ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертационной работе
МУРАШКО Вячеслава Игоревича
“Характеристические подгруппы радикального, корадикального и гиперцентрального типов в теории классов конечных групп”,
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Соответствие диссертации специальностям и отрасли науки, по которым она представлена к защите, со ссылкой на область исследования паспорта соответствующей специальности, утвержденной ВАК

В диссертационной работе В.И. Мурашко “Характеристические подгруппы радикального, корадикального и гиперцентрального типов в теории классов конечных групп” развиваются новые методы характеристических подгрупп радикального, корадикального и гиперцентрального типов во взаимной связи с определяющими их классами групп. С помощью этих методов найдены решения ряда открытых проблем теории конечных групп, предложены алгоритмы для вычисления подгрупп указанных типов и распознавания связанных с ними классов групп.

Проведенная в соответствии с требованиями Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий, утвержденного Указом Президента Республики Беларусь от 17.11.2004 № 560, и Положения о совете по защите диссертаций, утвержденного постановлением Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 22.02.2005 № 19 экспертиза содержания диссертационной работы и опубликованных научных работ показывает, что диссертационная работа В.И. Мурашко “Характеристические подгруппы радикального, корадикального и гиперцентрального типов в теории классов конечных групп” соответствует отрасли физико-математических наук и паспорту специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 16 января 2018 г. № 12), область исследований – теории алгебраических структур; линейная и полилинейная алгебра, теория представлений, гомологическая алгебра и алгебраическая K-теория; алгебраическая геометрия, топологическая алгебра; теории категорий и универсальной алгебры.

Актуальность темы диссертации

Тематика диссертации относится прежде всего к функциональным методам исследования групп, базирующихся на выделении в каждой группе опорных (характеристических) подгрупп. Классическими примерами таких подгрупп являются центр и коммутант группы. Данные методы в той или иной степени легли в основу теории радикала, теории подгрупповых функторов, теории классов конечных групп и локального анализа. Яркой иллюстрацией этих методов является анализ простых групп по свойствам и вложениям обобщенных подгрупп Фиттинга их максимальных подгрупп.

Однако в настоящее время имеется ряд открытых проблем теории конечных групп, связанных с характеристическими подгруппами радикального, корадикального и гиперцентрального типов, для решения которых существовавших методов недостаточно. Их примерами являются нерешенные проблемы 8.30 (Х. Лауш), 9.75, 11.120 и 14.99 (Л.А. Шеметков), 11.16 (Р. Брандл), 12.35 и 17.54 (С.Ф. Каморников), 12.72 (В.Н. Семенчук), 14.28, 14.29 и 18.29 (А.Ф. Васильев), 14.30 (Н.Т. Воробьев), 15.2 (М. Айзекс), 16.98 (А. Турулл), 17.38 (А.Ф. Васильев, Л.А. Шеметков), 17.119 (Е.И. Хухро), 18.10 (А. Баллестер-Болинше) из "Коуровской тетради" [Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 19-е изд. доп. / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН ; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск: изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2022. – 248 с.]. Кроме упомянутых проблем, имеются нерешенные проблемы, поставленные в различных международных журналах. Поэтому развитие методов исследования характеристических подгрупп и связанных с ними классов групп является востребованным, перспективным и актуальным направлением.

Необходимо отметить, что существует большое число результатов теории классов конечных групп белорусских и зарубежных математиков, но среди них разработке алгоритмов и программ, решающих задачи теории классов групп, посвящены лишь единичные результаты. Поэтому задача представления результатов теории классов конечных групп в доступной для применения форме является важной с практической точки зрения.

Диссертация В.И. Мурашко "Характеристические подгруппы радикального, корадикального и гиперцентрального типов в теории классов конечных групп" посвящена развитию методов применения характеристических подгрупп в теории классов групп, теории арифметических графов конечных групп и их классов, разработке алгоритмической теории классов конечных групп, а также решению ряда открытых проблем теории классов конечных групп. Тема диссертационной работы, безусловно, является актуальной и соответствует приоритетным направлениям научных исследований Республики Беларусь.

Степень новизны результатов, полученных в диссертации, и научных положений, выносимых на защиту

В нижеприведенном анализе диссертации приведены основные из полученных в диссертации результатов по главам.

Глава 1. Приводится аналитический обзор по теме диссертации и формулируются основные решаемые в диссертации задачи.

