Отзыв официального оппонента
о диссертации Мурашко Вячеслава Игоревича
«Характеристические подгруппы радикального, корадикального и гиперцентрального типов в теории классов конечных групп»,
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Соответствие диссертации специальностям и отрасли науки, по которым она представлена к защите

Рассматриваемая диссертация посвящена исследованию ряда проблем о характеристических подгруппах, естественно возникающих в теории классов конечных групп и полностью соответствует специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Актуальность темы диссертации

Различные направления современной теории конечных групп (теория представлений, теория классов групп и другие) находят приложения во многих науках. Классические приложения теории конечных групп и их представлений в физике и химии изложены в монографии Н.А. Поклонского, А.Т. Власова, С.А. Вырко (2024). Известны применения конечных групп при изучении генетического кода (F. Antoneli, M. Forger, Math. Comput. Model, 2011). Теория классов конечных групп применяется при распознавании формальных языков (A. Ballester-Bolinches, J.-É. Pin, X. Soler-Escrivà, Forum. Math., 2015) и для исследования решений уравнения Янга-Бакстера (A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, P. Jiménez-Seral, V. Pérez-Calabuig, IJGT, 2023). Следует отметить, что приведенные и другие работы по приложениям теории групп показывают потребность развития теории конечных групп. Применяемые в приложениях группы могут иметь нетривиальное строение с точки зрения теории групп и число элементов, полный перебор которых не доступен современным компьютерам. Поэтому возникает потребность разработки методов быстрой обработки таких групп.

Одной из основополагающих идей в теории конечных групп является изучение нормального строения таких групп. Под нормальным строением групп, следуя Х. Виландту, понимаются свойства группы, связанные с рассмотрением ее нормальных подгрупп и факторгрупп, или в более общем случае, имеющие отношение к нормальным рядам. При изучении таких свойств естественным образом возникают характеристические подгруппы — $Z(G)$, $F(G)$, $O_p(G)$, $O_{p',p}(G)$ и другие. В теории классов групп каждая формация $\mathfrak{F}$ определяет $\mathfrak{F}$-корадикал и $\mathfrak{F}$-гиперцентр, а каждый класс Фиттинга — $\mathfrak{F}$-радикал в любой группе. Эти подгруппы изучались и применялись в монографиях Хупперта (1967), Л.А. Шеметкова (1978), Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы (1989), Дерка и Хоукса (1992), Скибы (1997), Го Вэнбиня (2000 и 2015), С.Ф. Каморникова и М.В. Селькина (2003), Баллестера-Болинше и Эсквейро (2006), Н.Н. Воробьева (2012) и А.А. Трофимука (2019). Содержание приведенных монографий показывает, что различные характеристические подгруппы играют важную роль в исследованиях нормального строения конечных групп. Заметим, что имеется ряд нерешенных задач и проблем, связанных с такими подгруппами. Поэтому тема диссертации Мурашко В.И. «Характеристические подгруппы радикального, корадикального и гиперцентрального типов в теории классов конечных групп» является актуальной.

Актуальность темы диссертации подтверждается еще и тем, что ее результаты были получены Мурашко В.И. при выполнении им государственных программ научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020» (НИР «Конечные группы нильпотентного и сверхразрешимого типов, их нечеткие аналоги и приложения», 2016-2020) и «Конвергенция-2025» (НИР «Классы конечных групп, их арифметические графы, эффективное распознавание», 2021-2025), а также грантов БРФФИ «Групповые кольца и графы групп» (2017-2019), «Актуальные вопросы теории конечных и периодических групп» (2020-2022), «Строение конечных и периодических групп: фундаментальный и вычислительный аспекты» (2022-2025) и «Группы с условиями конечности: фундаментальные проблемы и приложения в компьютерной алгебре» (2023-2026).

Степень новизны результатов диссертации и научных положений, выносимых на защиту

Во **введении** диссертации приведен очерк основных этапов развития научных результатов по характеристическим подгруппам радикального, корадикального и гиперцентрального типов и классам групп. На основе анализа работ известных математиков был выявлен круг проблем, представляющих интерес. *Далее под группой будем понимать конечную группу.*

В **первой главе** произведен подробный обзор известных результатов, связанных с темой диссертации.

Во **второй главе** диссертации рассмотрены графы групп, вершинами которых являются делители порядка группы. Например, таким графом является граф степеней характеров, активно изучаемый в теории представлений конечных групп. В диссертации же рассмотрены применяемые в теории конечных групп граф Хоукса, граф Грюнберга–Кегеля, разрешимый граф и силовский граф. Для изучения классов групп и связанных с ними характеристических подгрупп в диссертации введено понятие N-критического графа $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G. Впервые в диссертации выработаны единые методы работы с приведенными графами и введено понятие арифметического графа класса групп. На их основе Мурашко В.И. построена теория арифметических графов конечных групп и их классов. Она позволяет применять графы не только для изучение свойств групп, но и для изучения свойств классов групп. При изучении связей между различными графами группы решена задача Руссо (2012).

N-критический граф был применен для решении задачи Хоукса (1971). Этот граф имеет и самостоятельное значение.

2.2.9 Теорема. *Пусть G — группа:*

(a) Если все циклы $\Gamma_{Nc}(G)$, содержащие вершину 2, имеют длину, большую трёх, то группа G разрешима.

(b) Если $\Gamma_{Nc}(G)$ не содержит циклов, то группа G дисперсивна.

В **третьей главе** диссертации изучены вопросы, связанные с $\mathfrak{F}$-гиперцентром. Одно из основных направлений диссертации задано решением

Проблема Шеметкова (1997). *Описать множество формаций $\mathfrak{F}$ для которых $\mathfrak{F} = (G \mid$ всякий главный фактор G является $\mathfrak{F}$-центральным$)$.*

Мурашко В.И. назвал такие формации Z-насыщенными. Решение этой проблемы состояло в описании решетки Z-насыщенных формаций и условий, при которых эти формации насыщенны и разрешимо насыщенны. Как следствие, была решена задача Баллестера-Болинше и Перец-Рамос (1999). Мурашко В.И. активно применял Z-насыщенные формации $\mathfrak{F}$ и соответствующие им $\mathfrak{F}$-гиперцентры для решения различных проблем. В разделе 3.2 он с помощью них решил проблему Л.А. Шеметкова об описании формаций Бэра–Шеметкова, поставленную на Гомельском алгебраическом семинаре в 1995 году. Приведем наиболее интересную часть решения этой проблемы.

3.2.8 Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \neq 1$ — наследственная формация метанильпотентных групп. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является формацией Бэра–Шеметкова, когда формация $\mathfrak{F}$ Z-насыщенна, и существует разбиение $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\mathbb{P}$ такое, что $\Gamma_{Nc}(\mathfrak{F})$ — объединение полных ориентированных графов на множествах вершин $\pi_i, i \in I$.*

Отметим, что в разделе 3.4 была установлена связь между результатами теории О. Крамера о Σ_t-замкнутых формациях, изложенной в монографии Л.А. Шеметкова (1978), и результатами Го Вэнбиня и А.Н. Скибы (W. Guo, A.N. Skiba, J. Group Theory, 2011) о формациях, содержащих любую группу, имеющую t подгрупп A_i, индексы которых попарно взаимно просты, и $A_i \cap A_j \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(A_i) \cap \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(A_j)$ для $i \neq j$.

В **четвертой главе** диссертации изучены свойства и приложения характеристических подгрупп радикального типа. В ней Мурашко В.И. получил подробное описание множества функториалов фиттингова типа, наиболее известными из которых являются F^* и $\tilde{\mathrm{F}}$, выделяющие в каждой группе G ее обобщенную подгруппу Фиттинга $\mathrm{F}^*(G)$ и подгруппу $\tilde{\mathrm{F}}(G)$, где $\tilde{\mathrm{F}}(G)/\Phi(G) = \mathrm{Soc}(G/\Phi(G))$. Им решена задача Я. Ли и С. Ли (2012), частью решения которой является

4.2.2. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и пусть H — нормальная подгруппа группы G такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и $\Phi(G) \cap H \leq \Phi(H)$. Если $|\tilde{\mathrm{F}}(H) : \tilde{\mathrm{F}}(H) \cap M| \in \mathbb{P} \cup \{1\}$ для любой максимальной подгруппы M группы G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Мурашко В.И. были получены новые методы работы с длинами группы, которые могут быть определены с помощью радикалов Плоткина. С помощью них были построены контрпримеры к обобщениям теоремы К. Дерка онильпотентной длине максимальной подгруппы разрешимой группы (A. Ballester-Bolinches, M.D. Pérez-Ramos, Math. Nachr., 1994; A. Heliel, M. Al-Shomrani, A. Ballester-Bolinches, Mathematics, 2020). Совместное применение этих методов и $\mathfrak{F}$-гиперцентров позволило получить в диссертации оригинальный результат об обобщенной высоте Фиттинга и неразрешимой длине

4.4.1 Теорема. *Пусть группа G является произведением взаимно перестановочных подгрупп A и B. Тогда*

(1) $\max\{h^*(A), h^*(B)\} \leq h^*(G) \leq \max\{h^*(A), h^*(B)\} + 1$.

(2) $\max\{\lambda_p(A), \lambda_p(B)\} = \lambda_p(G)$ *для любого простого числа p. В частности,* $\max\{\lambda(A), \lambda(B)\} = \lambda(G)$.

В **пятой главе** диссертации Мурашко В.И. изучил конструкции формаций групп, определяемых системами $\mathfrak{F}$-субнормальных (K-$\mathfrak{F}$-субнормальных) подгрупп. В этих конструкциях $\mathfrak{F}$-корадикалы использовались в неявном виде. В разделе 5.1 приведен подробный анализ этих конструкций. Простым, но важным, результатом является

5.1.13 Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ — насыщенный гомоморф и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Если $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу, все $\mathfrak{H}$-подгруппы которой $\mathfrak{F}$-субнормальны (K-$\mathfrak{F}$-субнормальны), то $\mathfrak{F}$ — Z-насыщенная формация.*

Интерес представляют полученные Мурашко В.И. методы применения таких формаций для решения задач теории групп. Так, например, используя их он получил конструктивное описание насыщенных регулярных формаций разрешимых групп (A. Lucchini, D. Nemmi, Math. Nachr., 2021). Наиболее оригинальным результатом данной главы является

5.2.3 Теорема. *Решётка* $(\mathrm{Reg}, \vee_{reg}, \wedge_{reg})$ *изоморфна решетке Стейница. В частности, является полной дистрибутивной решеткой.*

Примерами одновременного применения различных радикалов, корадикалов и гиперцентров служат доказательства основных результатов раздела 5.3.

В **шестой главе** Мурашко В.И. предложил полиномиальные алгоритмы вычисления $\mathfrak{F}$-корадикала, $\mathfrak{F}$-гиперцентра, $\mathfrak{F}$-радикала и σ-свойств конечной группы перестановок. Алгоритмы вычисления $\mathfrak{F}$-гиперцентра и σ-свойств ранее не рассматривались. Хефлингом (B. Höfling, J. Symb. Comput., 2001) была поставлена задача нахождения оптимальных алгоритмов вычисления $\mathfrak{F}$-радикала на основе свойств класса $\mathfrak{F}$. Известные алгоритмы вычисления $\mathfrak{F}$-корадикала основывались на теории насыщенных формаций. Доказательства корректности алгоритмов Мурашко В.И. использовали полученные в диссертации результаты о композиционных и Z-насыщенных формациях. Используя GAP, были построены примеры, решившие две задачи Сюй и Чжан (M. Xu, Q. Zhang, Algebra Colloquium, 2005).

Результаты данной главы обеспечивают приоритет Республики Беларусь в алгоритмической теории формаций. Важность данной теории обусловлена тем, что она задает направление, при котором абстрактные результаты по теории формаций представляются в удобной для приложений форме.

Приведенный анализ результатов диссертации Мурашко В.И. и соответствующих им положений, выносимых на защиту, показывает, что все они новые и несомненно имеют мировой уровень.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Результаты и выводы научных исследований, представленных в диссертации Мурашко В.И., являются достоверными поскольку представлены в виде строгих математических утверждений, к каждому из которых приводится исчерпывающее доказательство. Их достоверность также подтверждается тем, что они опубликованы в известных рецензируемых журналах, и из них, в качестве частных случаев, получен ряд известных результатов теории конечных групп и их классов.

Результаты диссертации Мурашко В.И. прошли широкую апробацию — по ним в 2021-2025 годах было сделано как минимум 16 докладов на различных международных конференциях и семинарах в различных городах — Минск, Гомель, Брест, Екатеринбург, Красноярск, Нальчик, Новосибирск и Тула. О признании результатов Мурашко В.И. говорит и то, что большинство его докладов были пленарными.

Научная, практическая, экономическая и социальная значимость результатов диссертации

Диссертация Мурашко В.И. носит теоретический характер. Её научная значимость состоит в решенных в ней проблемах Л.А. Шеметкова (1995, 1997) и задачах Хоукса (1971), Баллестера-Болинше и Прец-Рамос (1999), Хефлинга (2001), Сюй и Чжан (2005), Руссо (2012), Я. Ли и С. Ли (2012) с помощью применения разработанных методов арифметических графов и характеристических подгрупп радикального, корадикального и гиперцентрального типов и соответствующих им классов групп. Основные результаты Мурашко В.И. опубликованы в журналах дальнего зарубежья и в переводных российских журналах, что делает их доступными для использования не только в научных центрах Беларуси, но и за ее пределами.

Практическая значимость диссертации Мурашко В.И. состоит в том, что в ней многие теоретические результаты о характеристических подгруппах и классах конечных групп представлены в форме, удобной для приложений — имеются 18 алгоритмов, решающих различные задачи теории классов групп.

