описывающих как связанные состояния, так и состояния рассеяния, и установлены соответствующие им асимптотические формулы. На этой основе разработан формализм теории рассеяния, включающий вывод формул для парциальных амплитуд и расчет сечений рассеяния [4].

3. Продемонстрирована универсальность разработанного подхода и произведен комплексный анализ решений, полученных с использованием различных моделей взаимодействия в системе двух частиц:

– в случае квазипотенциала Гаусса численно решены парциальные интегральные уравнения в РКП: получены условия квантования энергии и ВФ. Показано, что в определенных диапазонах параметров основному состоянию может соответствовать ВФ с несколькими нулями. Установлено, что при стремлении ширины контура потенциальной кривой к нулю решения асимптотически приближаются к точным выражениям, соответствующим предельному потенциалу «дельта-окружность» [3];

– в случае квазипотенциала «дельта-окружность» и суперпозиций таких квазипотенциалов, заданных в РКП, получены точные аналитические выражения парциальных амплитуд и сечений рассеяния, сформулировано условие унитарности. Установлено, что основной вклад в полное сечение рассеяния при малых значениях быстроты вносит парциальная составляющая, соответствующая состоянию с азимутальным квантовым числом равным нулю, что обусловлено неограниченным ростом данного парциального сечения в низкоэнергетической области. Выявлены резкие изменения (пики) в зависимости сечения рассеяния от быстроты. Установлено, что при моделировании взаимодействия суперпозицией двух квазипотенциалов «дельта-окружность» с увеличением радиуса внешней «дельта-окружности» количество пиков в полном сечении рассеяния возрастает – вследствие увеличения вклада составляющих со всё большим азимутальным квантовым числом [4];

– с применением релятивистских обобщений потенциала «дельта-окружность» и суперпозиций таких моделей, заданных в координатном представлении, найдены точные и приближенные условия квантования энергии в ИП [7]. Показано, что парциальные ВФ в ИП обладают бесконечным числом нулей, а в координатном представлении количество нулей соответствует номеру связанного состояния, при этом максимумы локализованы в точках, координаты которых равны радиусам «дельта-окружностей» [8], [9] и [14];

– с учетом квазипотенциалов «дельта-окружность» и суперпозиции двух таких квазипотенциалов, заданных в двумерном РКП, найдены точные условия квантования энергии. Показано, что в зависимости от параметров одиночного квазипотенциала «дельта-окружность» возможно одно или ни одного связанного состояния; при моделировании взаимодействия суперпозицией двух таких квазипотенциалов система может обладать одним, двумя связанными состояниями или не иметь их. В результате численного анализа выявлено существенное различие в поведении квадратов модулей парциальных ВФ в разных представлениях: в РКП количество нулей ВФ в точности равно номеру квантового состояния; в ИП наблюдается большее количество нулей, чем номер состояния [6];

– с применением четырех релятивистских аналогов потенциала гармонического осциллятора в ИП получены точные решения уравнения Логунова–Тавхелидзе. Для парциальных ВФ в РКП с учетом трех вариантов таких потенциалов найдены точные выражения. Установлено ключевое свойство решений: количество нулей ВФ в координатном представлении равно номеру состояния, увеличенному на единицу, что аналогично нерелятивистскому осциллятору. В парциальных ВФ, найденных для одного из указанных вариантов потенциала, обнаружено наличие дополнительного нуля, являющееся релятивистским эффектом. Корректность полученных решений подтверждена при переходе к нерелятивистскому пределу [1], [2], [10], [11], [13], [15].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Разработанный в диссертации математический аппарат и полученные точные решения представляют надежный фундамент для продолжения исследований в области релятивистской квантовой теории двумерных двухчастичных систем.

Сформулированные в главах 1 и 2 интегральные уравнения в двумерном РКП свободны от ограничений, характерных для конечно-разностных уравнений, и могут быть использованы для решения широкого круга задач о связанных состояниях и рассеянии.

Точные решения, полученные с учетом потенциалов типа «дельта-окружность» и аналогов потенциала гармонического осциллятора (главы 3, 4 и 5), могут служить эталонными моделями при проверке и калибровке численных алгоритмов, применяемых для решения квазипотенциальных уравнений в условиях более сложных взаимодействий.

Выявленные особенности спектров энергии и ВФ (аномальное количество нулей в парциальных ВФ основного состояния в случае потенциала Гаусса и появление дополнительного нуля в ВФ релятивистского гармонического осциллятора) важны для понимания специфики релятивистских эффектов в низкоразмерных системах.

Разработанный формализм теории рассеяния в двумерном РКП может быть применен для анализа процессов столкновений в релятивистских низкоразмерных системах, представляющих интерес в физике конденсированных состояний и квантовой теории поля.

