

## ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе  
**САФОНОВОЙ Инны Николаевны**  
“Проблемы теории  $\sigma$ -свойств конечных групп и их классов”,  
представленной на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук по специальности  
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

**Соответствие диссертации специальностям и отрасли науки, по которым она представлена к защите, со ссылкой на область исследования паспорта соответствующей специальности, утвержденной ВАК**

В диссертационной работе И.Н. Сафоновой “Проблемы теории  $\sigma$ -свойств конечных групп и их классов” развиваются арифметические и геометрические методы исследования конечных групп и их классов, определяемые разбиениями  $\sigma$  множества всех простых чисел, на основе которых найдены решения ряда открытых проблем теории конечных групп, теории  $\sigma$ -локальных формаций.

Проведенная в соответствии с требованиями Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий, утвержденного Указом Президента Республики Беларусь от 17.11.2004 № 560, и Положения о совете по защите диссертаций, утвержденного постановлением Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 22.02.2005 № 19 экспертиза содержания диссертационной работы и опубликованных научных работ показывает, что диссертационная работа И.Н. Сафоновой “Проблемы теории  $\sigma$ -свойств конечных групп и их классов” соответствует отрасли физико-математических наук и паспорту специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 16 января 2018 г. № 12), область исследований – теории алгебраических структур; линейная и полилинейная алгебра, теория представлений, гомологическая алгебра и алгебраическая  $K$ -теория; алгебраическая геометрия, топологическая алгебра; теории категорий и универсальной алгебры.

### **Актуальность темы диссертации**

Тематика диссертации относится прежде всего к арифметическим методам исследования групп, базирующиеся на информации о порядке группы, а также об информации о простых делителях ее порядка. Данное классическое направление исследований в теории конечных групп берет свое начало с результатов Лагранжа, доказавшего делимость порядка группы на порядки ее подгрупп, Силова, Ф. Холла о разрешимых группах, Ф. Холла и С.А. Чунихина о  $\pi$ -свойствах групп, т. е. об их свойствах относительно разбиения  $\{\pi, \pi'\}$  множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$ .

Отмеченные результаты заложили основу современной теории групп, а также нашли многочисленные применения, в том числе при доказательстве тео-

ремы Фейта–Томпсона о разрешимости групп нечетного порядка, а также при решении общей задачи классификации неабелевых простых групп.

Однако арифметические методы исследования групп в классическом понимании этого термина оказались не применимыми при решении ряда задач современной теории групп и, в частности, целого ряда открытых проблем теории  $\sigma$ -свойств групп, т. е. свойств групп относительно произвольного разбиения  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$ .

А.Н. Скибой в работах [On  $\sigma$ -properties of finite groups I, Проблемы физики, математики и техники, 2014. – № 34(4). – С. 89–96] и [On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups, Journal of Algebra, 2015, Vol. 436, 1–16] был предложен метод обобщения теории  $\pi$ -свойств групп, который связан с использованием произвольного разбиения  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$ . Создание теории  $\sigma$ -свойств групп потребовало разработки нового теоретического аппарата и создания теорий  $\sigma$ -нильпотентных и  $\sigma$ -разрешимых групп, теорий  $\sigma$ -субнормальных и  $\sigma$ -перестановочных подгрупп и многих др.

Необходимо отметить, что идеи, методы и результаты указанных работ А.Н. Скибы нашли применения в многочисленных публикациях как белорусских, так и зарубежных математиков, в том числе при изучении бесконечных групп, что указывает на актуальность, перспективность и эффективность методов теории  $\sigma$ -свойств групп.

Диссертация И.Н. Сафоновой “Проблемы теории  $\sigma$ -свойств конечных групп и их классов” посвящена развитию методов теории  $\sigma$ -свойств групп, а также решению ряда открытых проблем теории  $\sigma$ -свойств конечных групп и их классов. Тема диссертационной работы, безусловно, является актуальной и соответствует приоритетным направлениям научных исследований Республики Беларусь.

### **Степень новизны результатов, полученных в диссертации, и научных положений, выносимых на защиту**

В нижеприведенном анализе диссертации приведены основные из полученных в диссертации результатов по главам.