Глава 2. Арифметическим графом группы диссертант предлагает называть всякий граф, вершинами которого являются делители порядка группы. Примеры таких графов известны, начиная с 1968 года: граф Хоукса, силовский граф, граф простых чисел (Грюнберга – Кегеля), разрешимый граф и другие. Диссертантом также применяется введённый в диссертации N-критический граф группы. Важными достижениями главы 2 является аксиоматизация свойств указанных графов (определение 2.1.4), новаторская конструкция графа класса групп (определение 2.3.1) и связанные с ними результаты, в том числе критерий распознаваемости класса групп с помощью арифметического графа (теорема 2.3.6). Интерес представляет также теорема 2.2.6, описывающая связь между компонентами связности силовского графа и графа простых чисел, что дает ответ на задачу Ф.Ж. Руссо 2012 года [Problems of connectivity between the Sylow graph, the prime graph and the non-commuting graph of a group, Adv. Pure Math., 2012, Vol. 2, P. 391–396]. Предложенные диссертантом методы изучения строения группы с помощью N-критического графа позволили ему дополнить (теорема 2.3.11) решение проблемы 9.74 о наследственных формациях Шеметкова из “Коуровской тетради” и решить (теорема 2.4.1) задачу Т. Хоукса [Skeletal classes of soluble groups, Arch. Math., 1971, Vol. 22, P. 577–589] о пересечении $\mathfrak{F}$-радикала с $\mathcal{S}$-ключевой максимальной подгруппой конечной разрешимой группы.

Глава 3. В монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы 1989 года главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$-центральным, если полупрямое произведение H/K и $G/C_G(H/K)$, соответствующее действию $G/C_G(H/K)$ на H/K сопряжением, принадлежит $\mathfrak{F}$. Л.А. Шеметковым [Frattini extensions of finite groups and formations, Communications in Algebra, 1997, Vol. 23, № 3, 955–964] поставлена следующая

Проблема. *Описать семейство формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу G, все главные факторы которой $\mathfrak{F}$-центральны.*

Центральным результатом диссертанта в решении этой проблемы является теорема 3.1.3, описывающая решетку указанных формаций, называемых В.И. Мурашко Z-насыщенными. Стоит отметить, что в ходе решения проблемы Шеметкова была решена задача А. Баллестера-Болинше и М.Д. Перец-Рамос о связи указанного семейства формаций с семействами локальных и композиционных формаций (теоремы 3.1.5 и 3.1.7). Приложениям разработанной в разделе 3.1 теории посвящены разделы 3.1–3.4 диссертации. Отмечу наиболее важные из них. На Гомельском алгебраическом семинаре в 1995 году Л.А. Шеметков поставил

Проблема. *Описать формаций $\mathfrak{F}$ для которых в каждой группе пересечение $\mathfrak{F}$-максимальных подгрупп совпадает с $\mathfrak{F}$-гиперцентром, т.е. наибольшей нормальной подгруппой группы, все главные факторы ниже которой $\mathfrak{F}$-центральны.*

Диссертантом данная проблема была решена для произвольных наследственных формаций (теорема 3.2.1).

Глава 4. Ключевым свойством подгруппы Фиттинга разрешимой группы является то, что она содержит свой централизатор. В классе всех групп известны её обобщения $\mathrm{F}^*(G)$ и $\tilde{\mathrm{F}}(G)$, обладающие этим свойством, но теряющие другие ее важные свойства. В разделе 4.1 изучаются функториалы фиттингова типа, значения которых обладают основными свойствами указанных подгрупп. Значимый вклад в развитие функториального метода вносит теорема 4.1.2, описывающая функториалы фиттингова типа в классе всех групп. С подгруппой $\tilde{\mathrm{F}}(G)$ связана задача [Li Y., Li X. A characterization of finite supersolvable groups, Publ. Math. Debrecen, 2012, Vol. 80, № 3–4, P. 359–368].

Задача. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы,* H *является нормальной подгруппой* G *такой, что* $G/H \in \mathfrak{F}$, и $|\tilde{\mathrm{F}}(H):\tilde{\mathrm{F}}(H)\cap M| \in \mathbb{P}\cup\{1\}$ *для любой максимальной подгруппы* M *группы* G. *Верно ли, что* $G \in \mathfrak{F}$?