Результаты диссертационной работы могут быть использованы в научно-исследовательской деятельности учреждений, специализирующихся в области теоретической физики, таких как ГНУ «Институт физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси», Объединённый институт ядерных исследований, Белорусский государственный университет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова и другие. Методы и подходы, разработанные в диссертации, внедрены и применяются в учебном процессе в рамках семинаров по курсу «Функции Грина в квантовой физике» для магистрантов (копии актов внедрения содержатся в приложении Г к диссертации).

Список публикаций соискателя ученой степени

Статьи

1. Павленко, А. В. Точные решения двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе с некоторыми аналогами потенциала гармонического осциллятора в импульсном представлении / А. В. Павленко, Ю. А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 43–45.
2. Павленко, А. В. Точные решения двумерного квазипотенциального уравнения с релятивистскими аналогами потенциала гармонического осциллятора / А. В. Павленко, Ю. А. Гришечкин, В. Н. Капшай // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2024. – Т. 67, № 5. – С. 27–34.
3. Капшай, В. Н. Численное решение двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе для потенциала Гаусса, заданного в релятивистском конфигурационном представлении / В. Н. Капшай, А. В. Павленко, Ю. А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 56–61.
4. Павленко, А. В. Точные решения двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе с потенциалом «дельта-окружность» для состояний рассеяния / А. В. Павленко, В. Н. Капшай, Ю. А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 67–72.
5. Капшай, В. Н. Двумерное двухчастичное квазипотенциальное уравнение в релятивистском конфигурационном представлении / В. Н. Капшай, А. В. Павленко, Ю. А. Гришечкин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2025. – Т. 68, № 9. – С. 29–42.
6. Павленко, А. В. Точные решения двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе для потенциалов «дельта-окружность», заданных в релятивистском конфигурационном представлении / А. В. Павленко, В. Н. Капшай, Ю. А. Гришечкин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2025. – Т. 68, № 10. – С. 111–119.
7. Павленко, А. В. Точные решения двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе с суперпозицией потенциалов «дельта-окружность», заданных в координатном представлении / А. В. Павленко, В. Н. Капшай, Ю. А. Гришечкин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2025. – Т. 68, № 10. – С. 120–132.

Материалы конференций

8. Paulenko, A. V. Numerical solution of the two-dimensional Logunov–Tavkhelidze equation with the sum of two separable potentials in the momentum representation / A. V. Paulenko, Yu. A. Grishechkin // Inter-Academia 2021: the 19th International Conference on Global Research and Education, Gomel, Belarus, 20–22 October, 2021 / S. A. Khakhomov, I. V. Semchenko, O. M. Demidenko, [et al.] ; F. Skorina Gomel State University. – Gomel, 2021. – P. 174–177.

9. Павленко, А. В. Решение уравнения Логунова–Тавхелидзе с сепарабельным потенциалом в двумерном случае / А. В. Павленко, Ю. А. Гришечкин // Актуальные вопросы физики и техники : X Республиканская научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов (Гомель, 22 апреля 2021 г.) : сб. м-лов : в 2 ч. / М-во образования Республики Беларусь, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол.: Д. Л. Коваленко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2021. – Ч. 1. – С. 316–318.

10. Павленко, А. В. Точное решение модифицированного уравнения Логунова–Тавхелидзе в импульсном представлении для потенциала двумерного гармонического осциллятора / А. В. Павленко, Ю. А. Гришечкин // Научная конференция, посвященная 110-летию со дня рождения Ф. И. Федорова, Гомель, 25 июня 2021 года : сб. м-лов / редкол.: С. А. Хахомов (гл. ред.) [и др.] ; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины [и др.]. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2021. – С. 255–259.

11. Павленко, А. В. Точное решение двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе с релятивистским обобщением потенциала гармонического осциллятора в импульсном представлении / А. В. Павленко, В. Н. Капшай // Актуальные вопросы физики и техники : XII Республиканская научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов, Гомель, 20 апреля 2023 г. : сб. м-лов. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2023. – С. 238–241.

12. Павленко, А. В. Парциальные волны в двумерном релятивистском конфигурационном представлении / А. В. Павленко, В. Н. Капшай // Актуальные вопросы физики и техники : XIII Республиканская научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов, Гомель, 25 апреля 2024 г. : сб. м-лов / редкол.: А. Л. Самофалов (гл. ред.) [и др.] ; М-во образования Республики Беларусь, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2024. – С. 100–102.

13. Павленко, А. В. Точное решение двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе с релятивистским аналогом потенциала гармонического осциллятора / А. В. Павленко, В. Н. Капшай // Актуальные вопросы физики и техники : XIII Республиканская научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов, посв. 80-летию со дня рождения проф. А. Н. Сердюкова и С. С. Гиргеля, Гомель, 25 апреля 2024 г. : сб. м-лов / редкол.: А. Л. Самофалов (гл. ред.) [и др.] ; М-во образования Республики Беларусь, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2024. – С. 102–104.

