

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертационной работе Сафоновой Инны Николаевны
“Проблемы теории σ -свойств конечных групп и их классов”,
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Соответствие диссертации специальности и отрасли науки, по которой она представлена к защите

Диссертация относится к отрасли физико-математических наук и соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Актуальность темы диссертации

Развитие во второй половине двадцатого века дискретной математики и наук, связанных с компьютерами, привели к значительному росту роли теории групп и прежде всего, теории конечных групп в современной науке и появлению новых их приложений в таких областях, как криптография, теория формальных языков, теория кодирования и др.

Таким образом, теория групп остается одной из наиболее востребованных для приложений разделов математики и поэтому общая проблема изучения и классификации групп и их классов весьма актуальна. Это послужило основной мотивировкой к созданию новых методов изучения и классификации групп, одним из которых является классический метод π -свойств Холла-Чунихина, имеющий дело с изучением конечных групп по отношению к выбранному разбиению $\{\pi, \pi'\}$ множества всех простых чисел \mathbb{P} .

Основными объектами изучения в π -теории Холла-Чунихина являются π -разрешимые и π -отделимые группы и их холловы π -подгруппы и π' -подгруппы и такие классы групп нашли глубокие применения и, в частности, при доказательстве теоремы Фейта-Томпсона о разрешимости групп нечетного порядка и при получении классификации конечных неабелевых простых групп. Таким образом, π -метод Холла-Чунихина является весьма эффективным инструментом при изучении конечных, локально конечных и периодических групп.

Последние 30 лет, при решении некоторых задач теории конечных групп стали использоваться так называемые σ -свойства групп (в терминологии работы [*] A.N. Skiba, On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups, *J. Algebra*, 2015, 436, 1–16), т.е. свойства группы G , определяемые выбором произвольного разбиения $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ множества всех простых чисел \mathbb{P} . Отправным понятием теории σ -свойств групп является понятие σ -примарной группы: группа G называется σ -примарной [*], если G является σ_i -группой для некоторого i . Группа G называется [*]: σ -нильпотентной, если G является прямым произведением σ -примарных групп; σ -разрешимой, если каждый главный фактор группы G является σ -примарным. Понятно, что π -разрешимые, π -отделимые и p -разрешимые группы – это в точности σ -разрешимые группы для соответствующих

разбиений σ множества \mathbb{P} .

Подгруппа A группы G называется σ -субнормальной в G [*], если в G имеется ряд подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$, где либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо фактор $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ σ -примарен для всех $i = 1, \dots, n$.

Среди наиболее интересных и нетривиальных задач, решение которых невозможно без привлечения прямых произведений σ -нильпотентного типа, прежде всего, отметим известную проблему Кегеля-Шеметкова о классификации решеточных насыщенных формаций конечных групп. Такая проблема была решена в работе [А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук, *О решетках подгрупп конечных групп, Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры*, отв. редактор С.Н. Черников, 27–54, Киев, 1993, Институт математики АН Украины] и, независимо, в классе разрешимых групп в работе [A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Perez-Ramos, On the lattice of \mathfrak{F} -subnormal subgroups, *J. Algebra*, 148, (1992), 42–52] где, в частности, было доказано, что если \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация конечных групп и в каждой конечной группе K – \mathfrak{F} -субнормальные подгруппы формируют подрешетку решетки всех ее подгрупп, когда существует такое разбиение σ множества \mathbb{P} , что всякая группа $G \in \mathfrak{F}$ является σ -нильпотентной. Доказательство этого глубокого результата основано, в частности, на следующем замечательном свойстве σ -нильпотентных групп (которое можно легко вывести из основного результата работы [В.А. Белоногов, Конечные группы, все 2-максимальные подгруппы которых π -разложимы, *Труды ИМиМ Уро РАН*, 20(2) (2014), 29–43]): *Всякая минимальная не σ -нильпотентная группа является группой Шмидта.*

В работе [*] было доказано, что если подгруппа A перестановочна с каждой холловской σ_i -подгруппой конечной группы G для всех $i \in I$, то подгруппа A σ -субнормальна в G и ее секция A/A_G σ -нильпотентна. Следствием этого результата, в случае $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, является классическая теорема Дескинза-Кегеля о том, что всякая силовски перестановочная подгруппа A конечной группы G субнормальна в ней и фактор A/A_G является nilпотентным.

Идеи и техника работы [*] нашли приложения в 360 публикациях многих белорусских математиков (С.Ф. Каморникова, В.Н. Тютянова, В.С. Монахова, В.Г. Сафонова, Н.Т. Воробьева, Н.Н. Воробьева, А.Ф. Васильева, В.И. Мурашко, В.А. Закревской, В.А. Грицковой, Д.О. Сеницы, Н.М. Адарченко и др.) и в публикациях многих зарубежных математиков (А. Баллестера-Болиншес, Д. Бейдлемана, М.Р. Диксона, Го Вэньбиня, Б. Ху, А-М. Лю, М. Тромбетти, М. Феррара, Д.О. Ревина, М.М. Сорокиной, М.М. Аль-Шомрани, А.А. Хелиэйля, Жиган Ванга, Джин Го, Ю. Каспика, М.Д. Перец-Рамоша, В.Н. Рыжик, О.Л. Шеметковой, С.П. Максакова, А. Царева и др.). В частности, теория σ -субнормальных подгрупп, построенная в работе [*], нашла применения в теории бесконечных групп в публикациях [Maria Ferrara, Marco Trombetti, Joins of σ -subnormal subgroups, *Illinois Journal of Mathematics*, 2024], [Maria Ferrara, Marco Trombetti, σ -Subnormality in Locally Finite Groups, *J. Algebra*, 2022], [Martyn R. Dixon, Maria Ferrara, Marco Trombetti, A survey of recent results connected with

subnormal subgroups, J. Iranian Math. Soc., 2024] и др., что указывает на полезность, актуальность, эффективность и перспективность метода σ -свойств групп.

Основной целью данной диссертации является развитие новых методов исследования σ -свойств групп и применение таких методов к решению некоторых открытых задач и обобщению многих известных результатов теории конечных групп.

Таким образом, тема диссертационной работы является, безусловно, актуальной и полностью соответствует принятым в Республике Беларусь приоритетным направлениям научных исследований.

Степень новизны результатов, полученных в диссертации и научных положений, выносимых на защиту

Представленные в диссертации результаты и научные положения, выносимые на защиту, являются новыми. Новизна результатов, полученных в диссертации, заключена в следующем:

– решена проблема А. Фриджеро (1974) о классификации конечных групп, в которых условие модулярности для подгрупп является транзитивным;

– построена алгебра функторно замкнутых σ -локальных формаций и даны ее приложения к решению проблемы Л.А. Шеметкова (1980) о классификации \mathfrak{S} -критических формаций для случая произвольной σ -локальной формации \mathfrak{S} классического типа;

– решена проблема Л.А. Шеметкова (1995) об описании строения конечных дисперсивных групп методами теории графов;

– решена проблема А.Н. Скибы (2014) об описании строения конечных групп, в которых условие σ -перестановочности для подгрупп является транзитивным;

– построена теория σ -дисперсивных групп и подтверждена гипотеза о σ -дисперсивности групп с σ -субнормальными $(n + 1)$ -максимальными подгруппами (А.Н. Скиба, 2015);

– построена теория σ -графов Хоукса групп и даны ее приложения к решению проблемы описания конечных σ -дисперсивных групп;

– достигнуто дальнейшее развитие теории G -накрывающих систем подгрупп и даны ее приложения к решению проблемы 19.87 из “Коуровской тетради” (Нерешенные проблемы теории групп, Новосибирск, 2022) о G -накрывающих системах подгрупп для класса всех σ -разрешимых групп;

– решена проблема 19.88 из “Коуровской тетради” о G -накрывающих системах подгрупп для класса всех σ -нильпотентных групп;

– построена теория σ -специальных замкнутых подгрупповых функторов и даны ее приложения в вопросах классификации различных классов обобщенных T -групп.

В диссертации обобщены многие известные результаты теории конечных групп: классические результаты О. Оре, Н. Ито и Дж. Цепа о квазинормальных подгруппах и В.Э. Дескинса и О.Х. Кегеля о силовски перестановочных подгруппах, результаты И.М. Айзекса о π -перестановочных и А.Н. Скибы о σ -перестановочных подгруппах; результаты М. Асаада, Дж.С. Робинсона, Г. Цахера, В. Гашюца,

А. Фриджеро, И. Циммерманн, А. Баллестера-Болинчес, Р. Эстебана-Ромеро, А.Н. Скибы, Ц. Чжана, В. Го, А.-М. Лю, Б. Ху, Дж. Хуана, М.К. Педраса-Агилеры и В. Перес-Калабьюнга о T -группах и обобщенных T -группах; результаты В.Н. Семенчука, В.Н. Княгиной, В.С. Монахова, К.А. Аль-Шаро, И.В. Близнаца, В.М. Селькина, Ц. Шэня, В. Ши, Г. Цяня, Б. Ху, Дж. Хуана, А.Н. Скибы, И.М. Дергачевой, И.П. Шабалиной, Е.А. Задорожнюк о группах с заданными подгруппами Шмидта и заданными обобщенными подгруппами Шмидта; теорема Шенкмана о нильпотентном корадикале субнормальных подгрупп; результаты Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы, З. Чи, В.Г. Сафонова, А.Н. Скибы, Н.Н. Воробьева, И.И. Стаселько, А.О. Ходжагулыева о локальных и σ -локальных формациях конечных групп.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Результаты, представленные в диссертационной работе являются достоверными поскольку они снабжены строгими математическими доказательствами и проиллюстрированы на конкретных примерах. Основные результаты диссертации опубликованы в престижных международных математических журналах, что свидетельствует об их строгой апробированности и широкой известности.

