

ОТЗЫВ НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА  
на диссертацию Мурашко Вячеслава Игоревича  
«Характеристические подгруппы радикального, корадикального и  
гиперцентрального типов в теории классов конечных групп»,  
представленную на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук по специальности  
01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация Вячеслава Игоревича Мурашко посвящена развитию структурной и вычислительной теории конечных непростых групп и их классов. В основе современной теории групп находятся понятия простой (неабелевой) и разрешимой групп, возникшие в работах математиков первой половины девятнадцатого века. Во второй половине двадцатого века параллельно огромным усилиям по достижению классификации конечных простых групп вышло большое количество работ, в которых была создана красивая и всеобъемлющая теория конечных разрешимых групп и их классов (формаций, классов Фиттинга, классов Шунка и др.). В 1980 г., когда классификация простых групп была почти завершена, Г. Виландт [Wielandt, H. *Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute //The Santa Cruz Conference on finite groups. – Proc. Symp. Pure Math. – 1980. – № 37*] в своей знаменитой программе дальнейшего развития теории конечных групп предложил следующей приоритетной целью после классификации сделать распространение результатов теории конечных разрешимых групп и их классов на массив всех конечных групп, в частности, составных групп, т.е. групп в композиционном ряду которых есть одновременно абелевы и неабелевы факторы. Г. Виландт в своей программе отметил, что «в рамках систематического развития теории составных групп представляется ещё более важным найти и исследовать те подгруппы, которые имеют ключевое значение. В качестве ориентира может служить теория разрешимых групп».

Одними из важных видов таких подгрупп являются характеристические подгруппы, связанные с теорией классов групп (радикалы, выделяемые в группах классами Фиттинга, формационные корадикалы и гиперцентры), которые играют важную роль во многих задачах теории групп.

Понятие радикала возникло в теории ассоциативных колец, где оно послужило основой получения фундаментальных структурных результатов. В дальнейшем радикалы стали активно использоваться при изучении других типов колец и линейных алгебр. В 1960-х годах прошлого века теория характеристических подгрупп радикального и корадикального типов начала активно развиваться в теории групп. В 1962 г. в статье [Курош, А.Г. *Радикалы в теории групп // Сиб. матем. журн. – 1962. – Т. 3, № 6*] была поставлена задача развития теории радикалов в смысле Куроша-Амицура для конечных групп. Примером такого радикала является наибольшая нормальная разрешимая подгруппа конечной группы. Одновременно с радикалами в теории групп стали рассматриваться корадикалы, как теоретико-групповые функции, согласованные

с гомоморфизмами групп, а также функториалы (функционалы), как функции, выделяющие в группах характеристические подгруппы, обладающие специальными свойствами. После выхода фундаментальных работ Р. Бэра [Baer, R. Group theoretical properties and functions // Colloq. Math. – 1966. – Vol. 14] и Б.И. Плоткина [Плоткин, Б.И. Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы / Б.И. Плоткин // Избранные вопросы алгебры и логики: сб., посв. памяти А.И. Мальцева / Под ред. А.И. Ширшова (гл.ред.). – Новосибирск: Наука, 1973] теоретико-групповые функции (функториалы) стали изучаться самостоятельно. Сформировался функциональный подход изучения характеристических подгрупп. Важной особенностью функториалов является их тесная связь с классами групп, в теории конечных групп – с формациями, классами Фиттинга. Это позволило наряду с функциональными методами характеристические подгруппы радикального и корадикального типов исследовать методами теории классов.

Понятие гиперцентра естественным образом возникло в связи с определением нильпотентной группы через центральные ряды. Отметим, что многие естественно возникающие классы (формации) групп определяются через действие группы на факторах её главного ряда. Р. Бэр впервые ввел и изучил свойства аналога гиперцентра для класса всех сверхразрешимых групп. Б. Хупперта ввел понятие  $\mathfrak{F}$ -гиперцентра группы для локальной формации  $\mathfrak{F}$ . Л.А. Шеметков распространил понятие  $\mathfrak{F}$ -гиперцентра на случай ступенчатой формации  $\mathfrak{F}$ . Возникло направление изучения характеристических подгрупп гиперцентрального типа.

В связи с развитием теории классов конечных групп сформировались и закрепились понятия  $\mathfrak{F}$ -корадикала,  $\mathfrak{F}$ -радикала,  $\mathfrak{F}$ -гиперцентра. Важную роль в этом сыграла монография [Шеметков, Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978]. В 1989 г. в монографии [Шеметков, Л.А., Скиба, А.Н. Формации алгебраических систем. – Москва: Наука, 1989] отмеченные выше понятия были распространены на произвольные алгебраические системы.

