

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

Объект авторского права
УДК 512.542

МУРАШКО
Вячеслав Игоревич

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ РАДИКАЛЬНОГО,
КОРАДИКАЛЬНОГО И ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНОГО ТИПОВ
В ТЕОРИИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП**

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2026

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Научный консультант:

Васильев Александр Федорович,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Официальные оппоненты:

Воробьев Николай Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики УО «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Ревин Данила Олегович,
доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории алгебры ФГБУН «Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук».

Ядченко Алексей Александрович,
доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией теории и приложений конечных групп отдела алгебры Института математики НАН Беларуси.

Оппонирующая организация — Белорусский государственный университет.

Защита состоится 20 марта 2026 г. в 14.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246028, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3-1. Телефон ученого секретаря: +375 232 51 03 07. E-mail: SovetD021201@yandex.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 30 января 2026 г.

И.о. учёного секретаря
совета по защите диссертаций Д 02.12.01

В.Н. Тютянов

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются только конечные группы. Понятие группы является центральным инструментом современной науки, используемым для изучения симметрии — важнейшего свойства пространственно-временного континуума. Теория групп нашла и находит применение в основных разделах математики, физике и химии¹ (в кристаллографии², квантовой физике³, спектроскопии⁴). В последние годы группы и их классы нашли приложение в вирусологии⁵, генетике⁶, криптографии⁷, машинном обучении⁸, при распознавании формальных языков⁹, в статистической механике¹⁰ (исследование решений уравнения Янга – Бакстера), в задачах автоматизации проверки доказательств¹¹ и др. Ввиду усиления прикладной роли развитие теории групп и их классов является актуальным научным направлением в математике и её приложениях.

В теории групп основополагающими являются понятия простой группы и разрешимой группы, впервые появившиеся в работах Э. Галуа. Последние, в свою очередь, положили начало развитию теории групп. К концу 70-х годов прошлого века классификация простых групп в целом была достигнута, а теория разрешимых групп оформилась в содержательную теорию классов (формаций, классов Фиттинга и Шунка) групп. В связи с этим Г. Вилендт в 1980 году предложил в качестве приоритетной цели дальнейшего развития теории групп исследовать составные (необязательно простые или разрешимые) группы и их содержащие классы. Он отметил¹²: *«в рамках систематического развития теории составных групп представляется ещё более важным найти и исследовать те подгруппы, которые имеют ключевое значение. В качестве ориентира может служить теория разрешимых групп»*.

¹Артамонов, В.А. Группы и их приложения в физике, химии, кристаллографии: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.А. Артамонов, Ю.Л. Словохотов. — Москва: Академия, 2005. — 512 с.

²Piwek, P. Distinguishing crystallographic groups by their finite quotients / P. Piwek, D. Popovic, G. Wilkes // J. Algebra. — 2021. — Vol. 565. — P. 548–563.

³Korniyak, V.V. Finite groups and quantum physics / V.V. Korniyak // Physics of Atomic Nuclei. — 2013. — Vol. 76, № 2. — P. 240–257.

⁴Pain, J.-C. Sum rules for Clebsch–Gordan coefficients from group theory and Runge-Lenz-Pauli vector / J.-C. Pain // J. Phys. Commun. — 2022. — № 6. — Article 055007.

⁵Finite symmetries in agent-based epidemic models / G.M. Nakamura, A.C.P. Monteiro, G.C. Cardoso, A.S. Martinez // Math. Comput. Appl. — 2019. — Vol. 24, № 2. — Article 44.

⁶Antoneli, F. Symmetry breaking in the genetic code: Finite groups / F. Antoneli, M. Forger // Math. Comp. Model. — 2011. — Vol. 53, № 7-8. — P. 1469–1488.

⁷Криптология : учебник / Ю.С. Харин, С.В. Агиевич, Д.В. Васильев, Г.В. Матвеев. — Минск: БГУ, 2023. — 512 с.

⁸Kondor, R. Group theoretical methods in machine learning. Ph.D. thesis / R. Kondor. — Columbia University, 2008. — 111 p.

⁹Ballester-Bolinches, A. Languages associated with saturated formations of groups / A. Ballester-Bolinches, J.-E. Pin, X. Soler-Escriva // Forum Math. — 2015. — Vol. 27, № 3. — P. 1471–1505.

¹⁰Some group-theoretical approaches to skew left braces / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, P. Jiménez-Seral, V. Pérez-Calabuig // IJGT. — 2023. — Vol. 12, № 2. — P. 99–109.

¹¹Garillot, F. Generic Proof Tools and Finite Group Theory: PhD thesis / F. Garillot. — École polytechnique, 2011. — 156 p.

¹²Wielandt, H. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute / H. Wielandt // The Santa Cruz Conference on finite groups. — Proc. Symp. Pure Math. № 37. — 1980. — P. 161–173.

В настоящее время выделены и исследуются различные канонические подгруппы групп. Центральное место среди них занимают характеристические подгруппы: радикал, корадикал, гиперцентр. Они играют значительную роль при изучении строения конкретных групп. Доказательства многих теоретико-групповых теорем существенно упрощаются за счёт применения этих подгрупп. Свойства этих подгрупп тесно переплетаются со свойствами классов групп (формаций, классов Фиттинга), что позволяет с помощью них выделять классы групп и наоборот. Напомним существенные вехи в развитии теории указанных подгрупп.

Концепция радикала занимает центральное положение в алгебре. Благодаря работам А.Г. Куроша и С. Амицура в 50-х годах прошлого века была построена аксиоматическая теория радикала. В дальнейшем развитием и продвижением идеи радикала в группах активно занимались А.Г. Курош¹³, Б.И. Плоткин¹⁴ и др. В работах^{13, 14} ставятся проблемы А.Г. Куроша и Б.И. Плоткина об описании радикалов групп. А.Г. Курош¹³ отмечал, что получить полную классификацию радикалов не представляется возможным.

Наряду с понятием радикала важную роль играет двойственное ему понятие корадикала. Б.И. Плоткин¹⁴ предложил согласованные с изоморфизмами функции, выделяющие в каждой группе характеристическую подгруппу, называть функториалами. В основе теории функториалов лежит аксиоматизация свойств конкретных радикалов, корадикалов, гиперцентров, используемых в приложениях. Важным методом развиваемой теории функториалов стало сопоставление каждому функториалу определённых классов групп.

Благодаря работам В. Гашюца 1963 года и Б. Фишера, В. Гашюца и Б. Хартли 1967 года начинает активно развиваться теория классов (формаций и классов Фиттинга) групп, т.е. семейств групп, содержащих вместе с каждой группой и все ей изоморфные группы (замкнутые относительно определённых операций). В этой теории вместе с классом групп \mathfrak{F} изучаются в каждой группе соответствующие ему характеристические подгруппы (\mathfrak{F} -корадикал, \mathfrak{F} -радикал, \mathfrak{F} -гиперцентр и др.), кодирующие связанную с ним информацию.

Объединяющей идеей теорий функториалов и классов групп является изучение их свойств во взаимной связи. Наиболее ярко данное утверждение проиллюстрировано в работе Р. Бэра¹⁵ 1966 года: «Метод функций (функториалов) следует развивать во взаимной связи с методом сопоставленных им классов групп и для решения конкретной задачи выбирать лучший из них». В этой же работе им выделялись и изучались три типа функториалов — радикального, корадикального и гиперцентрального типов.

В последние годы развитие теории радикала, корадикала, гиперцентра шло в основном в контексте развития теории формаций, классов Фиттинга и классов Шунка. Результаты теории классов групп и связанных с ними характеристических

¹³Курош, А.Г. Радикалы в теории групп / А.Г. Курош // Сиб. матем. журн. — 1962. — Т. 3, № 6. — С. 912–932.

¹⁴Плоткин, Б.И. Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы / Б.И. Плоткин // Избранные вопросы алгебры и логики : сб., посв. памяти А.И. Мальцева / Под ред. А.И. Ширшова (гл. ред.). — Новосибирск: Наука, 1973. — С. 205–244.

¹⁵Baer, R. Group theoretical properties and functions / R. Baer // Colloq. Math. — 1966. — Vol. 14. — P. 285–328.

подгрупп можно найти в монографиях Б. Хупперта¹⁶, Л.А. Шеметкова¹⁷, Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы¹⁸, К. Дёрка и Т. Хоукса¹⁹, В. Го^{20,21}, А. Баллестера-Болинше и Л.М. Эсквейро²². Также изучению радикалов в теории классов (в частности, формаций) Фиттинга посвящены работы Н.Т. Воробьева и его учеников, Р.А. Брайса, Дж. Косси, Л.А. Шеметкова, С.Ф. Каморникова, А.Ф. Васильева, А.Н. Скибы, Д.О. Ревина, В.А. Ведерникова и др.

Другим направлением развития теории характеристических подгрупп как функториалов стал пересмотр теории групп с точки зрения подгрупповых функторов, то есть согласованных с изоморфизмами групп функций, выделяющих в группах определённую систему подгрупп. Основы теории подгрупповых функторов были заложены в монографиях С.Ф. Каморникова и М.В. Селькина²³ и А.Н. Скибы²⁴. В рамках классификации различных типов подгрупповых функторов понятие функториала соответствует понятию унитарного подгруппового функтора. Из анализа результатов²³ следует, что теория функториалов и их приложений является ещё недостаточно разработанной. Выделим некоторые конкретные актуальные проблемы и направления, связанные с отмеченными выше характеристическими подгруппами.

На основе аксиоматизации отдельных свойств подгруппы Фиттинга были выделены радикалы Плоткина и \mathfrak{F} -радикалы для класса Фиттинга \mathfrak{F} . В теории групп находят применение свойства подгруппы Фиттинга и её обобщений, которые не входят в аксиоматику указанных радикалов. Возникает задача *описания семейства характеристических подгрупп группы, свойства которых совпадают с основными свойствами подгруппы Фиттинга разрешимой группы*.

Основной идеей теории радикалов в кольцах и линейных алгебрах является возможность получить явное описание радикала и факторалгебры по нему. В теории групп факторгруппа по радикалу не всегда допускает конструктивное описание. Это наблюдение приводит к понятию длины группы, индуцированной радикалом. Примером таких длин является нильпотентная длина разрешимой группы. Распространению данной длины на класс всех групп посвящены работы^{25,26} Е.И. Хухро и

¹⁶Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. — Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. — 793 p.

¹⁷Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. — Москва: Наука, 1978. — 272 с.

¹⁸Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. — Москва: Наука, 1989. — 256 с.

¹⁹Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

²⁰Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. — Dordrecht – Bocton – London: Kluwer Academic Publishers, 2000. — 258 p.

²¹Guo, W. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo. — Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 2015. — 359 p.

²²Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. — Dordrecht: Springer, 2006. — 385 p.

²³Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. — Минск: Белорусская наука, 2003. — 254 с.

²⁴Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. — Минск: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

²⁵Khukhro, E.I. On the length of finite groups and of fixed points / E.I. Khukhro, P. Shumyatsky // Proc. Amer. Math. Soc. — 2015. — Vol. 143, № 9. — P. 3781–3790.

²⁶Khukhro, E.I. On the length of finite factorized groups / E.I. Khukhro, P. Shumyatsky // Ann. Mat. Pura Appl. — 2015. — Vol. 194, № 6. — P. 1775–1780.

П. Шумяцкого 2015 года. В рамках теории классов групп различные длины рассматривались в работах Л.А. Шеметкова, А.К. Макана, А. Баллестера-Болинше, М.Д. Перец-Рамос, А. Хелиэль, М. Аль-Шомрани, В.С. Монахова и А.А. Трофимука (см. также монографию²⁷ А.А. Трофимука 2019 года). Поэтому интерес представляет задача *развития функториального подхода для изучения длин группы*.

Одним из основных методов изучения строения группы является изучение её действия на факторах главного ряда. Л.А. Шеметков²⁸ поставил следующую проблему в 1997 году: «*Описать множество формаций \mathfrak{F} со следующим свойством $\mathfrak{F} = (G \mid \text{всякий главный фактор } G \text{ является } \mathfrak{F}\text{-центральным})$* ». Такие формации были названы Z -насыщенными [20–А]. Как было отмечено Л.А. Шеметковым, множество Z -насыщенных формаций содержит все композиционные (в частности, локальные) формации, играющие центральную роль в современной теории классов групп, но не исчерпывается ими. Решение проблемы Л.А. Шеметкова было начато А. Баллестером-Болинше и М.Д. Перец-Рамос²⁹: *ими был получен критерий насыщенности такой формации разрешимых групп, и поставлена задача его распространения на произвольные формации*.

Одним из направлений исследования семейства формаций является описание решётки его элементов. Его основы были заложены А.Н. Скибой²⁴ и получили глубокое развитие в работах В.Г. Сафонова, И.Н. Сафоновой, Н.Н. Воробьева, В.М. Селькина, В. Го, А.А. Царева и др. Для решения проблемы Л.А. Шеметкова естественной является задача *описания решётки Z -насыщенных формаций*.

Всякую Z -насыщенную формацию \mathfrak{F} можно охарактеризовать как класс групп, совпадающих со своим \mathfrak{F} -гиперцентром. Изучению свойств \mathfrak{F} -гиперцентра посвящены работы Р. Бэра, Б. Хупперта, Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы, В. Го и др. Поэтому важным шагом в решении проблемы Л.А. Шеметкова 1997 года является получение характеристик \mathfrak{F} -гиперцентра. Классические характеристики гиперцентра были получены в работах Ф. Холла и Р. Бэра. В работе 1966 года Р. Бэр¹⁵ начал изучать функториальный гиперцентр, являющийся пересечением максимальных \mathfrak{F} -подгрупп для класса групп \mathfrak{F} . Л.А. Шеметковым в 1995 году была поставлена проблема *описания формаций \mathfrak{F} , для которых в любой группе \mathfrak{F} -гиперцентр равен пересечению всех максимальных \mathfrak{F} -подгрупп*. Её решению посвящены работы А.Н. Скибы³⁰, Дж. Бейдлемана, Г. Хайнекена³¹ для локальных формаций и автора³² для композиционных формаций. *Естественным является решение проблемы Л.А. Шеметкова 1995 года для Z -насыщенных формаций*.

²⁷Трофимук, А.А. Инварианты конечных групп и их связь с арифметическими и формационными свойствами структурных объектов / А.А. Трофимук. — Минск: БГУ, 2019. — 302 с.

²⁸Shemetkov, L.A. Frattini extensions of finite groups and formations / L.A. Shemetkov // Comm. Algebra. — 1997. — Vol. 23, № 3. — P. 955–964.

²⁹Ballester-Bolinches, A. On a question of L. A. Shemetkov / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Comm. Algebra. — 1999. — Vol. 27, № 11. — P. 5615–5618.

³⁰Skiba, A.N. On the \mathfrak{F} -hypercentre and the intersection of all \mathfrak{F} -maximal subgroups of a finite group / A.N. Skiba // J. Pure Appl. Algebra. — 2012. — Vol. 216, № 4. — P. 789–799.

³¹Beidleman, J.C. A note of intersections of maximal \mathfrak{F} -subgroups / J.C. Beidleman, H. Heineken // J. Algebra. — 2010. — Vol. 333. — P. 120–127.

³²Murashka, V.I. On the \mathfrak{F} -hypercenter and the intersection of \mathfrak{F} -maximal subgroups of a finite group / V.I. Murashka // J. Group. Theory. — 2018. — Vol. 21, № 3. — P. 463–473.

В программе Виландта большое внимание уделяется развитию теории субнормальных подгрупп и их приложений в рамках теории классов произвольных групп. Формационные аналоги субнормальности были предложены Т. Хоуксом, Л.А. Шеметковым и О. Кегелем. При их определении важную роль играет понятие такой характеристической подгруппы группы, как \mathfrak{F} -корадикал. Теория \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп изложена в монографиях^{22, 23}. Изучению групп с системами формационно субнормальных подгрупп посвящены работы П. Фёрстера, А.Ф. Васильева, В.Н. Тютянова, В.Н. Семенчука, С.Ф. Каморникова, А.Н. Скибы, В.С. Монахова, М.М. Сорокиной, Т.И. Васильевой, И.Л. Сохор, В. Го, С. Йи, А. Баллестера-Болинше и др. В них изучалось конструкции и приложения классов групп, определяемых заданной системой (максимальные, силовские, циклические примарные и др.) формационно субнормальных подгрупп. Ряд таких систем подгрупп допускает описание с помощью насыщенного гомоморфа. Естественной является задача *изучения конструкций классов групп, определяемых с помощью систем формационно субнормальных подгрупп и позволяющих получать Z -насыщенные формации.*

Решение вышеизложенных проблем требует разработки новых методов. Одним из методов изучения строения группы является сопоставление ей графа и извлечение свойств группы из геометрии графа. Этот метод восходит к работам А. Кэли и его графу, введенному в 1878 году и имеющему большое число приложений в настоящее время³³. Вершины графов групп могут иметь разную природу. Условно их можно разделить на три типа. К первому типу относятся графы групп, вершинами которых являются (необязательно все) элементы группы: граф Кэли, степенной граф и его обобщения, графы коммутативности и некоммутиативности, нильпотентности и ненильпотентности и др. Ко второму типу относятся графы групп, вершинами которых являются (необязательно все) подмножества элементов группы: граф (пересечений) подгрупп и граф перестановочности. К третьему типу относятся графы групп, вершинами которых являются (простые) делители порядка группы. Такие графы мы будем называть арифметическими. Их примерами являются граф простых чисел (Грюнберга – Кегеля), кодирующий важную информацию о строении простой группы и активно изучающийся в настоящее время (см., например, обзор³⁴); графы Хоукса и силовский, применяемые в 1968 году Т. Хоуксом³⁵ и в 2011 году Л.С. Казариным, А. Мартинес-Пастор и М.Д. Перец-Рамос³⁶ соответственно для решения задач теории классов групп. Ввиду вышеизложенного актуальной является *проблема разработки теории арифметических графов групп и их классов для решения открытых задач теории групп.* Например, Ф.Ж. Руссо³⁷

³³Cooperman, G. Applications of Cayley graphs / G. Cooperman, L. Finkelstein, N. Sarawagi // Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes / Ed. by S. Sakata. — Berlin – Heidelberg: Springer-Verl., 1991. — P. 367–378

³⁴Cameron, P.J. Criterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg-Kegel graph / P.J. Cameron, N.V. Maslova // J. Algebra. — 2022. — Vol. 607. — P. 186–213.