Ее решение получено диссертантом в теоремах 4.2.1 и 4.2.2. Из последней следуют результаты работ О. Крамера, Я. Ли и С. Ли, И. Ванга и Х. Вей. В завершении раздела 4.2, используя идеи главы 3, диссертант в классе всех групп описывает все насыщенные формации, замкнутые относительно произведений $\mathrm{F}^*(G)$-субнормальных подгрупп (теорема 4.2.6).

В разделе 4.3 В.И. Мурашко исследует связь длин группы и ее максимальной подгруппы. Наиболее интересным результатом является теорема 4.3.3 и её доказательство с помощью функториального метода. В качестве следствия из нее получены как классическая теорема К. Дерка, так и неизвестный ранее её аналог для обобщенной высоты Фиттинга. В разделе 4.4 впервые получена оценка обобщенной высоты Фиттинга и не p-разрешимой длины взаимно перестановочного произведения двух подгрупп (теорема 4.4.1).

Глава 5. На основе понятия $\mathfrak{F}$-корадикала в теории классов конечных групп вводятся понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной и К-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгрупп. Одним из направлений в современной теории классов групп является изучении групп с различными системами $\mathfrak{F}$-субнормальных и К-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. В разделе 5.1 диссертант предлагает конструкции классов групп, определяемых системами $\mathfrak{F}$-субнормальных или К-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, а также описывает основные свойства классов из этих конструкций. Значительный интерес представляют приложения данных конструкций. Так, используя классы групп, у которых все циклические примарные подгруппы К-$\mathfrak{F}$-субнормальны В.И. Мурашко получает конструктивное описание насыщенных регулярных формаций [Lucchini A. D. Nemmi, The non-F graph of a finite group, Math. Nachr., 2021, Vol. 294, №10, P. 1912–1921] разрешимых групп (теоремы 5.2.1, 5.2.2 и 5.2.3). Используя методы глав 2–4 диссертант описывает все наследственные формации $\mathfrak{F}$ без каких либо дополнительных ограничений для которых пересечение всех слабых К-$\mathfrak{F}$-субнормализаторов всех силовских подгрупп совпадает с $\mathfrak{F}$-гиперцентром в каждой группе (теорема 5.3.1) и которые содержат каждую группу G, все силовские подгруппы которой являются $\mathrm{F}^*(G)$-К-$\mathfrak{F}$-субнормальными (теорема 5.3.12).

Глава 6. В настоящее время имеется достаточно развитая вычислительная теория групп перестановок [см. Seress A. Permutation Group Algorithms, Cambridge: Cambridge University Press, 2003, 264 p.]. С вычислительной точки зрения задачи теории формаций конечных групп ранее решались только в некоторых работах в классе всех разрешимых групп. В частности, в работе Б. Хофлинга [Hofling B. Computing projectors, injectors, residuals and radicals of finite soluble groups, J. Symb. Comput., 2001, Vol. 32, № 5, P. 499–511] было отмечено, что предложенный алгоритм вычисления $\mathfrak{F}$-радикала не оптимален. На основе предложенного автором диссертации определения функции главных факторов, определяется семейство формаций, содержащее семейство Z-насыщенных формаций и для формаций $\mathfrak{F}$ из этого семейства предложены полиномиальные алгоритмы, которые сводят вычисления $\mathfrak{F}$-корадикала (теорема 6.1.1) и $\mathfrak{F}$-гиперцентра (теорема 6.2.1) конечной группы перестановок к вычислению значений функции главных факторов. Для композиционной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ предложен полиномиальный алгоритм (теорема 6.3.1), сводящий вычисление $\mathfrak{F}$-радикала конечной группы перестановок к вычислению радикалов для значений ее композиционного экрана.

А.Н. Скибой [On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups, Journal of Algebra, 2015, Vol. 436, P. 1–16] был предложен метод изучения строения групп на основе разбиения σ множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, который нашел широкое применение в теории конечных и бесконечных групп. В этом направлении исследований диссертантом впервые были предложены также алгоритмы обработки σ-свойств конечной группы (теоремы 6.4.2 и 6.4.3).

Ввиду вышеизложенного, результаты, полученные в диссертации В.И. Мурашко и научные положения, выносимые на защиту, безусловно являются новыми.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Все результаты диссертации В.И. Мурашко, в том числе и основные положения, выносимые на защиту, являются новыми, снабжены подробными и полными доказательствами. Достоверность и обоснованность заключительных выводов, сформулированных в диссертации, не вызывает сомнений, они опубликованы в открытой печати в рецензируемых международных научных журналах и докладывались на различных международных и республиканских научных конференциях и семинарах. В диссертационной работе и автореферате имеются все необходимые ссылки на литературу.