Все три указанные типа подгрупп рассматривались Р. Бэром в его отмеченной выше работе о взаимной связи теоретико-групповых функций (функториалов) с сопоставленными им классами групп. Он отмечал, что метод функций (функториалов) следует развивать во взаимной связи с методом сопоставленных им классов групп и для решения конкретной задачи выбрать лучший из них.

В последние тридцать лет интерес к изучению данных характеристических подгрупп и их влияния на строение составных групп в различных конкретных аспектах значительно усилился и нашел отражение в монографиях: [Ballester-Bolinches, A., Esquero, L.M. Classes of Finite Groups. – Dordrecht: Springer, 2006; Ballester-Bolinches, A., Esteban-Romero, R., Asaad, M. Products of Finite Groups. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2010; Guo, W. The Theory of Classes of Groups. – Dordrecht / Bocton / London: Kluwer Academic Publishers, 2000; Guo, W. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups. – Berlin – Heidelberg: Springer-

Verlag, 2015; Каморников, С.Ф., Селькин, М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. – Минск: Беларуская навука, 2003] и др.

Во второй половине XX века в связи с развитием компьютерных наук прикладная роль теории групп существенно возросла, что привело к новым ее приложениям: в криптографии, в теориях кодирования, автоматов и формальных языков, машинном обучении, статистической механике, связанной с решениями уравнений Янга-Бакстера, биоинформатике и других областях. Данная тенденция привела к активному развитию алгоритмической (вычислительной) теории групп, связывающей теорию с приложениями.

Основы алгоритмической (вычислительной) теории групп изложены в монографиях [Seress, A. *Permutation Group Algorithms*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003; Holt, D.F., Eic, B., O'Brien, E.A. *Handbook of Computational Group Theory*. – New York: Chapman and Hall/CRC, 2005]. Практически неразработанной является вычислительная теория классов групп. Имеется две статьи Б. Хёфлинга 2001 г. и Б. Айк и Ч. Райта 2002 г., в которых предложены алгоритмы вычисления  $\mathfrak{F}$ -радикала,  $\mathfrak{F}$ -корадикала для локальной формации  $\mathfrak{F}$  разрешимых групп. Возникает проблема разработки алгоритмической теории классов (не обязательно разрешимых) групп и связанных с ними характеристических подгрупп.

Проведенный анализ имеющихся результатов показывает, что до последнего времени структурная и вычислительная теории характеристических подгрупп, возникающих в теории классов конечных групп в контексте программы Виландта и приложений, являлись недостаточно разработанными, о чем также свидетельствует накопившийся запас нерешенных проблем и задач, связанных с данными подгруппами и поставленных в разные годы различными авторами. На устранение возникших теоретических, алгоритмических и прикладных дефицитов в изучении отмеченных выше характеристических подгрупп и направлена диссертация В.И. Мурашко.

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы и трех приложений. Во введении указаны основные направления исследований данной диссертации, обоснована их актуальность, теоретическая и практическая значимость.

Первая глава является базовой, в ней на основе проведенного анализа литературы описываются основные объекты исследования, формулируются конкретные задачи и проблемы.

Вторая глава посвящена изложению разработанной в диссертации оригинальной теории арифметических графов и их приложений. Полученные результаты и методы были им применены для решения задачи Ф.Ж. Руссо (2012 г.) о компонентах связности силовского графа и графа Грюнберга – Кегеля группы, задачи Т. Хоукса (1971г.) о пересечении радикала фиттингова типа с S-ключевой максимальной подгруппой, а также нашли приложения для решения ряда задач в следующих главах.

В третьей главе изучаются характеристические подгруппы гиперцентрального типа и определяемые с их помощью центрально насыщенные