³⁵Hawkes, T. On the class of the Sylow tower groups / T. Hawkes // Math. Z. — 1968. — Vol. 105, № 3. — P. 393–398.

³⁶Kazarin, L.S. On the Sylow graph of a group and Sylow normalizers / L.S. Kazarin, A. Martinez-Pastor, M.D. Perez-Ramos // Israel J. Math. — 2011. — Vol. 186, № 2. — P. 251–271.

³⁷Russo, F.G. Problems of connectivity between the Sylow graph, the prime graph and the non-commuting graph of a group / F.G. Russo // Adv. Pure Math. — 2012. — Vol. 2. — P. 391–396.

в 2012 году поставил задачу о связи компонент связности графа простых чисел и силовского графа группы.

Методы вычислений играют важную роль в современной науке, связывая теорию с приложениями. Основы алгоритмической (вычислительной) теории групп отражены в монографиях А. Сереш³⁸ и Д.Ф. Холта, Б. Айк и Э.А. О'Брайена³⁹. Существенно менее разработанной является алгоритмическая теория классов групп. В статье⁴⁰ Б. Хёфлинга 2001 года предложены алгоритмы вычисления \mathfrak{F} -радикала, \mathfrak{F} -корадикала, \mathfrak{F} -проекторов и \mathfrak{F} -инъекторов разрешимых групп. Однако самым автором отмечается неоптимальность предложенных алгоритмов и ставится задача их оптимизации на основе знаний о строении класса \mathfrak{F} . В статье⁴¹ Б. Айк и Ч. Райта 2002 года приводятся эффективные алгоритмы вычисления \mathfrak{F} -корадикала и \mathfrak{F} -проекторов для локальных формаций \mathfrak{F} на основе специальных порождающих множеств полициклических (разрешимых) групп. В работе А. Баллестера-Болинше, Э. Косме-Льопес и Р. Эстебан-Ромеро⁴² приводятся алгоритмы распознавания классов групп, определяемых перестановочностью подгрупп. Возникает проблема разработки алгоритмической теории классов (необязательно разрешимых) групп и связанных с ними характеристических подгрупп.

Одним из современных направлений в реализации программы построения теории составных групп является теория σ -свойств А.Н. Скибы⁴³, т.е. изучение свойств группы, определяемых данным разбиением σ множества простых чисел. Важными примерами таких свойств являются σ -нильпотентность, σ -разрешимость, σ -субнормальность и σ -перестановочность. В настоящее время эта теория развивается широким кругом математиков из более чем 12 стран. Возникает задача алгоритмического распознавания σ -свойств группы.

Данная работа посвящена решению приведённых выше проблем и ассоциированных с ними задач в их взаимной связи.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Тема диссертации соответствует пункту 1 перечня приоритетных направлений научной, научно-технической и инновационной деятельности на 2021–2025 годы, определённых Указом Президента Республики Беларусь

³⁸Seress, Á. *Permutation Group Algorithms* / Á. Seress. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003. — 264 p.

³⁹Holt, D.F. *Handbook of Computational Group Theory* / D.F. Holt, B. Eick, E.A. O'Brien. — New York: Chapman and Hall/CRC, 2005. — 536 p.

⁴⁰Höfling, B. *Computing projectors, injectors, residuals and radicals of finite soluble groups* / B. Höfling // *J. Symb. Comput.* — 2001. — Vol. 32, № 5. — P. 499–511.

⁴¹Eick, B. *Computing subgroups by exhibition in finite solvable groups* / B. Eick, C.R.B Wright // *J. Symb. Comput.* — 2002. — Vol. 33, № 2. — P. 129–143.

⁴²Ballester-Bolinches, A. *Algorithms for permutability in finite groups* / A. Ballester-Bolinches, E. Cosme-Llópez, R. Esteban-Romero // *Cent. Eur. J. Math.* — 2013. — Vol. 11, № 11. — P. 1914–1922.

⁴³Skiba, A.N. *On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups* / A.N. Skiba // *J. Algebra.* — 2015. — Vol. 436. — P. 1–16.

от 7 мая 2020 г. № 156 «О приоритетных направлениях научной, научно-технической и инновационной деятельности на 2021–2025 годы» — Цифровые информационно-коммуникационные и междисциплинарные технологии, основанные на них производства: математика и моделирование сложных функциональных систем (технологических, биологических, социальных).

Исследования проводились в рамках следующих научных программ и проектов: «Классы конечных групп, их арифметические графы, эффективное распознавание» (2021-2025, №ГР20211750, тема входит в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2021-2025 годы «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы»); «Конечные группы нильпотентного и сверхразрешимого типов, их нечеткие аналоги и приложения» (2016-2020, №ГР20160353, тема входила в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016-2020 годы «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем»); «Группы с условиями конечности: фундаментальные проблемы и приложения в компьютерной алгебре» (БРФФИ-РНФ М, №Ф23РНФМ-63, 2023–2026, №ГР20240062, соискатель является научным руководителем данной темы); «Строение конечных и периодических групп: фундаментальный и вычислительный аспекты» (БРФФИ-РНФ, №Ф23РНФ-237, 2022–2025, №ГР20221874); «Обобщенно субнормальные подгруппы конечных групп: теоретические и вычислительные аспекты» (грант Министерства образования для докторантов, аспирантов, студентов, 2024, №ГР20240567); «Вычислительные аспекты теории формаций конечных групп» (грант Министерства образования для докторантов, аспирантов, студентов, 2020, №ГР20200685); «Актуальные вопросы теории конечных и периодических групп» (БРФФИ-РФФИ, №Ф20Р-291, 2020–2022, №ГР20201334); «Групповые кольца и графы групп» (БРФФИ-РФФИ, №Ф17РМ-063, 2017–2019, №ГР20171383).

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Целью работы является разработка методов теории характеристических подгрупп радикального, корадикального и гиперцентрального типов и их сочетанное применение для решения открытых проблем теории групп, а также получение эффективных алгоритмов вычисления указанных подгрупп. Для достижения поставленной цели в диссертации необходимо решить следующие проблемы:

Р.1. Разработать теорию арифметических графов конечных групп для решения актуальных задач теории классов групп и связанных с ними характеристических подгрупп. Решить задачи Т. Хоукса 1971 года о пересечении радикала фиттингова типа с \mathcal{S} -ключевой максимальной подгруппой и Ф.Ж. Руссо 2012 года о связи силовского графа и графа Грюнберга – Кегеля группы.

Р.2. Разработать методы теории характеристических подгрупп гиперцентрального типа. Решить проблемы Л.А. Шеметкова 1995 года о равенстве подгрупп гиперцентрального типа и 1997 года об описании семейства формаций групп, совпадающих со своим формационным гиперцентром, включая задачу А. Баллестера-Болинше и М.Д. Перец-Рамос 1999 года.

Р.3. В рамках развития функториального метода Бэра – Плоткина описать функториалы, свойства значений которых совпадают с основными свойствами под-

группы Фиттинга и её обобщений. Применить их для решения задачи Я. Ли и С. Ли 2012 года о сверхразрешимости группы. Разработать методы оценки определяемой радикалом Плоткина длины максимальной подгруппы и взаимно перестановочного произведения подгрупп.

Р.4. Разработать методы исследования формаций групп, заданных с помощью корадикально определяемых цепей подгрупп. Применить их для получения конструктивного описания регулярных формаций Луккини – Немми и характеристик σ -нильпотентного гиперцентра.

Р.5. Разработать алгоритмическую (вычислительную) теорию классов групп. Получить эффективные алгоритмы распознавания классов групп и вычисления \mathfrak{F} -радикала, \mathfrak{F} -корадикала, \mathfrak{F} -гиперцентра и σ -свойств группы.

Объектом исследования являются характеристические подгруппы радикального, корадикального и гиперцентрального типов во взаимной связи с определяющими их классами групп.

Предметом исследования являются свойства указанных подгрупп, их влияние на строение групп и алгоритмы их вычисления.

Научная новизна

Работа носит теоретический характер. Все результаты диссертации являются новыми и впервые получены соискателем.

В диссертации разработана теория арифметических графов групп и их классов, с помощью результатов которой был решён ряд открытых задач. Получены новые свойства характеристических подгрупп гиперцентрального типа и связанных с ними классов групп, которые были применены для решения проблем Л.А. Шеметкова 1995 и 1997 годов об описании формаций Бэра – Шеметкова и Z -насыщенных формаций. Введено понятие функториала фиттингова типа, описана алгебра таких функториалов и найдены их приложения. Разработаны новые подходы к работе с длинами групп, определяемых радикалами и включающих обобщения нильпотентной длины Хухро – Шумяцкого. Предложены и изучены конструкции формаций групп, заданных с помощью корадикально определяемых цепей подгрупп, которые были применены для характеристики регулярных формаций Луккини – Немми и класса σ -нильпотентных групп. Разработаны эффективные алгоритмы вычисления \mathfrak{F} -корадикала, \mathfrak{F} -гиперцентра, \mathfrak{F} -радикала и σ -свойств групп перестановок.

Новизна разработанных методов подтверждается тем, что с помощью них был решен целый ряд открытых задач теории групп и их классов: Т. Хоукса (1971), А. Баллестера-Болинше и М.Д. Перец-Рамос (1999), Б. Хёфлинга (2001), М. Сюй и Ц. Чжан (2005), Ф.Ж. Руссо (2012), Я. Ли и С. Ли (2012) года. Дополнены решения задач 9.74 и 12.7 из Коуровской тетради.

Личный вклад соискателя учёной степени в результаты диссертации

Диссертационная работа выполнена соискателем лично при консультировании доктора физико-математических наук, профессора Александра Фёдоровича Васильева. Совместно с ним были определены актуальные научные направления, проблемы и связанные с ними задачи. Их решение было реализовано соискателем самостоятельно.

По теме диссертационной работы: без соавторов опубликовано 28 статей [1–А, 2–А, 4–А, 5–А, 6–А, 7–А, 9–А, 10–А, 11–А, 12–А, 13–А, 14–А, 15–А, 16–А, 18–А, 20–А, 22–А, 24–А, 26–А, 28–А, 29–А, 30–А, 33–А, 34–А, 36–А, 37–А, 38–А, 39–А]; на паритетных основах с научным консультантом опубликовано 7 статей [3–А, 8–А, 19–А, 23–А, 25–А, 27–А, 35–А]; на паритетных основах с научным консультантом и/или его учениками опубликованы 4 статьи [17–А, 21–А, 31–А, 32–А].

Положения, выносимые на защиту

1. Теория арифметических графов конечных групп и их классов:

— описание связей между графом группы и графами системы её секций (теорема 2.1.5), описание строения группы с заданным графом (теоремы 2.2.7, 2.2.9 и 2.3.5) и решение задачи распознавания групп (с точностью до класса) по данному арифметическому графу (теорема 2.3.6);

— решение задачи Ф.Ж. Руссо 2012 года о компонентах связности силовского графа и графа Грюнберга – Кегеля группы (теорема 2.2.6);

— применение графов для алгоритмического дополнения решения задачи 9.74 из Коуровской тетради (теорема 2.3.11);

— решение задачи Т. Хоукса 1971 года о пересечении радикала фиттингова типа с \mathcal{S} -ключевой максимальной подгруппой (теорема 2.4.1).

2. Результаты о характеристических подгруппах гиперцентрального типа:

— решение проблемы Л.А. Шеметкова 1997 года: описание решётки Z -насыщенных формаций (теорема 3.1.3); критерии насыщенности и разрешимой насыщенности Z -насыщенной формации не обязательно разрешимых групп, решение задачи А. Баллестера-Болинше и М.Д. Перец-Рамос 1999 года (теоремы 3.1.5 и 3.1.7);

— решение проблемы Л.А. Шеметкова 1995 года об описании формаций Бэра – Шеметкова для наследственных формаций с помощью методов Z -насыщенных формаций и N -критического графа (теорема 3.2.1);

— решение задач перечисления формаций с условием Белоногова в \mathfrak{S} , с условием Кегеля и со свойством \mathcal{P}_2 для наследственных Z -насыщенных формаций разрешимых групп (теорема 3.3.1 и следствие 3.3.4).

3. Теоремы теории функториалов радикального типа:

— свойства алгебры функториалов фиттингова типа (теорема 4.1.2);

— функториальная длина группы и её свойства; зависимость между длинами группы и её максимальной подгруппы (теоремы 4.3.1, 4.3.3 и 4.3.9); зависимость между длиной факторизуемой группы и длинами её факторов (теорема 4.4.1);

— решение задачи Я. Ли и С. Ли 2012 года о сверхразрешимости группы (теоремы 4.2.1 и 4.2.2);

— строение насыщенных формаций, замкнутых относительно взятия произведений $F^*(G)$ -субнормальных подгрупп (теорема 4.2.6).

4. Конструкции формаций групп, заданных с помощью корадикально определяемых цепей подгрупп, и их приложения:

— строение и способы задания формаций, определяемых системами \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп (теоремы 5.1.9, 5.1.15 и 5.1.20);

— конструктивное описание наследственных регулярных формаций разрешимых групп, введённых А. Луккини и Б. Немми, и их связь с решёткой Стейница (теоремы 5.2.1 и 5.2.3);

— характеристики класса σ -нильпотентных групп и σ -нильпотентного гиперцентра с помощью формационно субнормальных подгрупп (теоремы 5.3.12 и 5.3.1).

5. Алгоритмическая теория классов конечных групп:

— полиномиальные алгоритмы вычисления \mathfrak{F} -корадикала (теорема 6.1.1), \mathfrak{F} -гиперцентра (теорема 6.2.1), \mathfrak{F} -радикала (теорема 6.3.2) группы перестановок при естественных ограничениях на \mathfrak{F} , в т.ч. решение задачи Б. Хёфлинга 2001 года;

— полиномиальные алгоритмы вычисления σ -свойств (σ -нильпотентности, σ -разрешимости, σ -субнормальности и σ - p -перестановочности) группы перестановок (теоремы 6.4.1 и 6.4.2);

— решение задач М. Суй и Ц. Чжан 2005 года о группах, у которых все подгруппы сопряжённо-перестановочны (теоремы 6.5.1 и 6.5.2).

Апробация диссертации и информация об использовании её результатов

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины». Они представлялись на пленарных докладах следующих конференций: Международная алгебраическая конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения А.И. Старостина (Екатеринбург, 2021); XIV Международная школа-конференция по теории групп, посвящённая памяти В.А. Белоногова, В.А. Ведерникова, Л.А. Шеметкова (Брянск, 2022); Международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвящённая 70-летию А.А. Махнева (Нальчик, 2022); XV Международная школа-конференция по теории групп, посвящённая 95-летию со дня рождения М.И. Каргаполова (Екатеринбург, 2024); Международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике» (Брест, 2024 и 2025); XXIV Международная конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения академика Ю.В. Линника и 110-летию со дня рождения профессора А.Б. Шидловского и 80-летию со дня рождения профессора Г.И. Архипова (Тула, 2025); V Конференция математических центров России (Красноярск, 2025).

Также был сделан сдвоенный секционный доклад на международной научной конференции «XIV Белорусская математическая конференция» (Минск, 2024) и доклады на следующих конференциях: XIII школа-конференция по теории групп «Теория групп и её приложения» (Екатеринбург, 2020); «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, 2021); 4 доклада на международных конференциях «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2021, 2022, 2023, 2024); XXI Международная научная конференция молодых учёных «Молодежь в науке — 2024» (Минск, 2024).

Результаты диссертации внедрены в учебный процесс Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, что подтверждается 4 актами о практическом использовании результатов исследования (№2 от 15.09.2021, №6 от 15.01.2025,

№7 от 19.02.2025, №8 от 19.03.2025). На основе исследований были разработаны 2 задачи на Международный турнир юных математиков (ИТЮМ 2018 и 2019).