Научная, практическая, экономическая и социальная значимость научных результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию

Диссертационная работа носит теоретический характер. Исследования проводились в рамках следующих научных программ и проектов:

“Конечные группы нильпотентного и сверхразрешимого типов, их нечеткие аналоги и приложения” (грант 20160353, 2016–2020), тема входила в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы “Конвергенция–2020”, подпрограмма “Методы математического моделирования сложных систем”;

“Классы конечных групп, их арифметические графы, эффективное распознавание” (грант 20211750, 2021–2025), тема входила в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 годы “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”;

“Групповые кольца и графы групп” (грант 20171383, 2017–2019, договор с БРФФИ Ф17РМ–063);

“Актуальные вопросы теории конечных и периодических групп” (грант 20201334, 2020–2022, договор с БРФФИ Ф20Р–291);

“Строение конечных и периодических групп: фундаментальный и вычислительный аспекты” (грант 20221874, 2022–2025, договор с БРФФИ Ф23РНФ–237);

“Группы с условиями конечности: фундаментальные проблемы и приложения в компьютерной алгебре” (грант 20240062, 2023–2026 договор с БРФФИ Ф23РНФМ–63).

Соискателем выполнены два гранта Министерства образования для докторантов, аспирантов, студентов (грант 20200685, 2020; грант 20240567, 2024).

Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в дальнейших исследованиях современной теории групп при изучении различных характеристических подгрупп и функториалов, классов групп, графов групп, а также в описании алгоритмов в группах, проводимых в научных центрах Республики Беларусь, России, Китая, Испании, Италии, Англии, Германии, США и других стран.

Материалы диссертации будут полезны при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей университетов, при написании курсовых, дипломных работ и диссертаций, при организации исследовательской работы высокого уровня со школьниками.

Разработанные в диссертации алгоритмы могут быть использованы в системе компьютерной алгебры GAP.

Практическая значимость результатов диссертационного исследования подтверждена актами их внедрения в учебном процессе УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины» и разработанными на их основе задачами международного турнира юных математиков.

Опубликованность результатов диссертации в научной печати

Основные положения и результаты диссертации снабжены ссылками на научные работы автора, в которых они опубликованы. Отметим, что автором опубликовано по теме диссертационного исследования 100 научных работ, в том числе: 39 статей в рецензируемых научных журналах (28 статей без соавторов), соответствующих пункту 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, 19 препринтов, 18 статей в сборниках материалов научных конференций и 24 тезисов докладов.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в известных математических журналах (Communications in Algebra, Journal of Symbolic Computatons, Journal of Group Theory, Journal of Algebra and Its Applications, Archiv der Mathematik, Ricerche di Matematica, Acta Mathematica Hungarica, Publicationes Mathematicae Debrecen, Asian-European Journal of Mathematics, Advances in Group Theory and Applications, Сибирский математический журнал, Математические заметки, Алгебра и логика, Труды Института и механики УрО РАН, Сибирские электронные математические известия, Весці НАН Беларусі, Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика, Труды Института математики НАН Беларуси и др.).

Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК

Диссертация и автореферат В.И. Мурашко “Характеристические подгруппы радикального, корадикального и гиперцентрального типов в теории классов конечных групп” оформлены в соответствии с требованиями ВАК Республики Беларусь. Автореферат диссертационной работы полно и правильно отражает содержание диссертации.

Замечания по диссертации

Работа хорошо оформлена, хотя и не свободна от некоторых неточностей и языковых погрешностей. Имеется незначительное число стилистических замечаний и обнаруженных опечаток, которые не влияют на научную ценность полученных результатов. В качестве замечаний по тексту диссертации можно выделить следующие:

1) На стр. 49 диссертации, 10–11 строки сверху: вместо “Шура-Цассенауса” должно быть “Шура – Цассенхауза”. Аналогичное исправление стоит внести на: стр. 116 диссертации, 20 строка снизу; стр. 190 диссертации, 13 строка снизу.

2) На стр. 60 диссертации, 12–13 строки снизу: вместо “Граф Хоукса минимальной не $\mathfrak{N}^t$-группы, не имеющий петель, является полным ациклическим графом на $t+1$ вершине” должно быть “Если граф Хоукса минимальной не $\mathfrak{N}^t$-группы не имеет петель, то он является полным ациклическим графом на $t+1$ вершине”. Аналогичное исправление стоит внести также на этой странице, 10–11 строки снизу.

