

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе
Сафоновой Инны Николаевны
“Проблемы теории σ -свойств конечных групп и их классов”,
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Соответствие диссертации специальности и отрасли науки, по которой она представлена к защите

Экспертиза диссертации и автореферата проводилась в соответствии с требованиями Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий, утвержденного Указом Президента Республики Беларусь от 17.11.2004 № 560 (в ред. Указа Президента Республики Беларусь от 23.06.2023 № 180), и Положения о совете по защите диссертаций, утвержденного постановлением Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 22.02.2005 № 19 (в ред. Постановления ВАК от 03.06.2024 № 4).

На основании анализа содержания диссертационной работы, автореферата и опубликованных научных результатов можно констатировать, что диссертационная работа И.Н. Сафоновой “Проблемы теории σ -свойств конечных групп и их классов” соответствует отрасли физико-математических наук и паспорту специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 16 января 2018 г. № 12) в следующем пункте раздела III (области исследований): п. 2. Теории алгебраических структур; линейная и полилинейная алгебра, теория представлений, гомологическая алгебра и алгебраическая K -теория; алгебраическая геометрия, топологическая алгебра; теории категорий и универсальной алгебры.

Актуальность темы диссертации

Подгруппа A группы G называется S -перестановочной или силовски перестановочной в группе G , если она перестановочна с каждой силовской подгруппой этой группы. Содержательная теория силовски перестановочных подгрупп была разработана в работах О.Х. Кегеля, В.Э. Дескинса и Р.К. Агравалья. Она хорошо представлена в книге [A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad, *Products of Finite Groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2010].

В работах [А.Н. Скиба, *On σ -properties of finite groups I*, Проблемы физики, математики и техники, 2014. – № 34(4). – С. 89–96] и [A.N. Skiba, *On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups*, Journal of Algebra, 2015, Vol. 436, 1–16] был разработан оригинальный метод обобщения такой теории, сущность которого заключена в использовании произвольного разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества всех простых чисел и с заменой силовских подгрупп группы на ее холловы σ_i -подгруппы. Реализация такого подхода привела к необходимости построения теорий σ -разрешимых и σ -нильпотентных групп, теории σ -субнормальных

подгрупп, теории σ -перестановочных подгрупп и их решеток и др., что, по существу, привело к возникновению теории σ -свойств групп, где под σ -свойством групп понимается всякое их свойство, зависящее от σ , и которое не предполагает каких либо ограничений на σ .

Отметим, что некоторые идеи и отдельные результаты из упомянутых выше работ А.Н. Скибы нашли применения в публикациях К.А. Аль-Шаро, А.-М. Лю, А. Баллестера-Болинше, Дж. К. Бейдлемана, Х. Биня, З. Ванга, В. Го, С. Жанга, М.К. Педраса-Агуилеры, В. Переса-Калабьюга, Д. Сонга, А.Е.-Р. Хелиеля, Дж. Хуанга, Аль-Шомрани, А.Ф. Васильева, Н.Т. Воробьева, Н.Н. Воробьева, С.Ф. Каморникова, В.И. Мурашко, М.М. Сорокиной, В.Н. Тютянова и многих других авторов, что указывает на актуальность методов теории σ -свойств групп.

Данная диссертация посвящена решению некоторых открытых вопросов теории σ -свойств конечных групп и их классов.

Таким образом, тема диссертационной работы является актуальной и соответствует принятым в Республике Беларусь приоритетным направлениям научных исследований.

Степень новизны результатов, полученных в диссертации, и научных положений, выносимых на защиту

Основное содержание диссертации представлено в главах 2–7, где разработаны новые методы исследования конечных групп и их классов, на основе которых решены некоторые открытые вопросы теории групп и обобщены многие известные результаты других авторов.

В главе 2 построена теория σ -комплексов Робинсона и на ее основе решен ряд открытых задач теории групп и, в частности, проблема А.Н. Скибы (2014 г.) о классификации $P\sigma T$ -групп, т.е. конечных групп, в которых условие σ -перестановочности для подгрупп транзитивно, и проблема А. Фриджеро (1974 г.) о классификации конечных групп, в которых условие модулярности для подгрупп транзитивно.