Опубликование результатов диссертации

По теме диссертационного исследования опубликовано 39 статей в рецензируемых научных журналах, соответствующих пункту 19 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь (28 статей без соавторов), 19 препринтов и 42 сообщения в сборниках конференций (тезисы докладов и материалы). Общий объём опубликованных материалов составляет 45,85 авторского листа, в том числе: статьи в научных журналах — 28,21 авторского листа; препринты — 12,96 авторского листа; сообщения в сборниках конференций — 4,68 авторского листа.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, шести глав основной части, заключения, библиографического списка в количестве 191 наименования использованных источников (в порядке появления ссылок в тексте диссертации) и 100 наименований публикаций соискателя, и трёх приложений. Полный объём диссертации — 243 страницы, из них 22 страницы занимает библиографический список и 22 — приложения.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному консультанту — доктору физико-математических наук, профессору Александру Фёдоровичу Васильеву за постоянное внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первой главе дан аналитический обзор литературы, посвящённый разработке научных направлений, обозначенных во введении. В частности, приводятся связанные с ними известные результаты и задачи, а также формулируются новые авторские концепции, необходимые для решения научных проблем диссертации. В дальнейшем для удобства они приводятся внутри текста с номерами, начинающимися на «1». Основные результаты диссертации изложены в главах 2–6.

Разработке теории арифметических графов групп и их классов, т.е. решению проблемы **Р.1**, посвящается глава 2.

1.1.1 Определение [8–А, определение 1.1]. *Функцию $\Gamma : \{\text{группы}\} \rightarrow \{\text{графы}\}$ назовём графовой функцией.*

1.1.2 Определение [8–А, определение 1.2]. *Графовую функцию Γ назовём арифметической, а граф $\Gamma(G)$ — арифметическим, если $V(\Gamma(G))$ — подмножество множества делителей $|G|$ для любой группы G и $\Gamma(1) = \emptyset$.*

Приведём несколько примеров таких графов. Графом Хоукса³⁵ $\Gamma_H(G)$ группы G называется ориентированный граф, чьё множество вершин — $\pi(G)$ — множество простых делителей $|G|$, и (p, q) является ребром, если $q \in \pi(G/O_{p',p}(G))$. Силовским графом³⁶ $\Gamma_s(G)$ группы G называется ориентированный граф с множеством вершин $\pi(G)$, и (p, q) является ребром $\Gamma_s(G)$, если $q \in \pi(N_G(P)/PC_G(P))$

для некоторой силовской p -подгруппы P группы G . Напомним, что (p, q) -группой Шмидта называется группа Шмидта H , для которой $\pi(H) = \{p, q\}$, и которая имеет нормальную силовскую p -подгруппу. Ключевую роль в диссертации играет

1.1.8 Определение [8–А, определение 1.3]. N -критическим графом $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G назовём ориентированный граф, для которого $V(\Gamma_{Nc}(G)) = \pi(G)$, и (p, q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$, если в G имеется (p, q) -подгруппа Шмидта.

Мы будем рассматривать только арифметические графовые функции, для которых существует связь между графом группы и графами её секций. В определении 2.1.2 описывается одна из конструкций таких графов.

2.1.4 Определение [8–А, определение 2.6]. Арифметическую графовую функцию Γ назовём:

(a) $\bar{\mathbf{S}}$ -замкнутой, если $H \leq G$ влечёт $\Gamma(H) \subseteq \Gamma(G)$;

(b) $\bar{\mathbf{Q}}$ -замкнутой, если $\Gamma(G/N) \subseteq \Gamma(G)$ для любой группы G и нормальной подгруппы N группы G ;

(c) $\bar{\mathbf{D}}_0$ -замкнутой, если $\Gamma(G_1 \times \dots \times G_n) = \Gamma(G_1) \cup \dots \cup \Gamma(G_n)$ для любых групп G_1, \dots, G_n ;

(d) $\bar{\mathbf{R}}_0$ -замкнутой, если $\Gamma(G/N_1) \cup \dots \cup \Gamma(G/N_n) = \Gamma(G/\cap_{i=1}^n N_i)$ для любой группы G и её нормальных подгрупп N_1, \dots, N_n ;

(e) $\bar{\mathbf{N}}_0$ -замкнутой, если $\Gamma(N_1) \cup \dots \cup \Gamma(N_n) = \Gamma(G)$ для любой группы $G = N_1 \cdots N_n$ и её нормальных подгрупп N_1, \dots, N_n ;

(f) $\bar{\mathbf{E}}_\Phi$ -замкнутой, если $\Gamma(G/\Phi(G)) = \Gamma(G)$ для любой группы G .

Свойства введённых выше арифметических графов описывает

2.1.5 Теорема [8–А, теорема 2.7]. Верны следующие утверждения:

(1) Γ_H является $\{\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{D}}_0, \bar{\mathbf{R}}_0, \bar{\mathbf{N}}_0, \bar{\mathbf{E}}_\Phi\}$ -замкнутой арифметической графовой функцией.

(2) Γ_{Nc} является $\{\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{D}}_0, \bar{\mathbf{R}}_0, \bar{\mathbf{N}}_0\}$ -замкнутой, но не $\bar{\mathbf{E}}_\Phi$ -замкнутой, арифметической графовой функцией.

(3) Γ_s является $\{\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}_0\}$ -замкнутой, но не $\bar{\mathbf{S}}$ -замкнутой и $\bar{\mathbf{N}}_0$ -замкнутой, арифметической графовой функцией.

Дальнейшему изучению связи графа группы с графами её секций посвящены теоремы 2.1.7 и 2.1.8, а связям между арифметическими графами фиксированной группы — теорема 2.2.1. Важную роль при решении задач диссертации играет

2.2.2 Теорема [15–А, теорема 1]. Пусть G — группа. Предположим, что $\pi(G)$ разбито на два таких непересекающихся подмножества π_1 и π_2 , что между π_1 и π_2 нет рёбер в $\Gamma_s(G)$. Тогда G является прямым произведением своих холловых π_1 -подгруппы и π_2 -подгруппы.

2.2.3 Следствие. Пусть G — группа, $\Gamma \in \{\Gamma_s, \Gamma_{Nc}, \Gamma_H\}$ и $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — разбиение $\pi(G)$ такое, что σ_i — множество вершин i -ой компоненты связности $\Gamma(G)$. Тогда G является σ -нильпотентной группой.

Напомним^{44, 45}, что графом простых чисел, или графом Грюнберга – Кегеля, $\Gamma_p(G)$ группы G называется (неориентированный) граф с множеством вершин

⁴⁴Williams, J.S. Prime graph components of finite groups / J.S. Williams // J. Algebra. — 1981. — Vol. 69. — P. 487–513.

⁴⁵Кондратьев, А.С. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп / А.С. Кондратьев // Матем. сб. — 1989. — Т. 180, № 6. — С. 787–797.

$V(\Gamma_p(G)) = \pi(G)$, и $\{p, q\}$ является ребром $\Gamma_p(G)$, если G имеет элемент порядка pq . Ф.Ж. Руссо³⁷ в 2012 году поставил задачу: «Возможно ли найти связи между компонентами связности графов $\Gamma_p(G)$ и $\Gamma_s(G)$, когда G — конечная группа?» Её решение, опирающееся на теорему 2.2.2, представлено в

2.2.6 Теорема [15–А, теорема 2]. Верны следующие утверждения:

(1) Пусть G — группа. Тогда либо $\Gamma_s(G)$, либо $\Gamma_p(G)$ связан: объединение вершин компонент связности одного из этих графов является множеством вершин единственной компоненты связности другого графа.

(2) Для заданного конечного ориентированного графа Γ на множестве $\pi \subseteq \mathbb{P}$ существует группа G такая, что $\Gamma_p(G)$ является полным неориентированным графом, а $\Gamma_s(G) = \Gamma$.

Описанию строения групп с заданным N -критическим графом посвящены:

2.2.7 Теорема [14–А, теорема 3.1]. Пусть G — разрешимая группа и Γ — ориентированный граф на $\pi(G)$. Тогда и только тогда $\Gamma_{Nc}(G) = \Gamma$, когда выполняются следующие утверждения:

(1) Если $d_{\Gamma}(p, r) \geq 2$ и $\pi = \{q \mid \{(q, p), (q, r)\} \subseteq E(\Gamma)\}$, то $[x, y] \in O_{\pi}(G)$ для любых p -элемента x и r -элемента y группы G .

(2) Предположим, что $(r, p) \in E(\Gamma)$, $(p, r) \notin E(\Gamma)$, $\pi_1 = \{q \mid \{(q, p), (q, r)\} \subseteq E(\Gamma)\}$, $\pi_2 = \{r\}$, если $(r, q) \in E(\Gamma)$ для некоторого $q \in \pi_1$, и $\pi_2 = \emptyset$ в противном случае. Пусть $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Тогда $[x, R] \subseteq RO_{\pi}(G)$ для любых p -элемента x и силовой r -подгруппы R группы G .

(3) Число рёбер в Γ между r и p равно двум минус число нормальных силовских подгрупп холловой $\{r, p\}$ -подгруппы группы G для всех $r, p \in \pi(G)$.

2.2.9 Теорема [8–А, теорема 6.2]. Пусть G — группа:

(a) Если все циклы $\Gamma_{Nc}(G)$, содержащие вершину 2, имеют длину, большую трёх, то группа G разрешима.

(b) Если $\Gamma_{Nc}(G)$ не содержит циклов, то группа G дисперсивна.

Признак дисперсивности Т. Хоукса³⁵ вытекает из этой теоремы. Изучению влияния N -критического графа и графа Хоукса на строение группы посвящены также теоремы 2.2.10, 2.2.11 и 2.2.12. Преимуществом понятия арифметического графа является то, что оно может быть распространено на классы групп.

2.3.1 Определение [8–А, определение 3.1]. Пусть \mathfrak{X} — класс групп и Γ — арифметическая графовая функция. Тогда графом $\Gamma(\mathfrak{X})$ класса групп \mathfrak{X} будем называть $\bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \Gamma(G)$.

Изучению класса $\mathfrak{X}_{\Gamma} = (G \mid \Gamma(G) \subseteq \Gamma(\mathfrak{X}))$ посвящены

2.3.3 Теорема [8–А, теорема 3.3]. Пусть $\mathcal{C} \in \{\mathbf{S}, \mathbf{Q}, \mathbf{D}_0, \mathbf{R}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{E}_{\mathbb{F}}\}$ и Γ — арифметическая графовая функция. Если Γ — $\overline{\mathcal{C}}$ -замкнута, то $\mathcal{C}\mathfrak{X}_{\Gamma} = \mathfrak{X}_{\Gamma}$ для любого класса групп \mathfrak{X} .

2.3.5 Теорема [8–А, теорема 3.5]. Пусть \mathfrak{F} — класс групп. Верны следующие утверждения:

(1) \mathfrak{F}_{Γ_H} — наследственная насыщенная формация Фиттинга, обладающая локальным экраном f , где $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $\sigma(p) = \{q \mid (p, q) \in E(\Gamma_H(\mathfrak{F}))\}$; $f(p) = \emptyset$ — в противном случае.

(2) $\mathfrak{F}_{\Gamma_{Nc}}$ — наследственная разрешимо насыщенная \check{S} -формація Фиттинга, обладающая композиционным экраном f , где $f(J) = \mathfrak{F}_{\Gamma_{Nc}}$ для любой простой неабелевой $J \in \mathfrak{F}$, $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $\sigma(p) = \{q \mid (p, q) \in E(\Gamma_{Nc}(\mathfrak{F}))\} \cup \{p\}$; $f(J) = f(p) = \emptyset$ — в противном случае.

(3) \mathfrak{F}_{Γ_s} — \check{S} -формація, содержащая все нильпотентные $\pi(\mathfrak{F}_{\Gamma_s})$ -группы.

В⁴⁶ начато изучение простых групп, однозначно определяемых своим графом простых чисел. Это привело к задаче распознавания групп по графу простых чисел. С современным состоянием данной проблемы можно ознакомиться, например, в³⁴.

1.1.4 Определение [8–А, определение 1.4]. Пусть Γ — графовая функция и \mathfrak{X} — класс групп. Класс \mathfrak{X} назовём распознаваемым графовой функцией Γ , если из $G_1 \in \mathfrak{X}$ и $\Gamma(G_1) = \Gamma(G_2)$ всегда следует, что $G_2 \in \mathfrak{X}$.

Класс групп будем называть **DM**-замкнутым, если он вместе со всякой своей группой, представленной в виде прямого произведения своих подгрупп, содержит и все её прямые множители. Задачу распознавания групп по арифметическому графу с точностью до класса решает

2.3.6 Теорема [8–А, теорема 4.2]. Пусть Γ — \mathbf{D}_0 -замкнутая арифметическая графовая функция и $\mathfrak{X} = \{\mathbf{D}_0, \mathbf{DM}\}$ -замкнутый класс групп. Класс групп \mathfrak{X} распознаётся Γ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_\Gamma$.

Напомним, что формація \mathfrak{F} называется формацией Шеметкова (кратко — \check{S} -формацией) в классе групп \mathfrak{X} , если всякая минимальная не \mathfrak{F} -группа из \mathfrak{X} является или группой Шмидта, или группой простого порядка (см. монографии^{18, 20, 22, 23}). Проблеме распознавания классов групп по графу посвящены теорема 2.3.7 и следующий развивающий критерий p -нильпотентности Фробениуса результат, частный случай которого для насыщенных формацій был получен А. Баллестером-Болинше и М.Д. Перец-Рамос⁴⁷.

2.3.8 Теорема [8–А, теорема 4.4]. Пусть \mathfrak{F} — формація, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\sigma(p) = \{q \mid (p, q) \in E(\Gamma_{Nc}(\mathfrak{F}))\}$. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) \mathfrak{F} — наследственная разрешимо насыщенная \check{S} -формація Фиттинга, обладающая композиционным экраном f , где $f(J) = \mathfrak{F}$ для любой простой неабелевой $J \in \mathfrak{F}$, $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$; иначе $f(J) = f(p) = \emptyset$.

(2) \mathfrak{F} — наследственная \check{S} -формація.

(3) \mathfrak{F} распознаётся Γ_{Nc} .

(4) π -группа G принадлежит \mathfrak{F} тогда и только тогда, когда $N_G(P)/C_G(P) \in \mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для любых p -подгруппы P группы G и $p \in \pi$.

Л.А. Шеметков поставил задачу 9.74 в Коуровскую тетрадь: «найти все наследственные локальные \check{S} -формації \mathfrak{F} конечных групп». Она была решена С.Ф. Каморниковым в 1994 году с помощью ограничений на локальный экран \mathfrak{F} и минимальные не \mathfrak{F} -группы. С помощью свойств N -критического графа получена

⁴⁶Chen, G.Y. A new characterization of sporadic simple groups / G.Y. Chen // Algebra Colloq. — 1996. — Vol. 3, № 1. — P. 49–58.

⁴⁷Ballester-Bolinches, A. Two questions of L.A. Shemetkov on critical groups / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. — 1996. — Vol. 179. — P. 905–917.

2.3.11 Теорема [33–А, теорема 2]. Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ — множество простых чисел, не превышающих n , π_i — подмножество π с $p_i \in \pi_i$. Предположим, что \mathfrak{F} — локальная формация с $\pi(\mathfrak{F}) = \pi$ и экраном f , где $f(p_i) = \mathfrak{G}_{\pi_i}$. За $O(n^2)$ операций можно проверить, является ли \mathfrak{F} \check{S} -формацией разрешимых групп.

Согласно⁴⁸, насыщенный гомоморф разрешимых групп \mathcal{G} называется скелетным, если он удовлетворяет следующему условию: $G \in \mathcal{G}$, если разрешимая группа G имеет минимальную нормальную подгруппу N , такую что $G/N \in \mathcal{G}$ и N имеет единственный класс сопряжённости дополнений в G . Заметим, что существует наименьший по включению скелетный класс групп \mathcal{S} .

Т. Хоукс⁴⁹ предложил следующее определение. Пусть \mathcal{G} — класс групп. Главный фактор H/K группы G называется \mathcal{G} -ключевым, если $G/H \in \mathcal{G}$, а $G/K \notin \mathcal{G}$. Максимальная подгруппа M группы G называется \mathcal{G} -ключевой, если она дополняет некоторый \mathcal{G} -ключевой главный фактор группы G . Т. Хоукс доказал, что $F(G) \cap M = F(M)$ и $O_\pi(G) \cap M = O_\pi(M)$ для разрешимой группы G и её \mathcal{S} -ключевой максимальной подгруппы M . Им в 1971 году была поставлена задача описания наследственных классов Фиттинга разрешимых групп, для которых верен аналог вышеизложенного результата. Данная задача решена с помощью полученных результатов об N -критическом графе.

2.4.1 Теорема [22–А, теорема 1]. Пусть \mathfrak{F} — непустой наследственный класс Фиттинга разрешимых групп. Тогда и только тогда в каждой разрешимой группе G выполняется $G_{\mathfrak{F}} \cap M = M_{\mathfrak{F}}$ для каждой \mathcal{S} -ключевой максимальной подгруппы M , когда существует разбиение σ множества $\pi(\mathfrak{F})$ такое, что \mathfrak{F} является классом всех разрешимых σ -нильпотентных групп.

Глава 3 посвящена решению проблемы **Р.2**. Напомним, что главный фактор H/K группы G называется \mathfrak{F} -центральным, если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. В разделе 3.1 решается проблема Л.А. Шеметкова 1997 года.