**Глава 2.** Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется  $\sigma$ -перестановочной в  $G$  (А.Н. Скиба, 2015), если  $G$   $\sigma$ -полна, т. е.  $G$  имеет холлову  $\sigma_i$ -подгруппу для всех  $i \in I$  и  $A$  перестановочна со всеми такими холловыми подгруппами  $H$  из  $G$ , т. е.  $AH = HA$  для всех  $i$ . В работе А.Н. Скибы "On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups" поставлена следующая

**Проблема.** *Каково строение  $P\sigma T$ -групп, т. е. групп, в которых условие  $\sigma$ -перестановочности подгрупп является транзитивным?*

Одним из наиболее важных результатов диссертанта является решение проблемы Скибы, полученное в теореме 2.2.1. Эта проблема решается на основе построенной в разделе 2.1 теории  $\sigma$ -комплексов Робинсона и понятия  $\sigma$ -SC-группы. Из теоремы 2.2.1 следует результат Дж.С. Робинсона (2001), дающий описание  $PST$ -групп. Более того, в разделе 2.4 решена проблема А. Фридже-

ри о классификации групп, в которых модулярность подгрупп транзитивна (теорема 2.4.3).

**Глава 3.** Множество  $\Sigma$  подгрупп группы  $G$  называется  $G$ -накрывающей системой подгрупп для класса групп  $\mathfrak{F}$  (А.Н. Скиба, 2003), если  $G \in \mathfrak{F}$  всякий раз, когда  $\Sigma \subseteq \mathfrak{F}$ . В разделе 3.1 теория  $G$ -накрывающих систем подгрупп применяется для решения двух задач из "Коуровской тетради" [Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 19-е изд. доп. / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск: изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2022. – 248 с.]:

– проблемы 19.88 об описании  $G$ -накрывающих систем подгрупп для класса всех  $\sigma$ -нильпотентных групп (теорема 3.1.2);

– проблемы 19.87 об описании  $G$ -накрывающих систем подгрупп для класса всех  $\sigma$ -разрешимых групп (теорема 3.1.6).

Заметим, что решение проблем 19.87 и 19.88 с использованием классификации неабелевых простых групп было также получено С.Ф. Каморниковым, В.Н. Тютяновым [Каморников С.Ф., Тютянов В.Н. О двух проблемах из "Коуровской тетради" // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2021. – Т. 27, № 1. – С. 98–102.].

**Глава 4.** В данной главе получено развитие и приложения при помощи  $\sigma$ -метода классического понятия дисперсивности групп, предложенного О. Оре и Р. Бэром.  $\sigma$ -Полная группа  $G$  называется  $\sigma$ -дисперсивной (А.Н. Скиба, 2015), если  $G$  имеет нормальный ряд подгрупп, порядки факторов которого являются порядками соответствующих холловых  $\sigma_i$ -подгрупп этой группы. В теореме 4.1.6 главы решена проблема Скибы о  $\sigma$ -субнормальными  $(n + 1)$ -максимальными подгруппами (см. проблему 4.8 работы "On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups". В разделе 4.2 на основе разработанной диссертантом оригинальной теории  $\sigma$ -графов Хоукса решена задача описания строения  $\sigma$ -дисперсивных групп (теорема 4.2.4), а также решена проблема Л.А. Шеметкова (1995) об описании строения дисперсивных групп методами теории графов (теорема 4.2.6).

**Глава 7** посвящена алгебре кратно  $\sigma$ -локальных формаций. В частности, выявлены свойства таких формаций и описаны свойства решетки этих формаций. Для этих целей диссертант эффективно использовал синтез функторного метода и метода кратной локализации, что позволяет говорить об универсальности полученных результатов.

Основные результаты здесь — теоремы 7.2.1, 7.2.13 и 7.2.19, где доказаны полнота, модулярность, алгебраичность и отделимость решетки всех функторно замкнутых  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций. Специальными случаями указанных теорем являются известные результаты А.Н. Скибы; З. Чи, В.Г. Сафонова, А.Н. Скибы; Н.Н. Воробьева, И.И. Стаселько, А.О. Ходжагулыева. В разделе 7.3 решена задача Л.А. Шеметкова о классификации критических формаций в теории  $\sigma$ -локальных формаций. Из теоремы 7.3.1 следует класси-

фикация критических  $\sigma$ -локальных формаций для классов всех  $\sigma$ -разрешимых,  $\sigma$ -нильпотентных, мета- $\sigma$ -нильпотентных групп, групп с  $\sigma$ -нильпотентным коммутантом.

### **Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации**

Все результаты диссертации И.Н. Сафоновой, в том числе и основные положения, выносимые на защиту, являются новыми, снабжены подробными и полными доказательствами. Достоверность и обоснованность заключительных выводов, сформулированных в диссертации, не вызывает сомнений, они опубликованы в открытой печати в рецензируемых международных научных журналах и докладывались на различных международных и республиканских научных конференциях и семинарах. В диссертационной работе и автореферате имеются все необходимые ссылки на литературу.