14. Павленко, А. В. Решения двумерного квазипотенциального уравнения в случае релятивистского аналога потенциала «дельта-окружность» / А. В. Павленко, Ю. А. Гришечкин, В. Н. Капшай // Проблемы взаимодействия излучения с веществом : VI Междунар. науч. конф., посвящ. акад. Б. В. Бокутю, Гомель, 14 нояб. 2024 г. : сб. м-лов : [науч. эл. изд.] / редкол.: С. А. Хахомов (гл. ред.) [и др.] ; М-во образования Республики Беларусь, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Отд-ние физ., мат., информ. НАН Беларуси [и др.]. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2025. – С. 138–142. – 1 CD-ROM.

15. Павленко, А. В. Волновые функции двумерного гармонического осциллятора в релятивистском конфигурационном представлении /

А. В. Павленко, В. Н. Капшай, Ю. А. Гришечкин // Проблемы взаимодействия излучения с веществом : VI Междунар. науч. конф., посвящ. акад. Б. В. Бокутю, Гомель, 14 нояб. 2024 г. : сб. м-лов : [науч. эл. изд.] / редкол.: С. А. Хахомов (гл. ред.) [и др.] ; М-во образования Республики Беларусь, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Отд-ние физ., мат., информ. НАН Беларуси [и др.]. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2025. – С. 142–146. – 1 CD-ROM.

РЭЗЮМЭ

Паўленка Андрэй Васільевіч

Двухмерныя двухчасцічныя парцыяльныя інтэгральныя ўраўненні і хвалевыя функцыі ў квазіпатэнцыяльным падыходзе Лягунова–Таўхелідзэ

Ключавыя словы: двухмерныя рэлятывісцкія двухчасцічныя сістэмы, квазіпатэнцыяльны падыход, двухмерная імпульсная прастора, двухмерная рэлятывісцкая канфігурацыйная прастора (РКП), парцыяльныя функцыі Грына, звязаныя станы, станы рассейвання.

Мэта працы – апісанне звязаных станаў і станаў рассейвання двухмерных рэлятывісцкіх сістэм двух скалярных часціц аднолькавай масы ў рамках квазіпатэнцыяльнага падыходу Лагунова –Таўхелідзэ.

Метады даследавання: лікавыя і аналітычныя метады рашэння інтэгральных ураўненняў, метады лікавага і аналітычнага інтэгравання.

Атрыманыя вынікі і іх навізна – у дысертрацыі ўпершыню:

– сфармуляваны двухмерныя парцыяльныя інтэгральныя квазіпатэнцыяльныя ўраўненні ў РКП, якія апісваюць звязаныя станы і станы рассейвання сістэм двух скалярных часціц аднолькавай масы;

– вызначаны відавочны выгляд парцыяльных функцый Грына двухмернага квазіпатэнцыяльнага ўраўнення Логунова–Таўхелідзэ пры адвольным значэнні азімутальнага квантавага ліку, вызначаны іх асімптатычныя паводзіны і нерэлятывісцкі гранічны пераход для рэлятывісцкіх парцыяльных хваль і парцыяльных функцый Грына;

– атрыманы дакладныя рашэнні двухмернага ўраўнення Лагунова – Таўхелідзэ для звязаных станаў сістэмы двух скалярных часціц аднолькавай масы з улікам чатырох рэлятывісцкіх аналагаў патэнцыялу гарманічнага асцылятара;

– атрыманы дакладныя рашэнні рэлятывісцкіх парцыяльных ураўненняў – як у РКП, так і ў імпульсным прадстаўленні – з выкарыстаннем аператараў узаемадзеяння тыпу “дэльта-акружнасць” і іх суперпазіцый;

– атрыманы лікавыя рашэнні двухмерных парцыяльных інтэгральных квазіпатэнцыяльных ураўненняў для звязаных станаў з улікам квазіпатэнцыялу Гаўса, які зададзены ў РКП;

– з выкарыстаннем мадэльных квазіпатэнцыялаў тыпу «дэльта-акружнасць» і іх суперпазіцый атрыманы дакладныя аналітычныя выразы для двухмерных парцыяльных амплітуд і сячэнняў рассейвання.

Рэкамендацыі па выкарыстанні і вобласць прымянення. Распрацаваны фармалізм тэорыі рассейвання і звязаных станаў ў двухмерным рэлятывісцкім канфігурацыйным прадстаўленні можа быць ужыты для аналізу працэсаў сутыкненняў у рэлятывісцкіх нізкаразмерных сістэмах, якія ўяўляюць цікавасць у фізіцы кандэнсаваных станаў і квантавай тэорыі поля.