1.2.8 Определение [20–А]. Формацию \mathfrak{F} назовём центрально насыщенной (кратко Z -насыщенной, нем. *zentral* — «центрально»), если она совпадает с классом групп, у которых все главные факторы \mathfrak{F} -центральны.

Для класса групп \mathfrak{X} через $Z\mathfrak{X}$ будем обозначать класс групп, все главные факторы которых \mathfrak{X} -центральны.

Свойства операции Z описывает теорема 3.1.1. Для Z -насыщенных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ через $\bigwedge_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ обозначим наибольшую Z -насыщенную формацию, содержащуюся в \mathfrak{F}_i для любого $i \in I$, а через $\bigvee_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ обозначим наименьшую Z -насыщенную формацию, содержащую \mathfrak{F}_i для любого $i \in I$.

3.1.3 Теорема [20–А, теорема 2]. Семейство \mathcal{F} всех Z -насыщенных формаций с операциями \wedge и \vee решёточно изоморфно подрешётке решётки подмножеств счётного множества, в частности, образует полную дистрибутивную решётку. Атомами данной решётки являются формации всех p -групп, p — простое число, и формации, порождённые простой неабелевой группой.

⁴⁸Carter, R.W. Extreme classes of finite soluble groups / R.W. Carter, B. Fischer, T.O. Hawkes // J. Algebra. — 1968. — Vol. 9. — P. 285–313.

⁴⁹Hawkes, T. Skeletal classes of soluble groups / T. Hawkes // Arch. Math. — 1971. — Vol. 22. — P. 577–589.

А. Баллестер-Болинше и М.Д. Перец-Рамос²⁹ доказали, что Z -насыщенная формация \mathfrak{F} разрешимых групп является насыщенной тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} обладает условием тензорных произведений. В этой же работе они поставили задачу распространения данного результата на класс всех групп. Через $E_p(G)$ обозначается фраттиневое p -элементарное расширение G (см.¹⁹, с. 851).

3.1.4 Определение [20–А, определение 1]. (1) Будем говорить, что формация \mathfrak{F} обладает условием тензорных произведений в классе всех групп, если для любых двух G -модулей V и W над \mathbb{F}_p верно:

$$V \rtimes G \in \mathfrak{F} \text{ и } W \rtimes G \in \mathfrak{F} \Rightarrow (V \otimes W) \rtimes G \in \mathfrak{F}.$$

(2) Будем говорить, что формация \mathfrak{F} обладает условием фраттиневых расширений примитивных групп, если $E_p(G) \in \mathfrak{F}$ для любых примитивной \mathfrak{F} -группы второго типа G и $p \in \pi(\text{Soc}(G))$.

Следующие результаты представляют решение приведённой выше задачи.

3.1.5 Теорема [20–А, теорема 4]. Z -насыщенная формация \mathfrak{F} является разрешимо насыщенной тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} обладает условием тензорных произведений в классе всех групп.

3.1.7 Теорема [20–А, теорема 5]. Разрешимо насыщенная формация \mathfrak{F} является насыщенной тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} обладает условием фраттиневых расширений примитивных групп.

Используя теорему 3.1.5, можно дополнить решение С.Ф. Каморникова⁵⁰ задачи А.Ф. Васильева 12.7 из Коуровской тетради:

3.1.10 Следствие [20–А, следствие 2]. Наследственная формация Фиттинга является композиционной тогда и только тогда, когда она Z -насыщенна.

Согласно теореме 3.1.11, класс всех разрешимых групп, ранги главных факторов которых не превосходят 2, является наследственной ненасыщенной Z -насыщенной формацией.

В 1995 году на Гомельском алгебраическом семинаре Л.А. Шеметков поставил проблему описания формаций, для которых \mathfrak{F} -гиперцентр (т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы, все главные факторы ниже которой \mathfrak{F} -центральны) совпадает с пересечением максимальных \mathfrak{F} -подгрупп (формационным аналогом гиперцентра по Бэру) в любой группе. Её решению посвящён раздел 3.2.

1.2.17 Определение [29–А, определение 1]. Будем говорить, что формация \mathfrak{F} является формацией Бэра – Шеметкова в классе групп \mathfrak{X} , если в любой \mathfrak{X} -группе пересечение всех \mathfrak{F} -максимальных подгрупп совпадает с \mathfrak{F} -гиперцентром. Если \mathfrak{X} совпадает с классом всех групп, то будем говорить, что формация \mathfrak{F} является формацией Бэра – Шеметкова.

Описанию таких формаций, в частности, были посвящены работы А.Н. Скибы³⁰, Дж. Бейдлемана и Х. Хайнекена³¹ и автора³². Используя методы арифметических графов и Z -насыщенных формаций, нами получены

⁵⁰Каморников, С.Ф. О двух задачах из “Коуровской тетради” / С.Ф. Каморников // Матем. заметки. — 1994. — Т. 55, № 6. — С. 59–63.

3.2.1 Теорема [29–А, теорема 1]. Пусть $\mathfrak{F} \neq (1)$ — наследственная формация. Следующие условия эквивалентны:

1. Формация \mathfrak{F} является формацией Бэра – Шеметкова.

2. Выполняются следующие условия:

2.1. \mathfrak{F} — наследственная Z -насыщенная формация;

2.2. Существует разбиение $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ множества \mathbb{P} , такое что $\Gamma_{N_c}(\mathfrak{F})$ — объединение полных ориентированных графов на множествах вершин $\pi_i, i \in I$;

2.3. \mathfrak{F} — формация Бэра – Шеметкова в классе всех π_i -групп для любого $i \in I$.

3.2.8 Теорема [29–А, теорема 2]. Пусть $\mathfrak{F} \neq (1)$ — наследственная формация метанильпотентных групп. Тогда и только тогда \mathfrak{F} является формацией Бэра – Шеметкова, когда формация \mathfrak{F} Z -насыщенна, и существует разбиение $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ множества \mathbb{P} такое, что $\Gamma_{N_c}(\mathfrak{F})$ — объединение полных ориентированных графов на множествах вершин $\pi_i, i \in I$.

3.2.9 Теорема [29–А, замечание 2]. Имеется несчётное множество наследственных ненасыщенных Z -насыщенных формаций \mathfrak{F} метанильпотентных групп таких, что $\Gamma_{N_c}(\mathfrak{F})$ — полный ориентированный граф на \mathbb{P} .

Следующая теорема для непустой наследственной насыщенной формации \mathfrak{F} описывает наибольшую по включению наследственную насыщенная формацию, в которой \mathfrak{F} является формацией Бэра – Шеметкова. В частности, из неё следуют основные результаты работы³⁰.

3.2.11 Теорема [30–А, теорема 1]. Пусть \mathfrak{F} — непустая наследственная насыщенная формация. Существует наибольшая по включению наследственная насыщенная формация $BS\mathfrak{F}$ такая, что \mathfrak{F} является формацией Бэра – Шеметкова в $BS\mathfrak{F}$. Если F — максимальный внутренний локальный экран \mathfrak{F} , то $BS\mathfrak{F}$ локально определяется через h , где $h(p)$ — класс всех групп, чьи $\mathbf{E}_\Phi \mathcal{M}(F(p))$ -подгруппы принадлежат \mathfrak{F} .

Применению Z -насыщенных формаций к решению задач перечисления формаций посвящён раздел 3.3. Напомним⁵¹, что формацией с условием Кегеля (кратко — \mathcal{K} -формацией) называется формация \mathfrak{F} , которая содержит всякую группу $G = AB = BC = CA$, где подгруппы A, B и C принадлежат \mathfrak{F} . Говорят⁵², что класс \mathfrak{F} имеет свойство \mathcal{P}_k , если группа G принадлежит \mathfrak{F} в том случае, когда G может быть записана в виде произведения n подгрупп A_1, A_2, \dots, A_n , таких что для каждого выбора индексов $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$ группа $A_{i_1} \cdots A_{i_k}$ принадлежит \mathfrak{F} .

1.2.19 Определение [17–А, определение 1]. Пусть \mathfrak{X} — непустой класс групп. Класс \mathfrak{F} назовём классом с условием Белоногова в классе \mathfrak{X} (кратко — \mathcal{B} -классом в \mathfrak{X}), если \mathfrak{F} содержит всякую \mathfrak{X} -группу G , которая имеет три попарно несопряжённые максимальные подгруппы, принадлежащие \mathfrak{F} .

Изучению приведённых выше семейств насыщенных формаций разрешимых групп посвящены работы А.Ф. Васильева, А. Баллестера-Болиньше, А. Мартинес-

⁵¹Васильев, А.Ф. К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. — 1987. — № 3. — С. 3–11.

⁵²Амберг, Б. Конечные группы с кратными факторизациями / Б. Амберг, Л.С. Казарин, Б. Хёфлинг // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, № 4. — С. 1251–1263.

Пастор, М. Педраза-Агульера, Б. Амберга, Л.С. Казарина, Б. Хёфлинга и др. Наследственные Z -насыщенные формации с указанными условиями описывает

3.3.1 Теорема [17–А, теорема 1]. Пусть \mathfrak{F} — наследственная Z -насыщенная формация разрешимых групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) \mathfrak{F} является \mathcal{K} -формацией.
- (2) \mathfrak{F} является \mathcal{B} -формацией в \mathfrak{S} .
- (3) \mathfrak{F} является \check{S} -формацией в \mathfrak{S} .

(4) \mathfrak{F} является насыщенной формацией, которая имеет такой полный локальный экран f , что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$.

Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называется s_F -замкнутым, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $H^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq G$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$. С помощью теоремы 3.3.3 получено

3.3.4 Следствие [32–А, следствие 2]. Для Z -насыщенной s_F -замкнутой формации \mathfrak{F} разрешимых групп эквивалентны условия:

- (1) \mathfrak{F} является \mathcal{K} -формацией;
- (2) \mathfrak{F} обладает свойством \mathcal{P}_2 ;
- (3) \mathfrak{F} является наследственной \check{S} -формацией в \mathfrak{S} .

Связь между результатами теории О. Крамера о Σ_t -замкнутых формациях и результатами В. Го и А.Н. Скибы⁵³ о формациях, содержащих систему подгрупп с ограничениями \mathfrak{F} -гиперцентральности на их пересечения и с попарно взаимно простыми индексами, устанавливают теорема 3.4.1 и её следствия.

Глава 4 посвящена решению проблемы **Р.3**. Напомним, что функториал — это функция θ , сопоставляющая с каждой группой G некоторую её подгруппу $\theta(G)$, удовлетворяющую $f(\theta(G)) = \theta(f(G))$ для любого изоморфизма $f : G \rightarrow G^*$. Верхнее произведение $\gamma_1 \star \gamma_2$ и нижнее произведение $\gamma_1 \circ \gamma_2$ функториалов γ_1 и γ_2 определяются $(\gamma_1 \star \gamma_2)(G)/\gamma_1(G) = \gamma_2(G/\gamma_1(G))$ и $(\gamma_1 \circ \gamma_2)(G) = \gamma_2(\gamma_1(G))$ соответственно. Заметим, что функции F , F^* и \tilde{F} , сопоставляющие с каждой группой G соответственно её подгруппу Фиттинга, обобщённую подгруппу Фиттинга и подгруппу $\tilde{F}(G)$, определяемую из $\tilde{F}(G)/\Phi(G) = \text{Soc}(G/\Phi(G))$, являются функториалами. Аксиоматизируя свойства подгруппы Фиттинга и её обобщений, получаем

1.3.7 Определение [25–А, определение 1]. Пусть \mathfrak{X} — нормально наследственный гомоморф. Мы будем называть функториалом фиттингова типа (кратко — \mathcal{F} -функториалом) в \mathfrak{X} функториал γ , если для любой \mathfrak{X} -группы G он удовлетворяет условиям:

- (F1) $f(\gamma(G)) \subseteq \gamma(f(G))$ для любого эпиморфизма $f : G \rightarrow G^*$.
- (F2) $\gamma(N) \subseteq \gamma(G)$ для любой $N \trianglelefteq G$.
- (F3) $C_G(\gamma(G)) \subseteq \gamma(G)$.
- (F4) $\Phi(G) \subseteq \gamma(G)$ и $\gamma(G)/\Phi(G) \subseteq \text{Soc}(G/\Phi(G))$.

Если \mathfrak{X} — класс всех групп, то \mathcal{F} -функториал в \mathfrak{X} будем называть \mathcal{F} -функториалом.

1.3.8 Теорема [25–А, теорема 1]. F — единственный \mathcal{F} -функториал в классе всех разрешимых групп.

⁵³Guo, W. On factorizations of finite groups with \mathfrak{F} -hypercentral intersections of the factors / W. Guo, A.N. Skiba // J. Group Theory. — 2011. — Vol. 14. — P. 695–708.

4.1.1 Определение [25–А, определение 2]. Мы будем называть функториал φ функториалом Фраттини, если он удовлетворяет $(F1)$, $(F2)$ и $\varphi(G) \subseteq \Phi(G)$ для каждой группы G .

Семейство \mathcal{F} -функториалов в классе всех групп достаточно обширно.

4.1.2 Теорема [25–А, теорема 2]. Пусть \mathcal{R} — множество всех функториалов фиттингова типа.

(a) $(\mathcal{R}, \vee, \wedge)$ — полная дистрибутивная решётка, F^* и \tilde{F} — её наименьший и наибольший элементы соответственно.

(b) (\mathcal{R}, \circ) — полугруппа, F^* и \tilde{F}^∞ — её нулевой и наибольший идемпотентный элементы соответственно.

(c) Если γ и φ — \mathcal{F} -функториал и функториал Фраттини соответственно, то $\varphi \star \gamma$ — \mathcal{F} -функториал и $\varphi \star \tilde{F} = \tilde{F}$.

(d) Мощность \mathcal{R} — континуум.

Теорема 4.1.8 показывает, что среди все \mathcal{F} -функториалов только F^* задаётся формацией. Характеризации подмножества \mathcal{F} -функториалов с помощью пересечения иннерайзеров главных факторов посвящена теорема 4.1.9. Приложениям конкретных \mathcal{F} -функториалов посвящён раздел 4.2.

1.3.14 Задача (Я. Ли и С. Ли⁵⁴). Пусть \mathfrak{F} — насыщенная формация, содержащая \mathcal{U} , H является нормальной подгруппой G такой, что $G/H \in \mathfrak{F}$, и $|\tilde{F}(H) : \tilde{F}(H) \cap M| \in \mathbb{P} \cup \{1\}$ для любой максимальной подгруппы M группы G . Верно ли, что $G \in \mathfrak{F}$?

4.2.1 Теорема [13–А, теорема 1]. Задача 1.3.14 имеет отрицательное решение для любой насыщенной формации \mathfrak{F} разрешимых групп, содержащей \mathcal{U} . В частности, её решение для \mathcal{U} отрицательно.

Теорема 4.2.2 показывает, что задача 1.3.14 имеет положительное решение, когда $\tilde{F}(H) \cap \Phi(G) \leq \Phi(H)$. Из этого вытекают основные результаты работ О. Крамера⁵⁵, Я. Ли и С. Ли⁵⁴ и И. Ван, Х. Вэй, Я. Ли⁵⁶.

Пусть R — подмножество элементов группы G . Напомним⁵⁷, что подгруппа H группы G называется R -субнормальной подгруппой, если H является субнормальной подгруппой в $\langle H, R \rangle$.

4.2.6 Теорема [18–А, теорема 2.1]. Пусть \mathfrak{F} — насыщенная формация. Тогда \mathfrak{F} содержит каждую группу $G = AB$, где A и B — $F^*(G)$ -субнормальные \mathfrak{F} -подгруппы, если и только если существует разбиение $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{F}_{\pi_i}$, где \mathfrak{F}_{π_i} — насыщенная формация с $\pi(\mathfrak{F}_{\pi_i}) = \pi_i$, замкнутая относительно расширений разрешимыми π_i -группами и обладающая свойством \mathcal{P}_1 .

⁵⁴Li, Y. A characterization of finite supersolvable groups / Y. Li, X. Li // Publ. Math. Debrecen. — 2012. — Vol. 80, № 3–4. — P. 359–368.

⁵⁵Kramer, O.U. Über Durchschnitte von Untergruppen endlicher auflösbarer Gruppen / O.U. Kramer // Math. Z. — 1976. — Vol. 148. — P. 89–97.

⁵⁶Wang, Y. A generalisation of Kramer’s theorem and its applications / Y. Wang, H. Wei, Y. Li // Bull. Austral. Math. Soc. — 2002. — Vol. 65. — P. 467–475.

⁵⁷Мурашко, В.И. О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. — 2012. — № 4(70). — С. 24–27.

Идея доказательства данного результата заключается в использовании свойств \mathfrak{F} -гиперцентра $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ группы G .

4.2.9 Теорема [18–А, теорема 2.1]. Пусть $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$ — разрешимо насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) Для любой группы $G = AB$ выполнено $(Z_{\mathfrak{F}}(A) \cap Z_{\mathfrak{F}}(B))_G \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.
- (2) Для любой группы $G = AB$, где A и B — \mathfrak{F} -подгруппы, выполнено $(A \cap B)_G \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.
- (3) Формация \mathfrak{F} содержит каждую группу $G = AB$, где A и B — $F^*(G)$ -субнормальные \mathfrak{F} -подгруппы.

Изучению факторизаций группы разрешимыми $F^*(G)$ -субнормальными подгруппами посвящена теорема 4.2.14.