3) На стр. 63 диссертации, 9 строка снизу: вместо “всю” должно быть “всякую”.

4) На стр. 75 диссертации, 3 строка сверху: вместо “элементарно” должно быть “элементарная”. Аналогичное исправление стоит внести на: стр. 163 диссертации, 3 строка снизу; стр. 222 диссертации, 10 строка сверху.

5) На стр. 110 диссертации, 7 строка сверху: вместо “главным нефраттиниевым фактором” должно быть “нефраттиниевым главным фактором”.

Соответствие научной квалификации соискателя ученной степени, на которую он претендует

Разработанные в диссертации теории, решенные в ней задачи, а также опубликованные работы говорят о том, что квалификация В.И. Мурашко соответствует ученой степени доктора физико-математических наук.

Заключение

Диссертационная работа Мурашко Вячеслава Игоревича "Характеристические подгруппы радикального, корадикального и гиперцентрального типов в теории классов конечных групп" соответствует всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук. Содержание диссертационной работы полностью соответствует отрасли физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Считаю, что В.И. Мурашко заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел за создание новых теорий и методов в теории классов конечных групп. А именно:

1) Теорию арифметических графов конечных групп и их классов:

– определения и свойства арифметических графов конечных групп и их классов, решение задачи распознавания класса конечных групп арифметической графовой функцией;

– решение задачи Ф.Ж. Руссо 2012 года о компонентах связности силовского графа и графа простых чисел конечной группы;

– применение N-критического графа для алгоритмического дополнения решения задачи 9.74 из "Коуровской тетради" об описании наследственных насыщенных формаций Шеметкова конечных групп;

– решение задачи Т. Хоукса 1971 года о пересечении $\mathfrak{F}$-радикала с $\mathcal{S}$-ключевой максимальной подгруппой конечной разрешимой группы.

2) Теорию Z-насыщенных формаций:

– решение проблемы Л.А. Шеметкова 1995 года об описании формаций для которых в каждой группе $\mathfrak{F}$-гиперцентр совпадает с пересечением максимальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, когда $\mathfrak{F}$ – наследственная формация;

– решение проблемы Л.А. Шеметкова 1997 года об описании множества Z-насыщенных формаций конечных групп;

– методы применения Z-насыщенных формаций для решения задач теории классов конечных (разрешимых) групп.

3) Функториальные методы радикального типа:

– описание семейства функториалов фиттингова типа конечных групп;

– решение задачи Я. Ли и С. Ли 2012 года;

– описание насыщенных $\mathrm{F}^*(G)$-радикальных формаций;

– теоремы об оценках длин конечной группы, заданных с помощью радикалов Плоткина.

4) Методы построения формаций конечных групп и их приложения:

– свойства и строение, определяемых с помощью систем формационно субнормальных подгрупп, классов групп;

– конструктивное описание насыщенных регулярных формаций разрешимых групп;

– описание наследственных формаций $\mathfrak{F}$, для которых пересечение всех слабых K-$\mathfrak{F}$-субнормализаторов всех силовских подгрупп совпадает с $\mathfrak{F}$-гиперцентром в каждой группе;

– описание наследственных формаций $\mathfrak{F}$, которые содержат каждую группу G, все силовские подгруппы которой являются $\mathrm{F}^*(G)$-K-$\mathfrak{F}$-субнормальными.

5) Полиномиальные алгоритмы разработанной в диссертации алгоритмической теории классов конечных групп:

– полиномиальные алгоритмы, сводящие вычисления $\mathfrak{F}$-корадикала и $\mathfrak{F}$-гиперцентра конечной группы перестановок к вычислению значений функции главных факторов, для формаций $\mathfrak{F}$ определяемых функцией главных факторов;

– полиномиальный алгоритм, сводящий вычисление $\mathfrak{F}$-радикала для композиционной формации $\mathfrak{F}$ к вычислению радикалов для значений композиционного экрана $\mathfrak{F}$ конечной группы перестановок;

– алгоритмы обработки σ-свойств конечной группы перестановок.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры математики
УО “Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова” Н.Н. Воробьев

Подпись удостоверяю
Начальник отдела кадров
Соловьёва
06.03.2026