Научная, практическая, экономическая и социальная значимость научных результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию

Диссертация носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации Сафоновой И.Н., имеют несомненную научную ценность и вносят заметный вклад в развитие методов изучения конечных групп и их классов.

Результаты и методы диссертационной работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях современной теории групп при изучении σ -свойств групп и их классов, проводимых в научных центрах Республики Беларусь, России, США, Германии, Италии, Испании, Китая, Иордании, Швейцарии, Пакистана и др.

Научная и практическая значимость результатов диссертации подтверждена их опубликованностью в престижных научных журналах (Сибирский математический журнал, Математические заметки, Труды ИММ УрО РАН, Journal of Algebra, Journal of Group Theory, Journal of Algebra and Its Applications, Archiv der Mathematik, Communications in Algebra, Quaestiones Mathematicae, Ricerche di Matematica, Advances in Group Theory and Applications, Mediterranean Journal of Mathematics, Bulletin of the Australian Mathematical Society, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Communications in Mathematics and Statistics), а также их использовании в публикациях многих других авторов.

Практическая и социальная значимость результатов диссертации подтверждена также их применением в учебном процессе Белорусского государственного университета (2 акта о внедрении), при чтении спецкурсов по теории групп и их классов для студентов математических специальностей, при написании курсовых и дипломных проектов, магистерских, кандидатских и

докторских диссертаций, а также для научных исследований.

Опубликованность результатов диссертации в научной печати

Всего по теме диссертационного исследования опубликованы 48 научных работ, в том числе: 37 статей в рецензируемых научных журналах (13 статей без соавторов), соответствующих пункту 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, 4 препринта, 2 статьи в сборниках материалов научных конференций, 5 тезисов докладов.

Известность результатов соискателя в научных кругах подтверждается индексом Хирша в базе данных Scopus равным 5, Web of Science – 6, Google Scholar – 10.

Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК

Диссертация и автореферат Сафоновой Инны Николаевны “Проблемы теории σ -свойств конечных групп и их классов” оформлены в соответствии с требованиями ВАК Республики Беларусь.

Замечания по диссертации

На отдельных страницах диссертационной работы имеются отдельные опечатки и стилистические погрешности, которые вместе с тем не влияют на понимание и достоверность основных результатов диссертации.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени, на которую он претендует

Представленные в работе результаты, положения и выводы, а также опубликованные материалы свидетельствуют о высокой научной квалификации Сафоновой И.Н., которая полностью соответствует требованиям, предъявляемым к квалификации доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Выводы

Диссертационная работа Сафоновой Инны Николаевны “Проблемы теории σ -свойств конечных групп и их классов” соответствует требованиям, установленным главой 3 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь.

Считаю, что И.Н. Сафонова заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел за:

– построение теории σ -комплексов Робинсона и ее приложения к решению проблемы А. Фриджеро о классификации конечных групп, в которых условие модулярности для подгрупп является транзитивным, и проблемы А.Н. Скибы о классификации конечных групп, в которых условие σ -перестановочности для подгрупп является транзитивным;

– построение теории σ -дисперсивных групп и ее приложение к подтверждению гипотезы А.Н. Скибы о σ -дисперсивности конечной группы с обобщенно субнормальными $(n + 1)$ -максимальными подгруппами;

– построение теории σ -графов Хоукса группы и ее применение к решению проблемы описания σ -дисперсивных групп и, в частности, к решению проблемы

Л.А. Шеметкова о структурном описании дисперсивных групп методами теории графов;

– дальнейшее развитие теории G -накрывающих систем подгрупп и ее приложение к решению проблемы 19.87 из “Коуровской тетради” о G -накрывающих системах подгрупп для класса всех σ -разрешимых групп;

– решение проблемы 19.88 из “Коуровской тетради” о G -накрывающих системах подгрупп для класса всех σ -нильпотентных групп;

– построение теории σ -специальных замкнутых подгрупповых функторов и ее приложение к проблеме классификации различных классов обобщенных T -групп;

– построение алгебры функторно замкнутых σ -локальных формаций и ее приложения к решению проблемы Л.А. Шеметкова о классификации \mathfrak{F} -критических формаций для случая произвольной σ -локальной формации классического типа \mathfrak{F} ;

– обобщение классических результатов О. Оре, Н. Ито и Дж. Цепя о квазинормальных подгруппах и В.Э. Дескинса и О.Х. Кегеля о силовски престановочных подгруппах и результатов И.М. Айзекса о π -перестановочных и А.Н. Скибы о σ -перестановочных подгруппах.

Перечисленные результаты представляют собой концептуальное развитие теории σ -свойств конечных групп и их классов. Они являются принципиально новыми, а их совокупность является крупным достижением в теории непростых конечных групп.

Официальный оппонент
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник
Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
«Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского» УрО РАН

А.А. Махнев

А.А.Махнев

08.05.2025

Подпись заверяю
Ученый секретарь
ИММ УрО РАН



Ульянов О.Н.