В разделах 4.3 и 4.4 изучаются длины группы, определяемые радикалами.

1.3.13 Определение [23–А, определение 2.4]. Пусть γ — функториал. Тогда γ -ряд группы G определяется, начиная с $\gamma_{(0)}(G) = 1$, а затем по индукции $\gamma_{(i+1)}(G)$ — это прообраз $\gamma(G/\gamma_{(i)}(G))$. Наименьшее число h , такое что $\gamma_{(h)}(G) = G$, определяется как γ -длина $h_{\gamma}(G)$ группы G . Если такого числа нет, то $h_{\gamma}(G) = \infty$.

Е.И. Хухро, П. Шумяцкий²⁵ ввели для любой группы следующие длины:

- (1) Обобщённая высота Фиттинга $h^*(G)$ группы G — наименьшее число h , такое что $F_h^*(G) = G$, где $F_{(0)}^*(G) = 1$, а $F_{(i+1)}^*(G)$ — прообраз $F^*(G/F_{(i)}^*(G))$.
- (2) Пусть p — простое число, $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_{2h+1} = G$ — кратчайший нормальный ряд, в котором для нечётных i фактор G_{i+1}/G_i является p -разрешимым (возможно, тривиальным), а для чётных i фактор G_{i+1}/G_i является (непустым) прямым произведением неабелевых простых групп. Тогда $h = \lambda_p(G)$ называется не p -разрешимой длиной группы G .
- (3) $\lambda_2(G) = \lambda(G)$ — неразрешимая длина группы G .

Для вышеприведённых длин нами доказана

4.3.1 Теорема [35–А, теорема 1.2]. Пусть M — максимальная подгруппа группы G и p — простое число. Тогда

$$h^*(G) - h^*(M) \leq 2, \lambda(G) - \lambda(M) \leq 1 \text{ и } \lambda_p(G) - \lambda_p(M) \leq 1.$$

Данная теорема была получена с помощью функционального метода. Функториал γ называется радикалом Плоткина, если он удовлетворяет (F1), (F2) и (F0) $\gamma(\gamma(G)) = \gamma(G)$ для каждой группы G . Радикал Плоткина называется наследственным, если он удовлетворяет (F5) $\gamma(G) \cap N \subseteq \gamma(N)$ для любой $N \trianglelefteq G$. Наследственный радикал Плоткина γ называется наследственным радикалом Куроша-Амицура, если он удовлетворяет (F6) $\gamma(G/\gamma(G)) \simeq 1$ для каждой группы G .

4.3.3 Теорема [35–А, теорема 1.5]. Пусть γ — наследственный радикал Плоткина, который удовлетворяет $F^*(G) \subseteq \gamma(G)$ для любой группы G с $h_{\gamma}(G) < \infty$. Если M — максимальная подгруппа группы G и $h_{\gamma}(G), h_{\gamma}(M) < \infty$, то $h_{\gamma}(G) - h_{\gamma}(M) \leq 2$.

Из данной теоремы следует теорема К. Дёрка о нильпотентной длине⁵⁸.

⁵⁸Doerk, K. Über die nilpotente Länge maximaler Untergruppen bei endlichen auflösbaren Gruppen / K. Doerk // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1994. — Vol. 91. — P. 20–21.

4.3.9 Теорема [35–А, теорема 1.10]. Пусть ρ является наследственным радикалом Куроша-Амицура, содержащим разрешимый радикал, и $\gamma = \rho \star \mathbb{F}^* \star \rho$. Если M — максимальная подгруппа группы G , то $h_\gamma(G) - h_\gamma(M) \leq 1$.

Нильпотентная и σ -нильпотентная длины \mathfrak{F} -корадикала группы G обозначаются как $n_{\mathfrak{F}}(G)$ и $n_\sigma(G, \mathfrak{F})$ соответственно. Пусть \mathfrak{F} — наследственная насыщенная формация. А. Баллестер-Болинше и М.Д. Перец-Рамос⁵⁹ утверждали, что $n_{\mathfrak{F}}(G) - n_{\mathfrak{F}}(M) \in \{0, 1, 2\}$ для любой разрешимой группы G и её максимальной подгруппы M . Для разбиения σ множества \mathbb{P} всех простых чисел А. Хелиэль, М. Аль-Шомрани и А. Баллестер-Болинше⁶⁰ утверждали, что $n_\sigma(G, \mathfrak{F}) - n_\sigma(M, \mathfrak{F}) \in \{0, 1, 2\}$ для любой σ -разрешимой группы G и её максимальной подгруппы M . Указанные результаты неверны.

4.3.11 Теорема [35–А, теорема 1.11]. Пусть σ — разбиение множества \mathbb{P} с $|\sigma| > 1$. Тогда существует зависящая от σ наследственная насыщенная формация \mathfrak{F} разрешимых групп такая, что $\{n_\sigma(G, \mathfrak{F}) - n_\sigma(M, \mathfrak{F}) \mid G \text{ } \sigma\text{-разрешима, и } M \text{ — максимальная подгруппа } G\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$. В частности, существует наследственная насыщенная формация \mathfrak{F} такая, что $\{n_{\mathfrak{F}}(G) - n_{\mathfrak{F}}(M) \mid G \text{ разрешима, и } M \text{ — максимальная подгруппа } G\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ряд работ и монографий посвящён произведениям взаимно перестановочных подгрупп. Э. Джабара⁶¹ изучала нильпотентную длину таких произведений. Используя методы функториалов и Z -насыщенных формаций, нами доказана

4.4.1 Теорема [23–А, теорема 1.2]. Пусть группа G является произведением взаимно перестановочных подгрупп A и B . Тогда

$$(1) \max\{h^*(A), h^*(B)\} \leq h^*(G) \leq \max\{h^*(A), h^*(B)\} + 1.$$

(2) $\max\{\lambda_p(A), \lambda_p(B)\} = \lambda_p(G)$ для любого простого числа p . В частности, $\max\{\lambda(A), \lambda(B)\} = \lambda(G)$.

Глава 5 посвящена решению проблемы **Р.4**. Примерами подгрупп, заданных с помощью корадикально определяемых цепей подгрупп, являются \mathfrak{F} -субнормальные и K - \mathfrak{F} -субнормальные подгруппы. Данным понятиям посвящены отдельные главы монографий^{22, 23}. Конструкции формаций групп, заданных с помощью систем указанного вида подгрупп, и их свойства исследуются в разделе 5.1.

В определении 1.4.7 приводятся конструкции классов групп с \mathfrak{H} -субнормальными (K - \mathfrak{H} -субнормальными) циклическими примарными подгруппами. В частности, $v^*\mathfrak{H}$ — класс групп, у которых каждая циклическая примарная подгруппа является K - \mathfrak{H} -субнормальной для непустого гомоморфа \mathfrak{H} . Основные свойства данных классов групп приведены в теореме 5.1.7. Идею определения 1.4.7 развивает

1.4.9 Определение [11–А, определение 1.2]. Пусть $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ — класс групп, все \mathfrak{H} -подгруппы которых являются \mathfrak{F} -субнормальными для формации \mathfrak{F} и насыщенного гомоморфа \mathfrak{H} .

⁵⁹Ballester-Bolinches, A. A Note on the \mathfrak{F} -length of maximal subgroups in finite soluble groups / A. Ballester-Bolinches, M.D. Pérez-Ramos // Math. Nachr. — 1994. — Vol. 166, № 1. — P. 67–70.

⁶⁰Heliel, A. On the σ -length of maximal subgroups of finite σ -soluble groups / A. Heliel, M. Al-Shomrani, A. Ballester-Bolinches // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, № 12. — Article 2165.

⁶¹Jabara, E. The Fitting length of a product of mutually permutable finite groups / E. Jabara // Acta Math. Hung. — 2019. — Vol. 159, № 1. — P. 206–210.

Свойства $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ описывает

5.1.9 Теорема [11–А, теорема 3.1]. Пусть \mathfrak{H} — насыщенный гомоморф, \mathfrak{F} — наследственная формация и каждая примитивная секция всякой $(\mathbf{E}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})$ -группы принадлежит \mathfrak{F} . Тогда $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ является наследственной формацией.

Связь $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ с Z -насыщенными формациями устанавливает

5.1.13 Теорема. Пусть \mathfrak{H} — насыщенный гомоморф и \mathfrak{F} — наследственная формация. Если \mathfrak{F} содержит всякую группу, все \mathfrak{H} -подгруппы которой \mathfrak{F} -субнормальны (K - \mathfrak{F} -субнормальны), то \mathfrak{F} — Z -насыщенная формация.

Условия (разрешимой) насыщенности $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ приведены в

5.1.15 Теорема [11–А, теорема 3.2]. Пусть \mathfrak{H} — насыщенный гомоморф, а \mathfrak{F} — наследственная формация.

(1) Если \mathfrak{F} является насыщенной формацией, то $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ является наследственной насыщенной формацией.

(2) Если \mathfrak{F} является разрешимо насыщенной формацией и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}$, то $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ является наследственной разрешимо насыщенной формацией.

Для операции v^* предыдущий результат можно усилить.

5.1.18 Теорема [34–А, теорема 2]. Пусть \mathfrak{H} — наследственный гомоморф. Тогда $v^*\mathfrak{H}$ является наследственной разрешимо насыщенной формацией. В частности, если \mathfrak{H} состоит из разрешимых групп, то $v^*\mathfrak{H}$ является насыщенной формацией.

Для случая (1) теоремы 5.1.15 можно описать локальный экран $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$.

5.1.20 Теорема [28–А, теорема 4]. Пусть \mathfrak{H} — насыщенный гомоморф и F — максимальный внутренний локальный экран наследственной насыщенной формации \mathfrak{F} . Тогда T — максимальный внутренний локальный экран формации $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$, где $T(p) = f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F}) \cap F(p)^{\mathfrak{H}}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

А. Лукчини и Д. Немми⁶² назвали наследственную формацию \mathfrak{F} регулярной, если $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}}(G) = \{x \mid \langle x, y \rangle \in \mathfrak{F} \ \forall y \in G\}$ совпадает с пересечением \mathfrak{F} -максимальных подгрупп в любой группе G . Ими были описаны насыщенные регулярные формации \mathfrak{F} разрешимых групп в терминах минимальных не \mathfrak{F} -групп. В разделе 5.2 с помощью результатов раздела 5.1 получено конструктивное описание таких формаций.

5.2.1 Теорема [34–А, теорема 1]. Если \mathfrak{H} является наследственным гомоморфом разрешимых групп, то $v^*\mathfrak{H}$ является наименьшей по включению насыщенной регулярной формацией разрешимых групп, которая содержит \mathfrak{H} . В частности, непустая наследственная насыщенная формация \mathfrak{F} разрешимых групп является регулярной тогда и только тогда, когда $v^*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Теорема 5.2.2 описывает локальный экран насыщенных регулярных формаций разрешимых групп. Напомним, что супернатуральное число — это формальное произведение $\omega = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(\omega)}$, где $v_p(\omega)$ может быть нулём, натуральным числом или бесконечностью. Множество \mathbb{SN} всех супернатуральных чисел с операциями lcm и gcd является полной дистрибутивной решёткой, которая называется решёткой Стейница. Обозначим через Reg множество всех насыщенных регулярных непустых формаций разрешимых групп. Для любых насыщенных регулярных формаций \mathfrak{F}_1 и

⁶²Lucchini, A. The non- \mathfrak{F} graph of a finite group / A. Lucchini, D. Nemmi // Math. Nachr. — 2021. — Vol. 294, № 10. — P. 1912–1921.

\mathfrak{F}_2 разрешимых групп корректно определены наименьшая насыщенная формация $\mathfrak{F}_1 \vee_{reg} \mathfrak{F}_2$ разрешимых групп, содержащая \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 , и наибольшая насыщенная регулярная формация $\mathfrak{F}_1 \wedge_{reg} \mathfrak{F}_2$ разрешимых групп, содержащаяся в \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 .

5.2.3 Теорема [34–А, теорема 4]. Решётка $(\text{Reg}, \vee_{reg}, \wedge_{reg})$ изоморфна решётке Стейница. В частности, является полной дистрибутивной решёткой.

Из данной теоремы следуют основные результаты работы⁶³.

В разделе 5.3 изучается класс σ -нильпотентных групп и его гиперцентр.

1.4.13 Определение [19–А, определение 1]. Пусть \mathfrak{F} — формация. Мы будем называть подгруппу T группы G слабым K - \mathfrak{F} -субнормализатором H в G , если H является K - \mathfrak{F} -субнормальной в T и если H является K - \mathfrak{F} -субнормальной в $M \leq G$ и $T \leq M$, то $T = M$.

5.3.1 Теорема [19–А, теорема 1]. Пусть \mathfrak{F} — наследственная формация. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Пересечение всех слабых K - \mathfrak{F} -субнормализаторов всех циклических примарных подгрупп совпадает с \mathfrak{F} -гиперцентром в каждой группе.

(2) Пересечение всех слабых K - \mathfrak{F} -субнормализаторов всех силовских подгрупп совпадает с \mathfrak{F} -гиперцентром в каждой группе.

(3) Существует разбиение $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ множества \mathbb{P} такое, что \mathfrak{F} -гиперцентр совпадает с σ -нильпотентным гиперцентром в каждой группе.

(4) Существует разбиение $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ множества \mathbb{P} такое, что $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{F}_{\pi_i}$, где \mathfrak{F}_{π_i} — наследственная формация с $\pi(\mathfrak{F}_{\pi_i}) = \pi_i$ и \mathfrak{F}_{π_i} совпадает с классом всех π_i -групп для всех $i \in I$ с $|\pi_i| \geq 2$.

1.4.12 Определение [27–А, определение 1]. Пусть \mathfrak{F} — формация и R — подгруппа группы G . Подгруппу H группы G назовём R - K - \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой, если H является K - \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой в $\langle H, R \rangle$.

5.3.12 Теорема [27–А, теорема 1]. Пусть \mathfrak{F} — наследственная формация. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) \mathfrak{F} содержит каждую группу G , все циклические примарные подгруппы которой являются $F^*(G)$ - K - \mathfrak{F} -субнормальными.

(2) \mathfrak{F} содержит каждую группу G , все силовские подгруппы которой являются $F^*(G)$ - K - \mathfrak{F} -субнормальными.

(3) Существует разбиение σ множества \mathbb{P} такое, что \mathfrak{F} является классом всех σ -нильпотентных групп.

Наследственные формации Бэра–Шеметкова $\mathfrak{F} = v^* \mathfrak{F}$ описаны в теореме 5.3.11. Аналог теоремы 5.3.12 для произведений получен в теореме 5.3.15.

Глава 6 посвящена решению проблемы **Р.5**. Мы используем стандартные вычислительные соглашения для абстрактных конечных групп, снабжённых процедурами полиномиального времени для вычисления произведений и обратных элементов. Здесь под заданием подгруппы понимается задание порождающего её множества перестановок. Важным фактом является то, что можно рассматривать только группы вида $G = \langle S \rangle \leq S_n$ с $|S| \leq n^2$. Это следует из того, что при необходимости можно применить алгоритм Симса.

⁶³Ballester-Bolinches, A. The lattice of formations with the Shemetkov property / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, X. Yi // J. Algebra Appl. — 2024. — Article 2550308.

1.5.5 Определение [26–А, определение 2], [36–А, определение 2]. Пусть f — функция, которая приводит в соответствие каждому главному фактору H/K группы G значение 0 или 1 и удовлетворяет следующим условиям:

(1) $f(H/K, G) = f(M/N, G)$, если факторы H/K и M/N являются G -изоморфными главными факторами группы G ;

(2) $f(H/K, G) = f((H/N)/(K/N), G/N)$ для любой нормальной подгруппы $N \trianglelefteq G$ с $N \leq K$.

Такие функции f будем называть функциями главных факторов. Обозначим через $\mathcal{C}(f)$ класс групп

$$\mathcal{C}(f) = \{G \mid G \simeq 1 \text{ или } f(H/K, G) = 1 \ \forall \text{ главного фактора } H/K \text{ группы } G\}.$$

(3) Обозначим через $Z(G, f)$ такую наибольшую нормальную подгруппу группы G , что $f(H/K, G) = 1$ для каждого главного фактора H/K группы G , находящегося ниже неё.

Если f проверяет, является ли H/K \mathfrak{F} -центральным в G , то f является функцией главных факторов, $\mathcal{C}(f) = Z\mathfrak{F}$ и $Z(G, f) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Определение 1.5.7 [26–А, определение 1]. Класс групп \mathfrak{X} называется P -распознаваемым, если для любых $K \trianglelefteq G \leq S_n$ существует полиномиальный алгоритм (от n), который проверяет, принадлежит ли факторгруппа G/K классу \mathfrak{X} или нет.

Следующие теоремы описывают условия, при которых имеются полиномиальные алгоритмы вычисления классических характеристических подгрупп: \mathfrak{F} -корадикала, \mathfrak{F} -радикала и \mathfrak{F} -гиперцентра.

6.1.1 Теорема [26–А, теорема 1]. Пусть f — функция главных факторов и $f(H/K, G)$ вычисляется за полиномиальное время от n для любой группы $G \leq S_n$ и её главного фактора H/K . Тогда формация $\mathfrak{F} = \mathcal{C}(f)$ является P -распознаваемой, и $G^{\mathfrak{F}}$ может быть вычислен за полиномиальное время от n для любой $G \leq S_n$.