### **Научная, практическая, экономическая и социальная значимость научных результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию**

Диссертационная работа носит теоретический характер. Исследования проводились в рамках следующих научных программ и проектов:

“Развитие концепции факторной центральности и ее применение к анализу классов групп и других систем” (грант 20061155, 2006–2010). Тема входила в государственную программу фундаментальных научных исследований “Математические модели” на 2006–2010 годы;

“Операторы на классах групп и их приложения” (грант 20111553, 2011–2015). Тема входила в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы “Конвергенция”, подпрограмма “Математические методы”;

“Кратно локальные классы конечных групп и теория представлений конечномерных алгебр и групп” (грант 20161713, 2016–2020). Тема входила в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы “Конвергенция–2020 подпрограмма “Методы математического моделирования сложных систем”;

“Развитие обобщенно локальных методов в теории классов групп и их приложения при изучении непростых конечных групп” (грант 20211328, 2021–2025). Тема входит в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 годы “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”;

“Строение конечных и периодических групп: фундаментальный и вычислительный аспекты” (грант 20221874, 2022–2025, договор с БРФФИ Ф23РНФ-237 от 15.11.2022);

“Строение конечных и периодических групп и некоторые связанные с ними проблемы графов и решеток” (грант 20240693, 2024–2026, договор с БРФФИ Ф24КИ–021 от 01.03.2024).

Результаты и методы диссертационной работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях современной теории групп при изучении арифметических и геометрических свойств групп и их классов, проводимых в научных центрах Республики Беларусь, России, Украины, США, Англии, Китая, Германии, Италии, Испании и других стран.

Материалы диссертации будут также полезны при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей университетов, при написании курсовых, дипломных работ и диссертаций.

Практическая значимость результатов диссертационного исследования подтверждена актами их внедрения в учебном процессе Белорусского государственного университета.

### **Опубликованность результатов диссертации в научной печати**

Основные положения и результаты диссертации снабжены ссылками на научные работы автора, в которых они опубликованы. Отметим, что автором опубликовано по теме диссертационного исследования 48 научных работ, в том числе: 37 статей в рецензируемых научных журналах (13 статей без соавторов), соответствующих пункту 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, 4 препринта, 2 статьи в сборниках материалов научных конференций, 5 тезисов докладов.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в известных математических журналах (Journal of Algebra, Communications in Algebra, Journal of Group Theory, Journal of Algebra and Its Applications, Archiv der Mathematik, Quaestiones Mathematicae, Ricerche di Matematica, Advances in Group Theory and Applications, Bulletin of the Australian Mathematical Society, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Communications in Mathematics and Statistics, Mediterranean Journal of Mathematics, Сибирский математический журнал, Математические заметки, Доклады НАН Беларуси, Весці НАН Беларусі и др.).

### **Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК**

Диссертация и автореферат И.Н. Сафоновой “Проблемы теории  $\sigma$ -свойств конечных групп и их классов” оформлены в соответствии с требованиями ВАК Республики Беларусь. Автореферат диссертационной работы полно и правильно отражает содержание диссертации.

### **Замечания по диссертации**

Работа хорошо оформлена, хотя и не свободна от некоторых неточностей и языковых погрешностей. Имеется незначительное число стилистических за-

мечаний и обнаруженных опечаток, которые не влияют на научную ценность полученных результатов. В качестве замечаний по тексту диссертации можно выделить следующие:

- 1) На стр. 81 диссертации, 16 стр. сверху вместо " $V = \langle a_1, a_2, \dots, a_i \rangle$ " должно быть " $V = \langle a_1, a_2, \dots, a_t \rangle$ ".
- 2) на стр. 94 диссертации, 9 стр. снизу вместо " $G = AX_i^x = AX_i = X_i$ " должно быть " $G = AX_1^x = AX_1 = X_1$ ";
- 3) на стр. 96 диссертации, 2 стр. снизу вместо "вопреки выбор" должно быть "вопреки выбору".
- 4) на стр. 104 диссертации, 10 стр. сверху в выражении " $h_\sigma(M) < |\sigma()|$ " пропущена буква  $M$ , должно быть " $h_\sigma(M) < |\sigma(M)|$ ";
- 5) на стр. 105 диссертации, 9 стр. снизу в выражении " $h_\sigma(M) \leq |\pi()| + 1$ " пропущена буква  $M$ , должно быть " $h_\sigma(M) \leq |\pi(M)| + 1$ ";
- 6) на стр. 120 диссертации, 6 стр. снизу в выражении "... =  $Z_\infty(G/\Phi) \cap (G^{\mathfrak{M}}/\Phi = \dots$ " не закрыта скобка, должно быть "... =  $Z_\infty(G/\Phi) \cap (G^{\mathfrak{M}}/\Phi) = \dots$ ".
- 7) на стр. 130 диссертации, 2 стр. сверху вместо "результатв" должно быть "результаты".
- 8) на стр. 143 диссертации, 5 стр. сверху в выражении " $V(G) \leq N_G(U^{\mathfrak{F}})$ " должно быть " $V(G) \leq N_G(U^{\mathfrak{F}})$ ".
- 9) на стр. 156 диссертации, 21 стр. снизу в выражении " $r \geq \pi(G)$ " пропущена скобка, должно быть " $r \geq \pi|(G)|$ ".
- 10) на стр. 180 диссертации, 2 стр. снизу в выражении " $h \leq f = \vee_{\sigma_{n-1}}^r(f_j \mid j \in J)$ " не закрыта скобка, должно быть " $h \leq f = \vee_{\sigma_{n-1}}^r(f_j \mid j \in J)$ ".
- 11) на стр. 234 диссертации, 11 стр. сверху вместо "... группа порядка  $P$  ..." должно быть "... группа порядка  $p$  ...".

**Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени, на которую он претендует**

### **Заключение**

Диссертационная работа Сафоновой Инны Николаевны "Проблемы теории  $\sigma$ -свойств конечных групп и их классов" соответствует всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук. Содержание диссертационной работы полностью соответствует отрасли физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Считаю, что И.Н. Сафонова заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел за развитие нового научного направления в теории  $\sigma$ -свойств конечных групп и их классов, включающего:

Результаты построенной в диссертации теории специальных классов обобщенных  $T$ -групп, в том числе:

- решение проблемы А.Н. Скибы об описании строения групп, в которых условие  $\sigma$ -перестановочности подгрупп является транзитивным отношением;
- решение проблемы А. Фриджеро о классификации групп, в которых условие модулярности подгрупп является транзитивным отношением;
- решение проблемы описания строения разрешимых групп, в которых  $\sigma$ -квазинормальность подгрупп является транзитивным отношением;
- решение проблемы описания строения групп, в которых каждая  $\sigma$ -субнормальная подгруппа модулярна;
- описание  $\sigma$ -разрешимых  $P\sigma T$ -групп с использованием разработанной в диссертации теории  $\sigma$ -специальных замкнутых подгрупповых функторов.

Теоремы, построенной в диссертации теории накрывающих систем подгрупп, дающие:

- описание новых  $G$ -накрывающих систем подгрупп для классов всех  $\sigma$ -разрешимых  $P\sigma T$ -групп, всех разрешимых  $PST$ -групп и всех сверхразрешимых групп;
- решение проблемы 19.87 из “Коуровской тетради” об описании  $G$ -накрывающих систем подгрупп для класса всех  $\sigma$ -разрешимых групп;
- решение проблемы 19.88 из “Коуровской тетради” об описании  $G$ -накрывающих систем подгрупп для класса всех  $\sigma$ -нильпотентных групп;
- новые характеристики  $\sigma$ -разрешимых  $P\sigma T$ -групп и разрешимых  $PST$ -групп, разрешимых  $PT$ - и  $T$ -групп.

Результаты построенной в диссертации теории  $\sigma$ -дисперсивных групп, включающие:

- подтверждение гипотезы о  $\sigma$ -дисперсивности группы с  $\sigma$ -субнормальными  $(n + 1)$ -максимальными подгруппами;
- решение проблемы описания строения  $\sigma$ -дисперсивных групп, разработанными в диссертации методами теории  $\sigma$ -графов Хоукса;
- решение проблемы Л.А. Шеметкова об описании строения дисперсивных групп методами теории графов.

Приложения теории  $\mathfrak{F}$ -критических и обобщенно  $\mathfrak{F}$ -критических подгрупп, дающие:

- описание строения групп, у которых все не  $\sigma$ -нильпотентные подгруппы Шмидта  $\sigma$ -абнормальны, в частности, групп, у которых все подгруппы Шмидта абнормальны;
- описание строения групп с  $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальными и  $\mathfrak{F} \wedge sn$ -вложенными подгруппами Шмидта;
- описание новых свойств нормы и обобщенной нормы группы.

Результаты построенной в диссертации теории функторно замкнутых  $\sigma$ -локальных формаций, дающие:

- решение проблемы Л.А. Шеметкова о классификации критических формаций в классе  $\sigma$ -локальных формаций;
  - основные свойства функторно замкнутых  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций и, в частности, свойства решетки всех функторно замкнутых  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций,
- что в совокупности является крупным концептуальным достижением в теории конечных групп и их классов.

Официальный оппонент,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, профессор кафедры математики  
УО “Витебский государственный  
университет имени П.М. Машерова”

Н.Н. Воробьев



Подпись удостоверяю  
Начальник отдела кадров  
В.П. Соловьёва

08.05.2025