(кратко,  $Z$ -насыщенные) формации, т.е. формации  $\mathfrak{F}$  групп, совпадающих со своим  $\mathfrak{F}$ -гиперцентром. На такие формации впервые обратил внимание Л.А. Шеметков в работе [Shemetkov, L.A. Frattini extensions of finite groups and formations // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 23, № 3]. Там же он поставил проблему (Question 4.1.) описания  $Z$ -насыщенных формаций. В работе [Ballester-Bolinches, A., Perez-Ramos, M.D. On a question of L.A. Shemetkov // Comm. Algebra. – 1999. – Vol. 27, № 11] были установлены необходимые и достаточные условия насыщенности  $Z$ -насыщенных разрешимых формаций и был поставлен вопрос нахождения аналогичного критерия для  $Z$ -насыщенных формаций произвольных групп. В диссертации в качестве ответа на вопрос А. Баллестера-Болиншеса и М.Д. Перес-Рамос найдены условия насыщенности и разрешимой насыщенности центрально насыщенной формации в классе всех групп. Как следствие, получен критерий разрешимой насыщенности наследственных  $Z$ -насыщенных формаций. Также показано, что семейство  $Z$ -насыщенных формаций образует полную дистрибутивную решетку атомами, которой являются формации всех  $p$ -групп, ( $p$  – простое число и формации, порождённые простой неабелевой группой).

Четвертая глава посвящена развитию функториального метода Бэра – Плоткина изучения характеристических подгрупп радикального типа. Описаны решётка функториалов фиттингова типа и методы их построения. Используя функториальный метод Бэра – Плоткина, введена функториальная длина группы. Установлена связь между определяемыми радикалом Плоткина длинами группы и её максимальной подгруппы. В частности, получена связь между введёнными Е.И. Хухро и П. Шумяцким обобщёнными высотами Фиттинга (не  $p$ -разрешимыми длинами) группы и её максимальной подгруппы. Получены оценки обобщённой высоты Фиттинга и не  $p$ -разрешимой длины взаимно перестановочного произведения двух подгрупп в зависимости от их соответствующих длин. Дано отрицательное решение задачи Я. Ли и С. Ли 2012 г. о сверхразрешимости группы, описаны группы, для которых задача имеет положительное решение.

Пятая глава посвящена разработке методов исследования формаций групп с заданными корадикально определяемыми цепями подгрупп. Предложена конструкция классов групп с заданными системами формационно субнормальных канонических подгрупп, включающая как частный случай предложенную А.Ф. Васильевым и Т.И. Васильевой конструкцию класса  $w\mathfrak{F}$ . Найдены условия, при которых данные классы являются (насыщенными, разрешимо насыщенными) формациями. Описан локальный экран таких формаций при их локальности. Получено конструктивное описание насыщенных регулярных формаций разрешимых групп, введённых А. Луккини и Б. Немми, и установлен решёточный изоморфизм между решёткой данных формаций и решёткой Стейница. Найдена характеристика  $\sigma$ -нильпотентного гиперцентра в терминах формационно субнормальных подгрупп. Установлена характеристика класса всех  $\sigma$ -нильпотентных групп в терминах вложения силовских подгрупп.

В заключительной шестой главе «Алгоритмическая теория классов групп» получены полиномиальные алгоритмы вычисления  $\mathfrak{F}$ -корадикала и  $\mathfrak{F}$ -гиперцентра групп перестановок для широкого семейства формаций  $\mathfrak{F}$ , включающего  $Z$ -насыщенные; предложены алгоритмы проверки подгруппы на  $\mathfrak{F}$ -субнормальность и  $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальность. Для композиционной формации  $\mathfrak{F}$  найдены полиномиальные алгоритмы вычисления  $\mathfrak{F}$ -радикала и связанных с ним длин групп перестановок, тем самым решена задача Б. Хёффлинга 2001 г. Предложены алгоритмы вычисления  $\sigma$ -свойств группы. Получены отрицательные ответы на задачи М. Сюй и Ц. Чжан 2005 г. В приложении В приведены разработанные диссертантом 17 полиномиальных алгоритмов для решения задач диссертации.

Основные результаты диссертации В.И. Мурашко получены в рамках выполнения им следующих государственных программ и проектов: «Конечные группы нильпотентного и сверхразрешимого типов, их нечеткие аналоги и приложения» (2016-2020, тема входила в ГПНИ «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем»); «Классы конечных групп, их арифметические графы, эффективное распознавание» (2021-2025, тема входит в ГПНИ «Конвергенция-2025. «Строение конечных и периодических групп: фундаментальный и вычислительный аспекты» (БРФФИ-РНФ, 2022-2025); «Актуальные вопросы теории конечных и периодических групп» (БРФФИ-РФФИ, №Ф20Р-291, 2020-2022); «Групповые кольца и графы групп» (БРФФИ-РФФИ, №Ф17РМ-063, 2017-2019). Диссертант являлся ответственным исполнителем проектов Министерства образования РБ для докторантов, аспирантов, студентов: «Вычислительные аспекты теории формаций конечных групп» (2020); «Обобщенно субнормальные подгруппы конечных групп: теоретические и вычислительные аспекты» (грант Министерства образования для докторантов, аспирантов, студентов, 2024).