Социальная и экономическая значимость результатов диссертации состоит в применимости её результатов для подготовки высококвалифицированных кадров. Разработанная теория арифметических графов, помимо приложений для изучения строения конечных групп, позволяет представить многие результаты абстрактной теории групп в удобной для восприятия форме. В диссертации приведены 4 акта о внедрении ее результатов в учебный процесс Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, и указана возможность применения ее результатов для составления задач на международные конкурсы для школьников.

Опубликованность результатов диссертации в научной печати

Список публикаций Мурашко В.И. состоит из 100 наименований. Из них 39 статей опубликованы в научных рецензируемых журналах, соответствующих пункту 19 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий. Из указанных работ 32 индексируемы в таких базах данных, как Web of Science и Scopus. Перечень журналов, в которых опубликованы результаты диссертации, включает 21 наименование, из которых 18 индексируются в приведенных базах данных, что показывает международную известность результатов Мурашко В.И.

Анализ автореферата кандидатской диссертации Мурашко В.И., размещенного на сайте ВАК Республики Беларусь, показывает, что публикации из кандидатской диссертации Мурашко В.И. не включены в раздел «Список публикаций соискателя ученой степени» его докторской диссертации.

Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК

Диссертация Мурашко В.И. оформлена в соответствии с требованиями ВАК Республики Беларусь.

Замечания по диссертации

Диссертация Мурашко В.И. затрагивает как классическую теорию групп, так и теорию классов групп и теорию графов. Многие базовые понятия из данных областей приводятся без определений (нильпотентная группа, разрешимая группа, формация, связность (ориентированного) графа, алгоритм поиска в ширину и т.д.), что затрудняет восприятие работы, особенно для неспециалистов в теории классов конечных групп.

В разделе 4.1, начинающемся на стр. 100, при формулировании определений и результатов важную роль играют свойства $(F1)$-$(F5)$. Они ранее упоминались только в определениях 1.3.7 и 1.3.9 на стр. 27 и 28. Отсылки на это в разделе 4.1 не приводится, что в достаточной мере затрудняет восприятие результатов этого раздела.

На стр. 15 диссертации и стр. 12 автореферата неверно указан год проведения конференции в Нальчике (2022 г. вместо 2023 г.).

Имеются неточности в написании фамилий иностранных математиков:

— в источниках 29, 36, 55 диссертации и 29, 36, 47 автореферата вместо «Perez-Ramos» должно быть «Pérez-Ramos»;

— фамилия «Eick» переведена как «Айк» на стр. 11 и как «Эйк» на стр. 36;

— фамилия «Ballester-Bolinches» переведена как «Баллестер-Болиньше» на стр. 71 и как «Баллестер-Болинше» на стр. 75;

— имеются ошибки в написании фамилии «Цассенхауз» на стр. 49, 116 и 190.

Приведенные замечания не снижают общей положительной оценки работы, не влияют на достоверность ее результатов и легко устранимы.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени, на которую он претендует

На основе приведенного анализа содержания диссертации, решаемых в ней проблем и задач, разработанных в ней теорий и методов, опубликованности и апробированности ее результатов можно заключить, что научная квалификация Мурашко В.И. соответствует учёной степени доктора физико-математических наук.

Заключение

Диссертация Мурашко Вячеслава Игоревича является завершенным квалификационным исследованием, удовлетворяющим требованиям главы 3 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий. Мурашко В.И. может быть присуждена ученая степень доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел за разработку новых методов теории характеристических подгрупп радикального, корадикального и гиперцентрального типов в теории классов конечных групп, являющихся крупным концептуальным вкладом в развитие теории конечных групп и представленных в виде следующих результатов.

1. Теории арифметических графов конечных групп и их классов, а также связанных с ней методов изучения строения конечных групп. Решения задач Хоукса (1971) и Руссо (2012).

2. Теории Z-насыщенных формаций и методов применения ее результатов для решения задач теории классов конечных групп. Решения проблем Л.А. Шемтекова (1995, 1997).

3. Новых методов теории характеристических подгрупп радикального типа и их приложений к изучению длин конечных групп. Решения задачи Я. Ли и С. Ли (2012).

4. Конструкций формаций конечных групп, заданных с помощью систем $\mathfrak{F}$-субнормальных (K-$\mathfrak{F}$-субнормальных) подгрупп, и методов их применения для решения задач теории классов конечных групп.

5. Алгоритмической теории формаций конечных групп. Решения задачи Хефлинга (2001) и двух задач Сюй и Чжан (2005).

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий лабораторией теории и приложений
конечных групп отдела алгебры
Института математики НАН Беларуси А.А. Ядченко

Подпись А.А. Ядченко удостоверяю.

Ведущий специалист
по кадрам
Института математики
НАН Беларуси
Г.И. [illegible]
06.03.2026