РЕЗЮМЕ

Павленко Андрей Васильевич

Двумерные двухчастичные парциальные интегральные уравнения и волновые функции в квазипотенциальном подходе Логунова–Тавхелидзе

Ключевые слова: двумерные релятивистские двухчастичные системы, квазипотенциальный подход, двумерное импульсное представление, двумерное релятивистское конфигурационное представление (РКП), парциальные функции Грина, связанные состояния, состояния рассеяния.

Цель работы – описание связанных состояний и состояний рассеяния двумерных релятивистских систем двух скалярных частиц одинаковой массы в рамках квазипотенциального подхода Логунова–Тавхелидзе.

Методы исследования: численные и аналитические методы решения интегральных уравнений, методы численного и аналитического интегрирования.

Полученные результаты и их новизна **–** в диссертации впервые:

– сформулированы двумерные парциальные интегральные квазипотенциальные уравнения в РКП, описывающие связанные состояния и состояния рассеяния систем двух скалярных частиц одинаковой массы;

– определён явный вид парциальных функций Грина двумерного квазипотенциального уравнения Логунова–Тавхелидзе при произвольном значении азимутального квантового числа, определено их асимптотическое поведение и нерелятивистский предел релятивистских парциальных волн и парциальных функций Грина;

– получены точные решения двумерного уравнения Логунова–Тавхелидзе для связанных состояний системы двух скалярных частиц одинаковой массы с учетом четырех релятивистских аналогов потенциала гармонического осциллятора;

– получены точные решения релятивистских парциальных уравнений – как в РКП, так и в импульсном представлении – с использованием операторов взаимодействия типа «дельта-окружность» и их суперпозиций;

– получены численные решения двумерных парциальных интегральных квазипотенциальных уравнений для связанных состояний с учетом квазипотенциала Гаусса, заданного в РКП;

– с применением модельных квазипотенциалов типа «дельта-окружность» и их суперпозиций получены точные аналитические выражения двумерных парциальных амплитуд и сечений рассеяния.

Рекомендации по использованию и область применения. Разработанный формализм теории рассеяния и связанных состояний в двумерном релятивистском конфигурационном представлении может быть применен для анализа процессов столкновений в релятивистских низкоразмерных системах, представляющих интерес в физике конденсированных состояний и квантовой теории поля.

SUMMARY

Paulenka Andrei Vasilyevich

Two-dimensional two-particle partial integral equations and wave functions in the Logunov–Tavkhelidze quasipotential approach

Keywords: two-dimensional relativistic two-particle systems, quasipotential approach, two-dimensional momentum representation, two-dimensional relativistic configurational representation (RCR), partial Green's functions, bound states, scattering states.

The objective of the work is the description of bound states and scattering states of two-dimensional relativistic systems of two scalar particles of equal mass within the framework of the Logunov–Tavkhelidze quasipotential approach.

Research methods: numerical and analytical methods for solving of the integral equations, methods of numerical and analytical integration.

Obtained results and their novelty:

– for the first time, two-dimensional partial integral quasipotential equations in the RCR are formulated, describing bound states and scattering states of systems of two scalar particles of equal masses;

– for the first time, the explicit form of the partial Green's functions of the two-dimensional Logunov–Tavkhelidze quasipotential equation for an arbitrary value of the azimuthal quantum number is determined; their asymptotic behavior and the non-relativistic limit of the relativistic partial waves and partial Green's functions are defined;

– for the first time, exact solutions of the two-dimensional Logunov–Tavkhelidze equation for bound states of a system of two scalar particles of equal masses are obtained, considering four relativistic analogs of the harmonic oscillator potential;

– for the first time, exact solutions of the relativistic partial equations – both in the RCR and in the momentum representation – are obtained using interaction operators of the "delta-circle" type and their superpositions;

– for the first time, numerical solutions of the two-dimensional partial integral quasipotential equations are obtained for the case of bound states for a Gaussian quasipotential defined in the RCR;

– for the first time, using model quasipotentials of the "delta-circle" type and their superpositions, exact analytical expressions for two-dimensional partial amplitudes and scattering cross-sections are obtained.

Recommendations for use and field of application. The developed formalism of scattering theory and bound states in the two-dimensional relativistic configuration representation can be applied to the analysis of collision processes in relativistic low-dimensional systems, which are of interest in condensed matter physics and quantum field theory.

Научное издание

ПАВЛЕНКО Андрей Васильевич

ДВУМЕРНЫЕ ДВУХЧАСТИЧНЫЕ ПАРЦИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ ЛОГУНОВА–ТАВХЕЛИДЗЕ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.04.02 – теоретическая физика

Подписано в печать 18.03.2026. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,40.
Уч.-изд. л. 1,53. Тираж 60 экз. Заказ 136.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.