В настоящее время он является научным руководителем Белорусско-Российского молодежного проекта «Группы с условиями конечности: фундаментальные проблемы и приложения в компьютерной алгебре» (БРФФИ-РНФ М, №Ф23РНФМ-63, 2023-2026).

Полный список публикаций В.И. Мурашко по теме его докторской диссертации включает: 39 (28 без соавторов) статей в рецензируемых научных журналах, соответствующих пункту 19 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь, 19 препринтов в arXiv.org, 18 материалов и 24 тезиса докладов на международных и республиканских конференциях. Данный список имеет пустое пересечение со списком публикаций его кандидатской диссертации. Мировой уровень его результатов подчеркивает тот факт, что 32 (23 без соавторов) из опубликованных статей входят в наукометрические базы данных Scopus и/или Web of Science и опубликованы в таких известных журналах, как Siberian Mathematical Journal (5), Mathematical Notes (4), Asian-European Journal of Mathematics (3), Ricerche di Matematica (3), Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN (3), Acta Mathematica Hungarica (2), Journal of Group Theory (2), Advances in Group Theory

and Applications (1), Publicationes Mathematicae Debrecen (1), Archiv der Mathematik (1), Algebra and Logic (1), Journal of Symbolic Computation (1), Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series (1), Journal of the Belarusian State University Mathematics and Informatics (1), Communications in Algebra (1), Journal of Algebra and Its Applications (1), Siberian Electronic Mathematical Reports (1).

Основные результаты диссертации широко апробированы, они неоднократно докладывались В.И. Мурашко на Гомельском алгебраическом семинаре кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, представлялись им на пленарных докладах следующих конференций: Международная алгебраическая конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения А.И. Старостина (Екатеринбург, 2021); XIV Международная школа-конференция по теории групп, посвящённая памяти В.А. Белоногова, В.А. Ведерникова, Л.А. Шеметкова (Брянск, 2022); Международная конференции «Алгебра и динамические системы», посвящённая 70-летию А.А. Махнева (Нальчик, 2022); XV Международная школа-конференция по теории групп, посвящённая 95-летию со дня рождения М.И. Каргаполова (Екатеринбург, 2024); Международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике» (Брест, 2024 и 2025); XXIV Международная конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения академика Ю.В. Линника и 110-летию со дня рождения профессора А.Б. Шидловского и 80-летию со дня рождения профессора Г.И. Архипова (Тула, 2025); V Конференция математических центров России (Красноярск, 2025), а также в секционных выступлениях на международных научных конференциях «Белорусская математическая конференция» (Минск, 2021, 2024), «Теория групп и её приложения» (Екатеринбург, 2020); «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025).

Вячеслав Игоревич Мурашко начал свои научные исследования по теории групп и их классов под моим руководством, будучи школьником в 2011 г. в рамках сложившейся к тому времени и активно развиваемой в Республике Беларусь по настоящее время системы работы с одарёнными учащимися. Его активность, упорство, целеустремлённость и несомненные математические способности позволили ему быстро войти в теорию групп, выполнить первые научные исследования о связи сопряженно-перестановочных подгрупп с подгруппой Фиттинга и ее обобщениями. завоевать различные награды на международных научных конкурсах учащихся: VIII Балтийский научно-инженерный конкурс, г. Санкт-Петербург, 2012 г., II диплом; Международная конференция юных учёных ICYS, Нейменген, Нидерланды, 2012 г., I диплом; INTEL ISEF, г. Питтсбург, США, 2012 г., III премия Американского математического общества и подготовить, и опубликовать первую научную статью ещё в 11 классе.

Став в 2012 г. студентом факультета математики и технологий программирования ГГУ им. Франциска Скорины, он продолжил активные

исследования, которые вылились в публикации в известных республиканских и международных журналах («Доклады НАН Беларуси», «Сибирский математический журнал», «Проблемы физики, математики и техники» и др.).

В студенческий период четырехкратный лауреат специального фонда Президента Республики Беларусь В.И. Мурашко становится трехкратным лауреатом Республиканского конкурса студенческих исследовательских работ, золотым и бронзовым призером Международной студенческой олимпиады по математике ИМС-2016 и ИМС-2014, обладателем Благодарности Президента за выдающиеся академические достижения, высокие результаты в научной и общественной деятельности.