Кроме того, в этой главе описаны разрешимые группы, в которых σ -квазинормальность подгрупп является транзитивным отношением; решена проблема описания конечных групп, в которых каждая σ -субнормальная подгруппа модулярна; описаны σ -разрешимые $P\sigma T$ -группы с использованием разработанной в диссертации теории σ -специальных замкнутых подгрупповых функторов.

Из результатов данной главы вытекают соответствующие результаты М. Асада, Дж. С. Робинсона, Г. Цахера, В. Гашюца, А. Фриджеро, И. Циммерманн, А. Баллестера-Болинше, Р. Эстебана-Ромеро, А.Н. Скибы, Ц. Чжана, В. Го, А.-М. Лю, Б. Ху, Дж. Хуана, М.К. Педраса-Агуилеры, В. Переса-Калабьюга и других математиков.

Глава 3 посвящена дальнейшему развитию методов теории накрывающих систем подгрупп. В частности, здесь получено описание новых G -накрывающих

систем подгрупп для классов всех σ -разрешимых $P\sigma T$ -групп, всех разрешимых PST -групп и всех сверхразрешимых групп; решена проблема 19.87 из “Коуровской тетради” об описании G -накрывающих систем подгрупп для класса всех σ -разрешимых групп; решена проблема 19.88 из “Коуровской тетради” об описании G -накрывающих систем подгрупп для класса всех σ -нильпотентных групп; найдены новые интересные характеристики σ -разрешимых $P\sigma T$ -групп и разрешимых PST -, PT - и T -групп.

Кроме того, в этой главе вводится понятие Π -накрывающей системы подгрупп, на основе которого обобщены известные результаты О. Оре, Н. Ито, Дж. Цепя, В.Э. Дескинса, О.Х. Кегеля, И.М. Айзекса, А.Н. Скибы, В. Го, Б. Ху, Ц. Хуанга о перестановочных подгруппах конечных групп.

Глава 4 содержит результаты построенной в диссертации теории σ -дисперсивных групп. В частности, в главе получено подтверждение гипотезы А.Н. Скибы (2015 г.) о σ -дисперсивности групп с σ -субнормальными $(n + 1)$ -максимальными подгруппами, построена теория σ -графов Хоукса и на ее основе описано строение σ -дисперсивных групп, дано решение задачи Л.А. Шеметкова (1995 г.) об описании строения дисперсивных групп методами теории графов. Следствиями результатов данной главы являются соответствующие результаты А. Манна, А.Э. Спенсера и А.Н. Скибы о группах с субнормальными и обобщенно субнормальными n -максимальными подгруппами.

В главах 5–6 найдены новые интересные приложения теории \mathfrak{F} -критических и обобщенно \mathfrak{F} -критических подгрупп и, в частности, описано строение групп с σ -абнормальными подгруппами Шмидта и групп с абнормальными подгруппами Шмидта; установлены новые свойства нормы и обобщенной нормы группы; получены новые характеристики классов всех σ -разрешимых, мета- σ -нильпотентных и сверхразрешимых групп.

Следствиями результатов этих двух глав являются соответствующие результаты К.А. Аль-Шаро и А.Н. Скибы, Р. Бэра, Д.Р. Фризен, Б. Ху и Дж. Хуана, Б. Ху, Дж. Хуана и А.Н. Скибы, Э. Шенкмана, Ц. Шэня, В. Ши и Г. Цяня, В.Н. Княгиной и В.С. Монахова, В.Н. Семенчука и А.Н. Скибы о группах с заданными системами подгрупп Шмидта, а также соответствующие результаты Р.К. Агравалы, Дж. Бакли, В. Го и А.Н. Скибы, Дж. Лу и В. Мэна, А.Э. Спенсера, Дж. Хуанга, Б. Ху и А.Н. Скибы, Б. Хупперта, И. Циммерманн, Ц. Чжана, Ц. Ву и В. Го, Р. Шмидта, С. Шринивасана, В.А. Васильева и А.Н. Скибы, В.А. Ковалевой о группах с условиями на обобщенно максимальные подгруппы.

В главе 7 построена теория функторно замкнутых σ -локальных формаций: дано решение проблемы Л.А. Шеметкова о классификации критических формаций в классе σ -локальных формаций; описаны основные свойства алгебры σ -локальных формаций и, в частности, свойства решетки всех функторно замкнутых n -кратно σ -локальных формаций.

Из результатов данной главы вытекают соответствующие результаты Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы, Н.Н. Воробьева и других авторов о локальных и σ -локальных формациях конечных групп.

Все научные результаты И.Н. Сафоновой, выносимые на защиту, являются новыми и оригинальными.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Результаты проведенных в диссертации исследований достоверны и не вызывают сомнений. Все основные положения и выводы диссертации подтверждены полными математическими доказательствами, опубликованы в открытой печати в рецензируемых международным научными журналах и докладывались на различных международных и республиканских научных конференциях и семинарах. Работа содержит все необходимые ссылки на литературу. Ряд идей и результатов диссертации уже нашли применения в публикациях многих других авторов, что также подтверждает их достоверность.

Научная, практическая, экономическая и социальная значимость научных результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию

Диссертация носит теоретический характер. Исследования проводились в рамках следующих научных программ и проектов:

“Развитие концепции факторной центральности и ее применение к анализу классов групп и других систем” (грант 20061155, 2006–2010). Тема входила в государственную программу фундаментальных научных исследований “Математические модели” на 2006–2010 годы;

“Операторы на классах групп и их приложения” (грант 20111553, 2011–2015). Тема входила в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы “Конвергенция”, подпрограмма “Математические методы”;

“Кратно локальные классы конечных групп и теория представлений конечномерных алгебр и групп” (грант 20161713, 2016–2020). Тема входила в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы “Конвергенция–2020”, подпрограмма “Методы математического моделирования сложных систем”;

“Развитие обобщенно локальных методов в теории классов групп и их приложения при изучении непростых конечных групп” (грант 20211328, 2021–2025). Тема входит в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 годы “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”;

“Строение конечных и периодических групп: фундаментальный и вычислительный аспекты” (грант 20221874, 2022–2025, договор с БРФФИ Ф23РНФ-237 от 15.11.2022);

“Строение конечных и периодических групп и некоторые связанные с ними проблемы графов и решеток” (грант 20240693, 2024–2026, договор с БРФФИ Ф24КИ–021 от 01.03.2024).

Научная значимость результатов диссертации подтверждается тем, что они уже нашли применения в 65 публикациях других авторов, что также подтверждает и их несомненную достоверность.

Результаты и методы диссертационной работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях современной теории групп при изучении арифметических и геометрических свойств групп и их классов, проводимых в научных центрах Республики Беларусь, России, США, Англии, Китая, Германии, Италии, Испании и других стран.

Материалы диссертации будут также полезны при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей университетов, при написании курсовых, дипломных работ и диссертаций. В этом заключена практическая и социальная значимость результатов диссертации.

Опубликованность результатов диссертации в научной печати

Все основные результаты диссертации опубликованы в математических журналах (Journal of Algebra, Archiv der Mathematik, Communications in Algebra, Journal of Group Theory, Journal of Algebra and Its Applications, Quaestiones Mathematicae, Ricerche di Matematica, Advances in Group Theory and Applications, Bulletin of the Australian Mathematical Society, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Communications in Mathematics and Statistics, Mediterranean Journal of Mathematics, Сибирский математический журнал, Математические заметки и др.), индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus.

Всего по теме диссертационного исследования опубликованы 48 научных работ, в том числе 37 статей в рецензируемых научных журналах (13 статей без соавторов), соответствующих пункту 19 “Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь”, 4 препринта, 2 статьи в сборниках материалов научных конференций, 5 тезисов докладов.

Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК

Диссертация и автореферат Сафоновой Инны Николаевны “Проблемы теории σ -свойств конечных групп и их классов” оформлены в соответствии с требованиями ВАК Республики Беларусь. Представленный автореферат соответствует содержанию диссертационной работы и ее основным выводам.

Замечания по диссертации

В качестве замечаний по тексту диссертации можно выделить следующие:

1) Было бы уместным привести примеры, показывающие, что условие σ -разрешимости в теоремах 4.1.5 и 4.1.6 является существенным.

2) Имеется незначительное число стилистических замечаний и обнаруженных опечаток, которые не влияют на научную ценность полученных результатов.

3) На стр. 94 диссертации (9 строка снизу) вместо " $G = AX_i^x = AX_i = X_i$ " должно быть " $G = AX_1^x = AX_1 = X_1$ ".

4) На стр. 104 диссертации (10 строка сверху) в выражении " $h_\sigma(M) < |\sigma()|$ " пропущена буква M , должно быть " $h_\sigma(M) < |\sigma(M)|$ ".

5) На стр. 105 диссертации (9 строка снизу) в выражении " $h_\sigma(M) \leq |\pi()| + 1$ " пропущена буква M , должно быть " $h_\sigma(M) \leq |\pi(M)| + 1$ ";

6) На стр. 234 диссертации (11 строка сверху) в предложении "... что $Z/\Phi = P/\Phi$ – группа порядка P ..." следует писать "... что $Z/\Phi = P/\Phi$ – группа порядка p ...".

Вышеуказанные замечания, однако, не искажают сущности изложенных в диссертации положений и выводов и не снижают общую положительную оценку научного уровня и практической важности полученных результатов.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени, на которую он претендует

Исходя из уровня представленных в диссертационной работе Сафоновой И.Н. результатов, логики и стиля их изложения, соискатель является специалистом высокой квалификации в области теории конечных групп и их классов. Высокая научная квалификация соискателя подтверждается и перечнем ее публикаций, включающих большой список статей в международных профильных изданиях, многократной апробацией научных результатов на международном научных конференциях и Гомельском алгебраическом семинаре, большим числом научных публикаций, в которых результаты соискателя уже нашли приложения. Таким образом, научная квалификация И.Н. Сафоновой соответствует ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Заключение

Диссертационная работа Сафоновой Инны Николаевны "Проблемы теории σ -свойств конечных групп и их классов", является законченной квалификационной работой, подготовленной соискателем самостоятельно при научном консультировании доктора физико-математических наук, профессора, профессора кафедры алгебры и геометрии УО "Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины" А.Н. Скибы, представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, по всем критериям соответствует требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук (гл. 3 "Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь"). Содержание диссертационной работы полностью соответствует отрасли физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Считаю возможным присудить И.Н. Сафоновой ученую степень доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел за концептуальную разработку нового направления в теории σ -свойств группы, включающего:

1) оригинальную теорию σ -комплексов Робинсона, позволившую решить в диссертации ряд открытых задач теории групп и, в частности, проблему А.Н. Скибы (2014 г.) о классификации конечных групп, в которых условие σ -перестановочности для подгрупп транзитивно и проблему А. Фриджеро (1974 г.) о классификации конечных групп, в которых условие модулярности для подгрупп транзитивно;

2) теоремы, дающие решения проблем 19.87 и 19.88 из “Коуровской тетради” об описании G -накрывающих систем подгрупп для классов всех σ -разрешимых и всех σ -нильпотентных групп;

3) теоремы теории Π -накрывающих систем подгрупп, позволившие обобщить известные результаты О. Оре, Н. Ито, Дж. Сцепа, В.Э. Дескинса, О.Х. Кегеля, И.М. Айзекса, А.Н. Скибы, В. Го, Б. Ху, Ц. Хуанга о перестановочных подгруппах конечных групп;

4) теорию σ -графов Хоукса и ее приложения в построенной в диссертации теории σ -дисперсивных групп, позволившей дать подтверждение гипотезы А.Н. Скибы (2015 г.) о σ -дисперсивности групп с обобщенно субнормальными $(n + 1)$ -максимальными подгруппами и решение проблемы Л.А. Шеметкова (1995 г.) об описании строения дисперсивных групп методами теории графов;

5) новые интересные приложения теории \mathfrak{F} -критических и обобщенно \mathfrak{F} -критических подгрупп, в частности, описание строения групп, у которых все не σ -нильпотентные подгруппы Шмидта σ -абнормальны и групп, у которых все подгруппы Шмидта абнормальны; описание строения групп с K - \mathfrak{F} -субнормальными и $\mathfrak{F} \wedge sn$ -вложенными подгруппами Шмидта;

6) теоремы построенной в диссертации теории функторно замкнутых n -кратно σ -локальных формаций, позволившие установить основные свойства решетки формаций такого вида, решить проблему Л.А. Шеметкова (1980 г.) о классификации критических формаций в классе σ -локальных формаций,

что в совокупности является крупным достижением в теории конечных групп и их классов.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры финансов
и кредита УО “Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины”

С.Ф. Каморников

С.Ф. Каморников