Теорема 6.1.7 посвящена эффективной проверке подгруппы на \mathfrak{F} -субнормальность и на K - \mathfrak{F} -субнормальность. Как показано в теореме 6.1.8, композиционные формации, значения композиционного экрана которых могут быть вычислены за полиномиальное время, удовлетворяют предположению теоремы 6.1.1.

6.2.1 Теорема [36–А, теорема 1]. Пусть f — функция главных факторов и $f(H/T, G)$ вычисляется за полиномиальное время от n для любых $G \leq S_n$ и её главного фактора H/T . Тогда $Z(G/K, f)$ определена корректно и может быть вычислена за полиномиальное время от n для любых $K \trianglelefteq G \leq S_n$.

Полиномиальный алгоритм вычисления \mathfrak{F} -гиперцентра предложен в теореме 6.2.7 для композиционных формаций, значения композиционного экрана которых могут быть вычислены за полиномиальное время. Вычислительным аспектам формаций сверхразрешимого типа посвящена теорема 6.2.9.

В 2001 году Б. Хёфлинг⁴⁰ поставил задачу найти эффективные алгоритмы вычисления \mathfrak{F} -радикала, используя структуру класса \mathfrak{F} . Её решает

6.3.1 Теорема [37–А, теорема 1]. Пусть \mathfrak{F} — композиционная формация Фиттинга, определяемая экраном f таким, что $f(J)$ является формацией Фиттинга для любой простой группы J . Предположим, что $(G/K)_{f(J)}$ может быть вычис-

лен за полиномиальное время от n для любых $K \trianglelefteq G \leq S_n$ и простой группы J . Тогда $(G/K)_\mathfrak{F}$ может быть вычислен за полиномиальное время от n для любых $K \trianglelefteq G \leq S_n$.

В теоремах 6.3.11 и 6.3.13 обсуждается вычисление различных длин группы.

А.Н. Скиба на Гомельском алгебраическом семинаре дал следующее определение σ -свойства: « σ -свойство группы — это любое её свойство, зависящее от σ и не накладывающее ограничений на σ ». Напомним⁴³, что подгруппа H группы G называется σ -перестановочной, если для каждого $\sigma_i \in \sigma$ существует σ_i -холлова подгруппа $H_i \leq G$ такая, что для любого $x \in G$ выполняется равенство $HH_i^x = H_i^x H$. Данное понятие на класс всех групп расширяет

1.5.9 Определение [7–А, определение 2]. Подгруппу H группы G назовём σ - p -перестановочной, если для каждого $\sigma_i \in \sigma$ существует такой \mathfrak{G}_{σ_i} -проектор H_i группы G , что для любого $x \in G$ выполняется $HH_i^x = H_i^x H$.

Решению алгоритмических задач теории σ -свойств групп посвящены:

6.4.2 Теорема [38–А, теорема 2]. Пусть $H, K \leq G \leq S_n$ с $K \trianglelefteq G$ и σ — разбиение $\pi(G)$. За полиномиальное время от n можно проверить:

- (1) Является ли G/K σ -нильпотентной, и вычислить σ -нильпотентный корадикал G/K .
- (2) Является ли H/K σ -субнормальной в G/K .
- (3) Является ли H/K σ - p -перестановочной в G/K .
- (4) Является ли G/K σ -разрешимой. В случае положительного ответа, является ли H/K σ -перестановочной в G/K .
- (5) Является ли G/K σ -разрешимой $P\sigma T$ -группой.

6.4.3 Теорема [38–А, теорема 3]. Пусть $H, K \leq G \leq S_n$ с $K \trianglelefteq G$. В каждом из следующих случаев за полиномиальное время от n :

- (1) Можно найти наименьшее разбиение σ множества $\pi(G)$, для которого G/K является σ -нильпотентной.
- (2) Можно найти наименьшее разбиение σ множества $\pi(G)$, для которого G/K является σ -разрешимой.
- (3) Можно найти наименьшее разбиение σ множества $\pi(G)$, для которого H/K является σ - p -перестановочной в G/K . В частности, если G/K является разрешимой, то можно найти наименьшее разбиение σ множества $\pi(G)$, для которого H/K является σ -перестановочной в G/K .

Напомним, что группа называется ЕСР-группой⁶⁴, если каждая её подгруппа сопряжённо-перестановочна. М. Сюй и Ц. Чжан в 2005 году были поставлены задачи:

- (1) Является ли каждая ЕСР- p -группа регулярной для $p = 3$?
- (2) Образуется ли класс всех конечных ЕСР-групп многообразием или формацией?

В частности, в (2) спрашивается, существует ли ЕСР-корадикал во всякой группе. Используя систему компьютерной алгебры GAP, в теоремах 6.5.1 и 6.5.2 приведено отрицательное решение этих задач.

⁶⁴Xu, M. On conjugate-permutable subgroups of a finite group / M. Xu, Q. Zhang // Algebra Colloquium. — 2005. — Vol. 12, № 04. — P. 669– 676.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе разработаны новые методы изучения характеристических подгрупп радикального, корадикального и гиперцентрального типов, которые были применены для описания строения групп и их классов по заданным свойствам указанных подгрупп, решения проблем Л.А. Шеметкова 1995 и 1997 годов и ряда задач (Т. Хоукса 1971 года, А. Баллестера-Болинше и М.Д. Перец-Рамос 1999 года, Б. Хёфлинга 2001 года, М. Сюй и Ц. Чжан 2005 года, Ф.Ж. Руссо 2012 года, Я. Ли и С. Ли 2012 года), а также получения эффективных алгоритмов вычисления указанных подгрупп и распознавания связанных с ними классов групп. При решении задач диссертации существенную роль играла разработанная в ней теория арифметических графов групп и их классов.

Основные научные результаты диссертации

1. Теория арифметических графов групп и их классов, её приложения. Введены определения арифметического графа группы и класса групп. Предложена конструкция построения арифметических графов. Решена задача распознавания класса групп арифметической графовой функцией [8–А, 43–А, 63–А, 64–А, 66–А, 86–А, 94–А, 99–А]. Введён N -критический граф группы. Изучены связи графа Хоукса, силовского и N -критического графов группы с соответствующими графами её секций [8–А, 24–А, 52–А, 68–А, 78–А]. Установлены связи между свойствами группы и свойствами её графов (графа Хоукса, силовского и N -критического) [8–А, 9–А, 14–А, 15–А, 21–А, 67–А, 69–А, 85–А]. Решена задача Ф.Ж. Руссо 2012 года о связи силовского графа и графа Грюнберга – Кегеля (простых чисел) группы [15–А, 89–А]. Получено алгоритмическое дополнение решения проблемы 9.74 из Коуровской тетради [5–А, 33–А, 57–А, 84–А, 96–А]. С помощью N -критического графа класса групп решена задача Т. Хоукса 1971 года о пересечении радикала Фиттингова типа с \mathcal{S} -ключевой максимальной подгруппой [22–А].

2. Результаты о характеристических подгруппах гиперцентрального типа, их приложения. Решена проблема Л.А. Шеметкова 1997 года об описании Z -насыщенных формаций: описаны свойства операции Z на классах групп, установлена структура решётки Z -насыщенных формаций, решена задача А. Баллестера-Болинше и М.Д. Перец-Рамос 1999 года о распространении критерия насыщенности Z -насыщенной формации разрешимых групп на формации произвольных групп. Полученные результаты позволили дополнить решение проблемы 12.7 из Коуровской тетради о композиционности наследственной формации Фиттинга [20–А, 74–А, 100–А]. Для наследственных формаций решена проблема Л.А. Шеметкова 1995 года (об описании формаций Бэра – Шеметкова) с помощью методов арифметических графов и Z -насыщенных формаций. Построены примеры ненасыщенных таких формаций разрешимых групп. Для наследственной насыщенной формации \mathfrak{F} доказано, что существует наибольшая по включению наследственная насыщенная формация, в которой \mathfrak{F} является формацией Бэра – Шеметкова [10–А, 19–А, 29–А, 30–А, 75–А, 77–А, 98–А, 100–А]. Описаны все наследственные Z -насыщенные формации разрешимых групп: с условием Кегеля, с условием Бе-

лоногова в \mathfrak{S} и со свойством \mathcal{P}_2 [17–А, 32–А]. Описана связь между результатами теории О. Крамера о Σ_t -замкнутых формациях и результатами В. Го и А.Н. Скибы о формациях, содержащих систему подгрупп с попарно взаимно простыми индексами и с ограничениями \mathfrak{F} -гиперцентральности на их пересечения [31–А, 82–А, 93–А].

3. Теоремы теории функториалов радикального типа, их приложения. Описаны решётка функториалов фиттингова типа и методы их построения [3–А, 25–А, 41–А, 48–А, 76–А, 83–А]. Используя функториальный метод Бэра – Плоткина, введена функториальная длина группы. Установлена связь между определяемыми радикалом Плоткина длинами группы и её максимальной подгруппы. В частности, получена связь между введёнными Е.И. Хухро и П. Шумяцким обобщёнными высотами Фиттинга (не p -разрешимыми длинами) группы и её максимальной подгруппы. Опровергнуты аналогичные результаты работ⁵⁹ и⁶⁰ [23–А, 35–А, 58–А]. Получены оценки обобщённой высоты Фиттинга и не p -разрешимой длины взаимно перестановочного произведения двух подгрупп в зависимости от их соответствующих длин [23–А, 51–А, 73–А, 79–А]. Получено отрицательное решение задачи Я. Ли и С. Ли 2012 года о сверхразрешимости группы, описаны группы, для которых задача имеет положительное решение [13–А, 46–А, 65–А, 72–А, 90–А]. Описаны все насыщенные формации, замкнутые относительно взятия произведений $F^*(G)$ -субнормальных подгрупп. Найдены условия разрешимости произведения $F^*(G)$ -субнормальных подгрупп, когда один из множителей нильпотентен [16–А, 18–А, 70–А].

4. Конструкции формаций групп, заданных с помощью корадикально определяемых цепей подгрупп, и их приложения. Предложена конструкция классов групп с заданными системами формационно субнормальных канонических подгрупп, включающая как частный случай предложенную А.Ф. Васильевым и Т.И. Васильевой конструкцию $w\mathfrak{F}$. Найдены условия, при которых данные классы являются (насыщенными, разрешимо насыщенными) формациями. Описан локальный экран таких формаций, при их насыщенности [2–А, 4–А, 6–А, 11–А, 28–А, 39–А, 62–А, 71–А, 87–А]. Получено конструктивное описание насыщенных регулярных формаций разрешимых групп, введённых А. Луккини и Б. Немми, и установлен решёточный изоморфизм между решёткой данных формаций и решёткой Стейница [34–А, 56–А, 81–А, 100–А]. Получена характеристика σ -нильпотентного гиперцентра в терминах формационно субнормальных подгрупп [19–А, 42–А, 47–А, 88–А]. Установлена характеристика класса всех σ -нильпотентных групп в терминах $F^*(G)$ - K - \mathfrak{F} -субнормальных силовских подгрупп [1–А, 27–А, 40–А, 45–А, 59–А, 60–А, 61–А].

5. Алгоритмическая теория классов групп. Получены полиномиальные алгоритмы вычисления \mathfrak{F} -корадикала и \mathfrak{F} -гиперцентра групп перестановок для широкого семейства формаций \mathfrak{F} , включающего Z -насыщенные; предложены алгоритмы проверки подгруппы на \mathfrak{F} -субнормальность и K - \mathfrak{F} -субнормальность [26–А, 36–А, 50–А, 53–А, 80–А, 92–А, 95–А, 97–А]. Для композиционной формации \mathfrak{F} предложены полиномиальные алгоритмы вычисления \mathfrak{F} -радикала и связанных с ним длин групп перестановок, тем самым решена задача Б. Хёфлинга

2001 года [37–А, 54–А]. Предложены алгоритмы вычисления σ -свойств группы [7–А, 38–А, 44–А, 55–А]. Получены отрицательные ответы на задачи М. Сюй и Ц. Чжан 2005 года [12–А, 49–А, 91–А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы носят теоретический характер. Ввиду работ^{8, 11}, полученные результаты могут быть использованы в реализации пункта 1 (цифровые технологии и искусственный интеллект) перечня приоритетных направлений научной, научно-технической и инновационной деятельности на 2026–2030 годы, определённых Указом Президента Республики Беларусь от 4 апреля 2025 г. № 135 «О приоритетных направлениях научной, научно-технической и инновационной деятельности на 2026–2030 годы». Результаты работы лежат не только в русле развития математики в Республике Беларусь. Например, в программе фундаментальных научных исследований в Российской Федерации на долгосрочный период (2021 – 2030 годы) указывается: «Развитие алгебры остаётся важнейшей научной задачей современной математики. Среди основных разделов алгебры следует отметить теорию групп, теорию колец и алгебр, теорию категорий и гомологическую алгебру, а также вычислительную алгебру...» Отметим также, что результаты диссертации могут быть востребованы в исследованиях по теории групп, проводимых не только в Беларуси и России, но и в КНР, США, Германии, Испании, Италии, Иране, Турции, Иордании и ЮАР.

Полученные в работе алгоритмы (приложение Б) могут применяться для разработки в системах компьютерной алгебры (GAP, MAGMA) программ обработки классов групп и связанных с ними характеристических подгрупп. Они могут быть применены для изучения строения возникающих в приложениях конечных групп.

Материалы диссертации будут также полезны в образовательном процессе высших учебных заведений и при составлении задач для международных конкурсов школьников (приложение В: акты внедрения в учебный процесс №2 от 15.09.2021, №6 от 15.01.2025, №7 от 19.02.2025, №8 от 19.03.2025, свидетельство об авторстве задач).

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЁНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных журналах

- 1–А. Мурашко, В.И. О частично сопряжённо-перестановочных подгруппах конечных групп / В.И. Мурашко // Проб. физ. мат. тех. — 2013. — № 14. — С. 74–78.
- 2–А. Мурашко, В.И. О классе конечных групп с обобщённо субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2013. — № 81(6). — С. 46–52.
- 3–А. Васильев, А.Ф. О подгруппе Шеметкова-Шмида и связанных с ней подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2014. — № 84(3). — С. 23–29.
- 4–А. Мурашко, В.И. Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Сиб. матем. журн. — 2014. — Т. 55, № 6. — С. 1353–1367. Английская версия: Murashka, V.I. Classes of finite groups with generalized subnormal cyclic primary subgroups / V.I. Murashka // Sib. Math. J. — 2014. — V. 55, № 6. — P. 1105–1115.
- 5–А. Мурашко, В.И. Разрешимые формации с условием Шеметкова / В.И. Мурашко // Проб. физ. мат. тех. — 2015. — № 22. — С. 82–87.
- 6–А. Мурашко, В.И. О классе групп с экстремальными Р-субнормальными подгруппами / В.И. Мурашко // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2017. — № 105. — С. 111–115.
- 7–А. Murashka, V.I. On a generalization of the concept of S -permutable subgroup of a finite group / V.I. Murashka // Acta Math. Hungar. — 2018. — Vol. 155, № 2. — P. 221–227.
- 8–А. Васильев, А.Ф. Арифметические графы и классы конечных групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Сиб. матем. журн. — 2019. — Т. 60, № 1. — С. 55–73. Английская версия: Vasil'ev, A.F. Arithmetic graphs and classes of finite groups / A.F. Vasil'ev, V.I. Murashka // Sib. Math. J. — 2019. — Vol. 60, № 1. — P. 41–55.
- 9–А. Мурашко, В.И. Группы с заданными системами подгрупп Шмидта / В.И. Мурашко // Сиб. матем. журн. — 2019. — Т. 60, № 2. — С. 429–440. Английская версия: Murashka, V.I. Groups with prescribed systems of Schmidt subgroups / V.I. Murashka // Sib. Math. J. — 2019. — Vol. 60, № 2. — P. 334–342.
- 10–А. Murashka, V.I. A note on formations with the Shemetkov property / V.I. Murashka // Adv. Group Theory Appl. — 2020. — Vol. 10. — P. 1–7.
- 11–А. Murashka, V.I. Finite groups with given sets of \mathfrak{F} -subnormal subgroups / V.I. Murashka // Asian-European J. Math. — 2020. — Vol. 13, № 1. — Article 2050073.
- 12–А. Murashka, V.I. On groups with conjugate-permutable subgroups / V.I. Murashka // Asian-European J. Math. — 2022. — Vol. 15, № 6. — Article 2250108.
- 13–А. Murashka, V.I. On one conjecture about supersoluble groups / V.I. Murashka // Publ. Math. Debrecen — 2022. — Vol. 100, № 3-4. — P. 399–404.