Набранный им высокий темп научных исследований позволил ему досрочно подготовить и защитить кандидатскую диссертацию. Его диссертация «Формационно гиперцентральные подгруппы конечных групп» была признана лучшей в номинации «Естественные науки» ВАК Республики Беларусь в 2021 г. Поступив в ноябре 2022 г. в докторантуру, В.И. Мурашко, имея существенный научный задел, продолжил настойчиво и целеустремленно проводить исследования в актуальных направлениях современной теории конечных групп и их классов, связанных с заявленной темой докторской диссертации.

Кроме научно-исследовательской работы доцент кафедры алгебры и геометрии, кандидат физ.-мат. наук, доцент В.И. Мурашко активно занимается научно-организаторской работой. С 2020 г. он является председателем Совета молодых ученых ГГУ им. Франциска Скорины и научным руководителем СНИЛ «Алгебра и геометрия сложных систем». Для более активного внедрения научных результатов в практику и развития математических методов искусственного интеллекта он выступил одним из инициаторов и организаторов межкафедральной научно-исследовательской лаборатории «Математика гибридных интеллектуальных систем», созданной в апреле 2025 г. на факультете математики и технологий программирования. В.И. Мурашко является руководителем филиала кафедры алгебры и геометрии в ГУО «Гимназии №71 г. Гомеля». Имеет высшую квалификационную категорию в должности «Учитель». Являлся руководителем команд школьников, получавших дипломы на Международных турнирах юных математиков (ИТЮМ2017, ИТЮМ2018, ИТЮМ2019). Ученики В.И. Мурашко завоевывали высокие награды на Международной конференции юных учёных (Я. Сандрыгайло ICYS2018 – бронза; А. Печенкин ICYS2019 и О. Вериго ICYS2025 – золото), на EU Contest for Young Scientists (А. Печенкин EUCYS2019 – бронза), Международной Математической олимпиаде (П. Вериго IMO2019 – бронза).

Выводы. Оказывая научное руководство в течение последних 15 лет научно-образовательной деятельностью В.И. Мурашко в рамках разрабатываемой в Республике Беларусь инновационной бесшовной модели «школьник-студент-магистрант-аспирант-докторант» подготовки кадров научно-технологического прорыва, могу уверенно констатировать, что он вырос в высокопрофессионального специалиста в области алгебры и ее приложений, который может самостоятельно ставить и формулировать задачи исследования,

выбирать и создавать необходимые методы их решения, настойчиво их реализовывать и правильно интерпретировать. Публикации по результатам своих исследований он готовит самостоятельно, на высоком уровне, публикует в основном в известных международных журналах, индексируемых в базах Scopus и/или WOS.

Таким образом, считаю, что Вячеслав Игоревич Мурашко заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук за крупный научный вклад в разработку теории и методов характеристических подгрупп радикального, корадикального и гиперцентрального типов конечных групп и их вычислений, включающий следующее.

1) Теория и методы арифметических графов групп и их классов, позволившие решить задачи Ф.Ж. Руссо 2012 г. о связи силовского графа и графа Грюнберга – Кегеля группы, Т. Хоукса 1971 г. о пересечении радикала фиттингова типа с ключевой максимальной подгруппой.

2) Теоремы о характеристических подгруппах гиперцентрального типа, позволившие решить проблемы Л.А. Шеметкова 1995 г. о равенстве подгрупп гиперцентрального типа и 1997 г. об описании семейства формаций групп, совпадающих со своим формационным гиперцентром, включая задачу А. Баллестера-Болинше и М.Д. Перец-Рамос 1999 г.

3) Новые результаты о характеристических подгруппах радикального типа: конструктивное описание функториалов фиттингова типа и их приложения, решение задачи Я. Ли и С. Ли 2012 г. о сверхразрешимости группы, оценки длин Хухро – Шумяцкого максимальной подгруппы и взаимно перестановочного произведения подгрупп конечной группы.

4) Конструкции формаций, заданные корадикально определяемыми цепями подгрупп, позволившие получить конструктивное описание наследственных регулярных разрешимых формаций Луккини – Немми, а также характеристики  $\sigma$ -нильпотентного гиперцентра и формации  $\sigma$ -нильпотентных групп.

5) Полиномиальные алгоритмы распознавания классов конечных групп и вычисления, связанных с ними характеристических подгрупп:  $\mathfrak{F}$ -радикала,  $\mathfrak{F}$ -корадикала,  $\mathfrak{F}$ -гиперцентра, а также  $\sigma$ -свойств группы.

Научный консультант,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой алгебры  
и геометрии УО «Гомельский государственный  
университет им. Ф. Скорины»

А.Ф. Васильев