- 14—А. Murashka, V.I. N -critical graph of finite groups / V.I. Murashka // Asian-European J. Math. — 2022. — Vol. 15, № 9. — Article 2250163.
- 15—А. Murashka, V.I. On the connected components of the prime and Sylow graphs of a finite group / V.I. Murashka // Arch. Math. — 2022. — Vol. 118, № 3. — P. 225–229.
- 16—А. Мурашко, В.И. О произведениях $F^*(G)$ -субнормальных подгрупп конечных групп / В.И. Мурашко // Матем. заметки. — 2022. — Т. 111, № 2. — С. 277–286. Английская версия: Murashka, V.I. On Products of $F^*(G)$ -Subnormal Subgroups of Finite Groups / V.I. Murashka // Math. Notes. — 2022. — Vol. 111, № 2. — P. 273–280.
- 17—А. Васильев, А.Ф. Конечные группы с тремя несопряженными максимальными формационными подгруппами / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко, А.К. Фурс // Матем. заметки. — 2022. — Т. 111, № 3. — С. 354–364. Английская версия: Vasil'ev, A.F. Finite Groups with Three Nonconjugate Maximal Formational Subgroups / A.F. Vasil'ev, V.I. Murashka, A.K. Furs // Math. Notes. — 2022. — Vol. 111, № 3. — P. 28–36.
- 18—А. Murashka, V.I. Products of $F^*(G)$ -subnormal subgroups of finite groups / V.I. Murashka // J. Algebra Appl. — 2022. — Vol. 22, № 9. — Article 2350184.
- 19—А. Murashka, V.I. On the σ -nilpotent hypercenter of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // J. Group Theory. — 2022. — Vol. 25, № 6. — P. 1083–1098.
- 20—А. Мурашко, В.И. К вопросам Шеметкова, Баллестера-Болиншеса и Перес-Рамос теории конечных групп / В.И. Мурашко // Матем. заметки. — 2022. — Т. 112, № 6. — С. 839–849. Английская версия: Murashka, V.I. On Questions Posed by Shemetkov, Ballester-Bolinches, and Perez-Ramos in Finite Group Theory / V.I. Murashka // Math. Notes. — Vol. 112, № 6. — P. 932–939.
- 21—А. Васильев, А.Ф. О графе Хоукса конечных групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко, А.К. Фурс // Сиб. матем. журн. — 2022. — Т. 63, № 5. — С. 1010–1026. Английская версия: Vasil'ev, A.F. On the Hawkes graphs of finite groups / A.F. Vasil'ev, V.I. Murashka, A.K. Furs // Sib. Math. J. — 2022. — Vol. 63, № 5. — P. 849–861.
- 22—А. Murashka, V.I. On a question of T. Hawkes / V.I. Murashka // Ricerche mat. — 2023. — Vol. 72. — P. 443–451.
- 23—А. Murashka, V.I. On lengths of mutually permutable products of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Acta Math. Hungar. — 2023. — Vol. 170, № 1. — P. 412–429.
- 24—А. Мурашко, В.И. Арифметические графы и факторизуемые конечные группы / В.И. Мурашко // Труды ИММ УрО РАН. — 2023. — Т. 29, № 4. — С. 181–192.
- 25—А. Мурашко, В.И. Функториальное обобщение подгруппы Фиттинга конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Алгебра и логика. — 2023. — Т. 62, № 5. — С. 593–613. Английская версия: Murashko, V.I. A functorial generalization of the Fitting subgroup in finite groups / V.I. Murashko, A.F. Vasil'ev // Algebra and Logic. — 2023. — Vol. 62, № 5. — P. 398–412.
- 26—А. Murashka, V.I. Formations of finite groups in polynomial time: \mathfrak{F} -residuals and \mathfrak{F} -subnormality / V.I. Murashka // J. Symbolic Comput. — 2024. — Vol. 122. — Article 102271.

27–А. Murashka, V.I. New characterizations of σ -nilpotent finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Ricerche mat. — 2024. — Vol. 73, № 1. — P. 611–618.

28–А. Мурашко, В.И. О классах конечных групп, определяемых системами обобщенно субнормальных подгрупп / В.И. Мурашко // Труды Института математики НАН Беларуси. — 2024. — Т. 32, № 1. — С. 25–30.

29–А. Мурашко, В.И. К вопросу Шеметкова об \mathfrak{F} -гиперцентре / В.И. Мурашко // Матем. заметки. — 2024. — Т. 115, № 5. — С. 759–771. Английская версия: Murashka, V.I. On Shemetkov's Question about the \mathfrak{F} -Hypercenter / V.I. Murashka // Math. Notes. — 2024. — Vol. 115, № 5. — P. 779–788.

30–А. Murashka, V.I. To the questions of Shemetkov and Agrawal about the generalizations of the hypercenter of finite groups / V.I. Murashka // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series. — 2024. — Vol. 60, № 4. — P. 271–279.

31–А. Балычев, С.В. О влиянии \mathfrak{F} -гиперцентра на структуру конечных мультифакторизуемых групп / С.В. Балычев, В.И. Мурашко // Труды ИММ УрО РАН. — 2024. — Т. 30, № 4. — С. 55–63.

32–А. Балычев, С.В. О формациях конечных разрешимых групп со свойством \mathcal{P}_2 / С.В. Балычев, А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Сиб. матем. журн. — 2024. — Т. 65, № 6. — С. 1102–1114. Английская версия: Balychev, S.V. On the formations of finite solvable groups with property \mathcal{P}_2 / S.V. Balychev, A.F. Vasil'ev, V.I. Murashka // Sib. Math. J. — 2024. — Vol. 65, № 6. — P. 1281–1291.

33–А. Murashka, V.I. On formations of soluble finite groups with the Shemetkov property / V.I. Murashka // Ricerche mat. — 2025. — Vol. 74. — P. 1809–1818.

34–А. Murashka, V.I. Regular saturated formations of finite soluble groups / V.I. Murashka // J. Group Theory. — 2025. — DOI: <https://doi.org/10.1515/jgth-2024-0143>.

35–А. Murashka, V.I. To the theorem of K. Doerk / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Труды Института математики НАН Беларуси. — 2025. — Т. 33, № 1. — С. 28–33.

36–А. Murashka, V.I. Formations of finite groups in polynomial time II: the \mathfrak{F} -hypercenter and its generalizations / V.I. Murashka // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. — 2025. — Vol. 31, № 1. — P. 154–165.

37–А. Мурашко, В.И. Формации конечных групп за полиномиальное время: \mathfrak{F} -радикал и \mathfrak{F} -длина / В.И. Мурашко // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2025. — № 1. — С. 14–22.

38–А. Murashka, V.I. Computing σ -properties of finite groups in polynomial time / V.I. Murashka // Comm. Algebra. — 2025. — Vol. 53, № 12. — P. 5338–5352.

39–А. Murashka, V.I. On the recognition of finite solvable groups with \mathfrak{F} -subnormal projectors / V.I. Murashka // SEMR. — 2025. — Vol. 22, № 1. — P. 853–863.

Препринты

40–А. Murashka, V.I. On partially conjugate-permutable subgroups of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Cornell University Library, arXiv: 1206.0185v1 [math.GR] 1 Jun. 2012. — 8 p.

41–A. Murashka, V.I. Generalized Fitting subgroups of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Cornell University Library, arXiv:1310.7445v1 [math.GR] 28 Oct. 2013. — 11 p.

42–A. Murashka, V.I. On generalizations of Baer's theorems about hypercenter of a finite group / V.I. Murashka // Cornell University Library, arXiv:1510.03968v1 [math.GR] 14 Oct. 2015. — 9 p.

43–A. Murashka, V.I. Arithmetic graphs of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Cornell University Library, arXiv:1510.02568v1 [math.GR] 9 Oct. 2015. — 13 p.

44–A. Murashka, V.I. On a generalization of the concept of S -permutable subgroup of a finite group / V.I. Murashka // Cornell University Library, arXiv:1610.03006v1 [math.GR] 10 Oct. 2016. — 5 p.

45–A. Murashka, V.I. On some applications of Fitting like subgroups of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Cornell University Library, arXiv:2009.04720v1 [math.GR] 10 Sep. 2020. — 10 p.

46–A. Murashka, V.I. On a generalization of one Kramer's theorem / V.I. Murashka // Cornell University Library, arXiv:2009.07830v1 [math.GR] 16 Sep. 2020. — 3 p.

47–A. Murashka, V.I. A generalization of Hall's theorem on hypercenter / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Cornell University Library, arXiv:2103.04900v2 [math.GR] 16 Aug. 2021. — 11 p.

48–A. Murashka, V.I. Fitting like subgroups of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Cornell University Library, arXiv:2103.13354v1 [math.GR] 21 Mar. 2021. — 17 p.

49–A. Murashka, V.I. On ECP-groups / V.I. Murashka // Cornell University Library, arXiv:2106.09676v1 [math.GR] 17 Jun. 2021. — 4 p.

50–A. Murashka, V.I. Formations of Finite Groups in Polynomial Time: \mathfrak{F} -residuals and \mathfrak{F} -subnormality / V.I. Murashka // Cornell University Library, arXiv:2205.12913v1 [math.GR] 25 May 2022. — 13 p.

51–A. Murashka, V.I. On the Generalized Fitting Height and Nonsoluble Length of the Mutually Permutable Products of Finite Groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // arXiv:2301.02199v1 [math.GR] 5 Jan. 2023. — 12 p.

52–A. Murashka, V.I. Arithmetic graphs and the products of finite groups / V.I. Murashka // arXiv:2303.13384v1 [math.GR] 23 Mar. 2023. — 10 p.

53–A. Murashka, V.I. Formations of Finite Groups in Polynomial Time: the \mathfrak{F} -Hypercenter / V.I. Murashka // arXiv:2407.13606 [math.GR] 18 Jul. 2024. — 11 p.

54–A. Murashka, V.I. Formations of Finite Groups in Polynomial Time: the \mathfrak{F} -Radical / V.I. Murashka // arXiv:2407.12720 [math.GR] 17 Jul. 2024. — 8 p.

55–A. Murashka, V.I. σ -properties of finite groups in polynomial time / V.I. Murashka // arXiv:2406.06466 [math.GR] 10 Jun. 2024. — 12 p.

56–A. Murashka, V.I. Constructing regular saturated formations of finite soluble groups / V.I. Murashka // arXiv:2406.18482 [math.GR] 26 Jun. 2024. — 11 p.

57–А. Murashka, V.I. A test for a local formation of finite groups to be a formation of soluble groups with the Shemetkov property / V.I. Murashka // arXiv:2405.20257 [math.GR] 30 May 2024. — 8 p.

58–А. Murashka, V.I. On the Length of a Maximal Subgroup of a Finite Group / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // arXiv:2503.24335v1 [math.GR] 31 Mar. 2025. — 7 p.

Тезисы докладов

59–А. Мурашко, В.И. On R -conjugate-permutable subgroups of finite groups / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 5–9 ноября 2012 г. : в 5 ч. / Институт математики НАН Беларуси. — Минск, 2012. — Ч. 5. — С. 65–66.

60–А. Васильев, А.Ф. О частично сопряжено-перестановочных подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Алгебра и линейная оптимизация : тез. докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию С.Н. Черникова, Екатеринбург, 14–19 мая 2012 г. / ИММ УрО РАН ; редкол. И.И. Еремин [и др.]. — Екатеринбург, 2012. — С. 29–31.

61–А. Murashka, V.I. On R -subnormal subgroups / V.I. Murashka // 9-th International Algebraic Conference in Ukraine : abstracts, L'viv, July 8–13, 2013 / Львовский национальный университет им. И. Франко ; редкол.: Р. Кушнир [и др.]. — Львов, 2012. — С. 133.

62–А. Мурашко, В.И. Конечные группы с заданными циклическими примарными подгруппами / В.И. Мурашко // Мальцевские чтения : тез. докл. междунар. науч. конф., Новосибирск, 13–15 ноября 2013 г. / ИМ СО РАН. — Новосибирск, 2013. — С. 98.

63–А. Murashka, V.I. Formations of finite groups and Hawkes graph / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // International conference and Phd summer school «Groups and Graphs, Algorithms and Automata» : abstracts, Yekaterinburg, 9–15 August 2015 / UrFU Publishing house; chief editor A. Makhnev. — Yekaterinburg, 2015. — P. 77.

64–А. Murashka, V.I. On Arithmetic Graphs of Finite Groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Алгебра и логика: теория и приложения : тез. докл. междунар. конф., посвящ. 70-летию В.М. Левчука. Красноярск, 24–29 июля 2016 г. / Сиб. федер. ун-т, редкол. : С.И. Башмаков, И.Н. Зотов, Я.Н. Нужин [и др.]. — Красноярск, 2016. — С. 108–109.

65–А. Мурашко, В.И. Влияние подгруппы Фиттинга и её обобщений на строение конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Математика в современном мире : тез. докл. междунар. конф., посвящ. 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, 14–19 августа 2017 г. / Изд-во Института математики : под. ред. Г.В. Демиденко. — Новосибирск, 2017. — С. 89.

66–А. Васильев, А.Ф. О построении арифметических графов конечных групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Мальцевские чтения : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 20–24 ноября 2017 г. / ИМ СО РАН. — Новосибирск, 2017. — С. 63.

67–А. Мурашко, В.И. О конечных группах, N -критический граф которых является цепью / В.И. Мурашко // Мальцевские чтения : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 20–24 ноября 2017 г. / ИМ СО РАН. — Новосибирск, 2017. — С. 84.

68–А. Васильев, А.Ф. Тройные факторизации и N -критический граф конечных групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Мальцевские чтения : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 19–22 ноября 2018 г. / ИМ СО РАН. — Новосибирск, 2018. — С. 80.

69–А. Мурашко, В.И. О конечных группах с заданным N -критическим графом / В.И. Мурашко // Мальцевские чтения : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 19–22 ноября 2018 г. / ИМ СО РАН. — Новосибирск, 2018. — С. 110.

70–А. Васильев, А.Ф. Новые характеристики класса всех конечных σ -нильпотентных групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Алгебра и ее приложения : тез. докл. междунар. конф., посвящ. 70-летию пермской алгебраической школы С.Н. Черникова, Пермь, 12–16 октября 2020 г. / ИММ УрО РАН. — Екатеринбург, 2020. — С. 6–8.

71–А. Мурашко, В.И. Группы с экстремальными обобщенно субнормальными подгруппами / В.И. Мурашко // Теория групп и её приложения : тез. докл. XIII школы-конференции по теории групп, посвящ. 85-летию В.А. Белоногова, Екатеринбург, 3–7 августа 2020 г. / ИММ УрО РАН. — Екатеринбург, 2020. — С. 75–76.

72–А. Мурашко, В.И. Арифметические графы и обобщения подгруппы Фиттинга конечных групп / В.И. Мурашко // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения А.И. Старостина : тез. докл., Екатеринбург, 4–9 октября 2021 г. / ИММ УрО РАН. — Екатеринбург, 2021. — С. 59–60.

73–А. Murashka, V.I. The generalized Fitting height of mutually permutable products of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Мальцевские чтения : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 14–19 ноября 2022 г. / ИМ СО РАН. — Новосибирск, 2022. — С. 127.

74–А. Мурашко, В.И. К вопросу Шеметкова о формациях конечных групп с \mathfrak{F} -центральными главными факторами / В.И. Мурашко // XIV международная школа-конференция по теории групп, посвященная памяти В.А. Белоногова, В.А. Ведерникова и Л.А. Шеметкова : тез. докл., Брянск, 5–11 сентября 2022 г. / ИММ УрО РАН. — Екатеринбург, 2022. — С. 47–48.

75–А. Murashka, V.I. On the \mathfrak{F} -hypercenter of finite groups / V.I. Murashka // Международная конференция по теории групп, посвященная 80-летию В.Д. Мазурова : тез. докл., Новосибирск, 2–8 июля 2023 г. / ИМ СО РАН. — Новосибирск, 2023. — С. 60.

76–А. Vasil'ev, A.F. Generalizations of Fitting subgroup and their applications / A.F. Vasil'ev, V.I. Murashka // Международная конференция по теории групп, посвященная 80-летию В.Д. Мазурова : тез. докл., Новосибирск, 2–8 июля 2023 г. / ИМ СО РАН. — Новосибирск, 2023. — С. 24.

77–А. Murashka, V.I. On hereditary Baer–Shemetkov formations of finite groups / V.I. Murashka // Мальцевские чтения : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 13–17 ноября 2023 г. / ИМ СО РАН. — Новосибирск, 2023. — С. 177.

78–А. Murashka, V.I. Hawkes, Sylow and N -critical graphs of the factorized finite groups / V.I. Murashka // Алгебра и динамические системы: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 70-летию А.А. Махнева, Нальчик, 9–15 июля 2023 г. / Издательство «Принт-центр». — Нальчик, 2023. — С. 137–140.

79–А. Мурашко, В.И. Об \mathfrak{F} -длине взаимно перестановочного произведения двух подгрупп конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Мальцевские чтения : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 11–15 ноября 2024 г. / ИМ СО РАН. — Новосибирск, 2024. — С. 175.

80–А. Мурашко, В.И. Вычислительная теория классов конечных групп / В.И. Мурашко // XV Международная школа-конференция по теории групп, посвященная 95-летию со дня рождения М.И. Каргаполова : тез. докл., Екатеринбург, 21–28 июля 2024 г. / ИММ УрО РАН, редкол.: А.А. Махнев [и др.]. — Екатеринбург, 2024. — С. 65–66.

81–А. Мурашко, В.И. О конструктивном описании регулярных насыщенных формаций разрешимых групп / Мурашко В.И. // Молодежь в науке – 2024 : тез. докл. XXI междунар. конф. молодых ученых, Минск, 29–31 октября 2024 г. : в 2 ч. / НАН Беларуси, Совет молодых ученых ; редкол.: В.Г. Гусаков (гл. ред.) [и др.]. — Минск : Беларуская навука, 2024. — Ч. 2. — С. 198–199.

82–А. Балычев, С.В. О влиянии F -гиперцентра на структуру конечных групп, имеющих систему подгрупп с попарно взаимно-простыми индексами / С.В. Балычев, В.И. Мурашко // Молодежь в науке – 2024 : тез. докл. XXI междунар. конф. молодых ученых, Минск, 29–31 октября 2024 г. : в 2 ч. / НАН Беларуси, Совет молодых ученых ; редкол.: В.Г. Гусаков (гл. ред.) [и др.]. — Минск : Беларуская навука, 2024. — Ч. 2. — С. 172–173.

Материалы конференций

83–А. Murashko, V.I. On Fitting-like subgroups of finite groups / V.I. Murashko, A.F. Vasil'ev // Теория групп и её приложения : труды междунар. школы-конф. по теории групп, посвящ. 70-летию В.В. Кабанова, Нальчик, 11–14 сентября 2014 г. / Издательство КБГУ. — Нальчик, 2014. — С. 71–73.

84–А. Murashko, V.I. Soluble formations with the Shemetkov property / V.I. Murashko // Алгебра и приложения : труды междунар. конф. по алгебре, Нальчик, 6–11 сентября 2014 г. / Издательство КБГУ; А.Х. Журтов [и др.]. — Нальчик, 2014. — С. 135–137.

85–А. Murashka, V.I. On the N -critical graph of a finite group / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // XII Белорусская математическая конференция : материалы междунар. конф., Минск, 5–10 сентября 2016 г. : в 5 ч. / Институт математики НАН Беларуси ; редкол.: С.Г. Красовский. — Минск, 2016. — Ч. 5. — С. 63–64.

86–А. Мурашко, В.И. Арифметические графы конечных групп / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Алгебра и теория алгоритмов : Всерос. конф., посвящ. 100-летию факультета матем. и комп. наук Ивановского гос. ун-та : сб. материалов, Иваново, 21–24 марта 2018 г. / Иван. гос. ун-т. — Иваново, 2018. — С. 36–38. — 1 DVD-ROM.

87–А. Мурашко, В.И. О группах с \mathfrak{F} -субнормальными экстремальными подгруппами / В.И. Мурашко // Теория групп и её приложения : материалы XII школы-конф. по теории групп, посвящ. 65-летию А.А. Махнева, Краснодар, 13–20 мая 2018 г. / Кубанский гос. ун-т : отв. ред. А.С. Кондратьев. — Краснодар, 2018. — С. 121–125.

88–А. Murashka, V.I. The generalized hypercenter of finite groups / V.I. Murashka // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории : материалы XVIII Междунар. конф., посвящ. столетию со дня рождения проф. Б.М. Бредихина, В.И. Нечаева и СБ. Стечкина, Тула, 23–26 сентября 2020 г. / Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого ; редкол. В.Н. Чубариков [и др.]. — Тула, 2020. — С. 89–90.

89–А. Murashka, V.I. On Arithmetic Graphs of Finite Groups / V.I. Murashka // XIII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22–25 ноября 2021 г. : в 2 ч. / Белорусская наука. — Минск, 2021. — Ч. 1. — С. 123.

90–А. Мурашко, В.И. Об одном применении подгруппы Фиттинга / В.И. Мурашко // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы междунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии, Казань, 22–28 августа 2021 г. / Из-во Академии наук РТ. — Казань, 2021. — Т. 60. — С. 106–107.

91–А. Мурашко, В.И. Некоторые примеры использования системы компьютерной алгебры GAP при решении открытых вопросов теории групп / В.И. Мурашко // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории : материалы XXI Междунар. конф., посвящ. 85-летию со дня рождения А.А. Карацубы, Тула, 17–21 мая 2022 г. / Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого. — Тула, 2022. — С. 76–78.

92–А. Мурашко, В.И. Вычислительная теория формаций конечных групп / В.И. Мурашко // Второй Республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования Республики Беларусь : сб. науч. тр., Могилев, 17–19 мая 2023 г. / М-во образования Респ. Беларусь, М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: В.М. Пашкевич (общ. ред.) [и др.]. — Могилев, 2023. — С. 35–36.

93–А. Мурашко, В.И. Мультифакторизуемые конечные группы с условиями \mathfrak{F} -гиперцентральности на попарные пересечения факторов / В.И. Мурашко, С.В. Балычев // Алгебра и математическая логика: теория и приложения : материалы междунар. конф., посвящ. 130-летию со дня рожд. основателя каф. алгебры Казанского ун-та чл.-корр. АН СССР Н.Г. Чеботарева и 80-летию со дня рожд. зав. каф. академиком АН РФ М.М. Арсланова, Казань 27 июня – 1 июля 2024 г. / Казанский (Приволжский) федеральный университет; редкол.: Ершов Ю.Л. [и др.]. — Казань, 2024. — С. 75–76.

94–А. Мурашко, В.И. Арифметические графы конечных групп: построение, свойства и приложения / В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы Междунар. науч.-практич. конф., Брест, 25–27 апреля 2024 г. / Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина ; под ред. А.И. Басика. — Брест : БрГУ, 2024. — С. 24–27.

95–А. Murashka, V.I. Some aspects of the computational theory of formations of finite groups / V.I. Murashka // XIV Белорусская математическая конференция, посвящённая 65-летию Института математики НАН Беларуси : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 28 октября — 1 ноября 2024 г. : в 3 ч. / Беларуская навука. — Минск, 2024. — Ч. 3. — С. 75–76.

96–А. Мурашко, В.И. Алгоритмическая проверка локальной формации конечных разрешимых групп на обладание свойством Шеметкова / В.И. Мурашко // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории : материалы XXIII Междунар. конф., посвящ. 80-летию проф. А.И. Галочкина и 75-летию проф. В.Г. Чирского, Тула, 29–31 октября 2024 г. / Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого. — Тула, 2024. — С. 28–29.

97–А. Мурашко, В.И. Перспективы развития вычислительной теории классов конечных групп / В.И. Мурашко // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы Междунар. науч.-практич. конф., Брест, 24–26 апреля 2025 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под ред. А.И. Басика. — Брест: БрГУ, 2025. — С. 18–21.

98–А. Мурашко, В.И. Об обобщениях сверхразрешимого гиперцентра конечных групп / В.И. Мурашко // IV Республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования с международным участием : сб. материалов форума, Гомель, 18–20 мая 2025 г. / М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол. : Д.Л. Коваленко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2025. — С. 50–51.

99–А. Мурашко, В.И. Арифметические графы конечных групп: результаты и задачи / В.И. Мурашко // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: материалы XXIV Междунар. конф., посвящ. 110-летию со дня рожд. академика Ю.В. Линника и 110-летию со дня рожд. проф. А.Б. Шидловского и 80-летию со дня рожд. проф. Г.И. Архипова, Тула, 14–17 мая 2025 г. / Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого. — Тула, 2025. — С. 11–14. — 1 CD-ROM.

100–А. Мурашко В.И. Обобщения гиперцентра и графы конечных групп / В.И. Мурашко // V Конференция математических центров России : материалы докл., Красноярск, 11–16 августа 2025 г. / ИВМ СО РАН. — Красноярск, 2025. — С. 37–41. — URL: https://kmc.sfu-kras.ru/conf2025/files/sbornik_2025.pdf (дата обращения: 01.10.2025).

РЭЗЮМЭ

Мурашка Вячаслаў Ігаравіч

Характарыстычныя падгрупы радыкальнага, карадыкальнага і гіперцэнтральнага тыпаў у тэорыі класаў канечных груп

Ключавыя словы: канечная група, арыфметычны граф групы, N -крытычны граф, \mathfrak{F} -радыкал, \mathfrak{F} -карадыкал, \mathfrak{F} -гіперцэнтр, Z -насычаная фармацыя, функтарыял, абагульненая нільпатэнтная вышыня групы, \mathfrak{F} -субнармальнае падгрупа, рэгулярная фармацыя, палінаміяльны алгарытм, σ -уласцівасці групы.

Мэта дысертацыйнай працы: распрацоўка метадаў тэорыі характарыстычных падгруп радыкальнага, карадыкальнага і гіперцэнтральнага тыпаў і іх сумеснага ўжывання для вырашэння адкрытых праблем тэорыі груп, а таксама атрымання эфектыўных алгарытмаў вылічэння названых падгруп.

Метады даследавання: абстрактнай тэорыі груп, тэорыі класаў груп, вылічальнай тэорыі груп, тэорыі графаў груп і функтарыялаў груп.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыі распрацавана тэорыя арыфметычных графаў груп і іх класаў, з дапамогай якой вырашаны задачы Т. Хоўкса (1971) аб перасячэнні радыкала фітынгава тыпу з \mathcal{S} -ключавой максімальнай падгрупай, Ф.Ж. Русо (2012) аб кампанентах звязнасці сілаўскага графа і графа Грюнберга – Кегеля групы, а таксама праблема Л.А. Шамяткова (1995) аб апісанні спадчынных фармацый Бэра – Шамяткова; акрамя таго, атрымана канструктыўнае дапаўненне да рашэння задачы 9.74 з Каўроўскага сшытка. Вырашана праблема Л.А. Шамяткова (1997) аб апісанні сямейства фармацый \mathfrak{F} , якія змяшчаюць кожную групу, што супадае са сваім \mathfrak{F} -гіперцэнтрам. У прыватнасці, апісана рашотка такіх фармацый, дапоўнена рашэнне задачы 12.7 з Каўроўскага сшытка і вырашана задача А. Балестэра-Балінчэ і М.Д. Перэц-Рамас (1999). У межах развіцця функтарыяльнага метаду Бэра – Плоткіна апісана алгебра функтарыялаў фітынгава тыпу, знойдзены іх прымяненні для вывучэння фактарызуемых груп і вырашэння задачы Я. Лі і С. Лі (2012) аб звышразрашальнасці групы. Распрацаваны новыя падыходы да працы з даўжынямі груп, што вызначаюцца радыкаламі і ўключаюць абагульненні нільпатэнтнай даўжыні Хухро – Шумяцкага. Прапанаваны і даследаваны канструкцыі фармацый груп, зададзеных з дапамогай карадыкальна вызначаных ланцугоў падгруп, якія былі выкарыстаны для апісання рэгулярных фармацый Лукіні – Неммі і атрымання характарызацый класа σ -нільпатэнтных груп. Атрыманы палінаміяльныя алгарытмы вылічэння \mathfrak{F} -карадыкала, \mathfrak{F} -гіперцэнтра, \mathfrak{F} -радыкала і σ -уласцівасцей груп перастановак; у тым ліку вырашана задача Б. Хёфлінга (2001).

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Вынікі дысертацыі маюць тэарэтычны характар. Яны могуць быць выкарыстаны ў далейшых даследаваннях сучаснай тэорыі канечных груп, алгарытмах у групах, іх прымяненнях, а таксама пры выкладанні спецыяльных курсаў ва ўніверсітэтах, падрыхтоўцы курсавых, дыпломных работ і дысертацый студэнтамі матэматычных спецыяльнасцей.

Вобласць прымянення: тэорыя канечных груп і іх класаў, алгарытмы ў групах.

РЕЗЮМЕ

Мурашко Вячеслав Игоревич

Характеристические подгруппы радикального, корадикального и гиперцентрального типов в теории классов конечных групп

Ключевые слова: конечная группа, арифметический граф группы, N -критический граф, \mathfrak{F} -радикал, \mathfrak{F} -корадикал, \mathfrak{F} -гиперцентр, Z -насыщенная формация, функториал, обобщённая нильпотентная высота группы, \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа, регулярная формация, полиномиальный алгоритм, σ -свойства группы.

Цель диссертационной работы: разработка методов теории характеристических подгрупп радикального, корадикального и гиперцентрального типов и их сочетанное применение для решения открытых проблем теории групп и их классов, а также получение эффективных алгоритмов вычисления указанных подгрупп.

Методы исследования: абстрактной теории групп, теории классов групп, вычислительной теории групп, теории графов групп и функториалов групп.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации разработана теория арифметических графов групп и их классов, с помощью которой решены задачи Т. Хоукса (1971) о пересечении радикала фиттингова типа с \mathcal{S} -ключевой максимальной подгруппой, Ф.Ж. Руссо (2012) о компонентах связности силовского графа и графа Грюнберга – Кегеля группы и проблема Л.А. Шеметкова (1995) об описании наследственных формаций Бэра – Шеметкова, а также получено конструктивное дополнение решения задачи 9.74 из Коуровской тетради. Решена проблема Л.А. Шеметкова (1997) об описании семейства формаций \mathfrak{F} , содержащих всякую группу, совпадающую со своим \mathfrak{F} -гиперцентром. В частности, описана решётка таких формаций, дополнено решение задачи 12.7 из Коуровской тетради и решена задача А. Баллестера-Болинше и М.Д. Перец-Рамос (1999). В рамках развития функториального метода Бэра – Плоткина описана алгебра функториалов фиттингова типа, найдены их приложения для изучения факторизуемых групп и решения задачи Я. Ли и С. Ли (2012) о сверхразрешимости группы. Разработаны новые подходы работы с длинами групп, определяемых радикалами и включающих обобщения нильпотентной длины Хухро – Шумяцкого. Предложены и изучены конструкции формаций групп, заданных с помощью корадикально определяемых цепей подгрупп, которые были применены для описания регулярных формаций Луккини – Немми и получения характеристик класса σ -нильпотентных групп. Получены полиномиальные алгоритмы вычисления \mathfrak{F} -корадикала, \mathfrak{F} -гиперцентра, \mathfrak{F} -радикала и σ -свойств групп перестановок, в т.ч. решена задача Б. Хёфлинга (2001).

Рекомендации по использованию. Результаты диссертации имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях в современной теории конечных групп, алгоритмах в группах, их приложениях и при чтении спецкурсов в университетах, подготовке курсовых, дипломных работ и диссертаций студентами математических специальностей.

Область применения: теория конечных групп и их классов, алгоритмы в группах.

SUMMARY

Murashka Viachaslau Igaravich

Characteristic subgroups of radical, residual, and hypercentral types in the theory of classes of finite groups

Keywords: finite group, arithmetic graph of a group, N -critical graph, \mathfrak{F} -hypercenter, Z -saturated formation, functorial, generalized nilpotent height of a group, \mathfrak{F} -subnormal subgroup, regular formation, polynomial algorithms, σ -properties of a group.

Aim of research: the development of methods in the theory of characteristic subgroups of radical, residual, and hypercentral types and their combined application to solve open problems in group theory, as well as obtaining efficient algorithms for calculating the specified subgroups.

Methods of research: abstract group theory, theory of classes of groups, computational group theory, theory of group graphs and functorials.

Obtained results and their novelty. In the dissertation, a theory of arithmetic graphs of groups and their classes has been developed, by means of which were solved: T. Hawkes' (1971) problem on the intersection of a Fitting-type radical with an \mathcal{S} -crucial maximal subgroup; F.G. Russo's (2012) problem on the connected components of the Sylow graph and the Gruenberg – Kegel graph of a group; and L.A. Shemetkov's (1995) problem on the description of hereditary Baer – Shemetkov formations. In addition, a constructive complement to the solution of Problem 9.74 from the Kourovka Notebook was obtained. The problem posed by L.A. Shemetkov (1997) on the description of the family of formations \mathfrak{F} containing every group that coincides with its \mathfrak{F} -hypercenter was solved. In particular, the lattice of such formations was described, the solution of Problem 12.7 from the Kourovka Notebook was complemented, and the problem of A. Ballester-Bolinches and M.D. Pérez-Ramos (1999) was solved. Within the development of the Baer – Plotkin functorial method, the algebra of Fitting-type functorials was described, and their applications to the study of factorized groups and to the solution of the problem of Y. Li and X. Li (2012) on the supersolvability of a group were found. New approaches to working with group lengths defined by radicals were developed, including generalisations of the nilpotent length proposed by E.I. Khukhro and P. Shumyatsky. Constructions of formations of groups defined by means of residually determined chains of subgroups were proposed and studied. They were applied to the description of the regular formations proposed by A. Lucchini and B. Nemmi and to obtaining characterisations of the class of σ -nilpotent groups. Polynomial-time algorithms were obtained for computing the \mathfrak{F} -residual, the \mathfrak{F} -hypercenter, the \mathfrak{F} -radical, and σ -properties of permutation groups; in particular, the problem of B. Höfling (2001) was solved.

Recommendations for use. The results of the dissertation are of a theoretical nature. They can be used in further research in the modern theory of finite groups, algorithms in groups, their applications, and for teaching special courses at universities, as well as in the preparation of course papers, theses, and dissertations by students in mathematics specialties.

Areas of applications: the theory of finite groups and their classes, algorithms in groups.

Научное издание

МУРАШКО Вячеслав Игоревич

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ РАДИКАЛЬНОГО,
КОРАДИКАЛЬНОГО И ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНОГО ТИПОВ
В ТЕОРИИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 29.01.2026. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,33.

Уч.-изд. л. 2,54. Тираж 60 экз. Заказ 40.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования

«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013 г.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий в качестве:

издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;

распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.

Ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель.