УТВЕРЖДАЮ
Ректор
Федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Брянский государственный университет
имени академика И.Г. Петровского»,
доктор филологических наук, профессор

_____ А.В. Антюхов

«____» _____ 2025 г.

ОТЗЫВ ОППОНИРУЮЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертации Сафоновой Инны Николаевны
“Проблемы теории σ-свойств конечных групп и их классов”,
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Экспертиза диссертации проводилась в соответствии с требованиями Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий, утвержденного Указом Президента Республики Беларусь от 17.11.2004 г. № 560 (в ред. от 23.06.23 г. № 180), и Положения о совете по защите диссертаций, утвержденного Постановлением Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 22.02.2005 г. № 19 (в ред. от 03.06.2024 г. № 4).

Соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки

Диссертационная работа Сафоновой Инны Николаевны “Проблемы теории σ-свойств конечных групп и их классов”, представленная на экспертизу, посвящена развитию обобщенно арифметических и геометрических методов исследования конечных групп и их классов, которые позволили соискателю решить ряд важных проблем теории конечных групп и, в частности, ряд ключевых проблем интенсивно развивающейся в настоящее время во многих странах теории σ-свойств групп, т.е. свойств, зависящих от произвольно выбранного разбиения σ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел.

Таким образом, тема и содержание диссертационной работы И.Н. Сафоновой “Проблемы теории σ-свойств конечных групп и их классов” полностью соответствует отрасли “физико-математические науки” и паспорту специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Научный вклад соискателя в разработку научной проблемы с оценкой его значимости

Классический π-метод Холла-Чунихина связан с анализом строения групп относительно разбиения $\{\pi, \pi'\}$ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Данный метод, как известно, оказался весьма эффективным и нашел широкие применения при анализе внутреннего строения конечных групп. Однако при решении ряда современных проблем теории групп такой

метод неприменим, что привело к необходимости анализа σ-свойств групп относительно произвольного разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества $\mathbb{P}$.

Одна из таких трудных задач (проблема Кегеля-Шеметкова) была решена в двух замечательных работах [A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Perez-Ramos, On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups, J. Algebra, 1992, Vol. 148, 42–52] и [А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук, О решетках подгрупп конечных групп, Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры, отв. редактор С.Н. Черников, 27–54, Киев, 1993, Институт математики АН Украины], где было доказано, что если наследственная локальная формация $\mathfrak{F}$ конечных групп является решеточной, т.е. в каждой конечной группе G множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп является подрешеткой решетки всех подгрупп G, то существует такое разбиение $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, что всякая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, где A_i является σ-примарной (т.е. A_i — σ_j-группа для некоторого $j = j(i) \in I$) для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

В работе [A.N. Skiba, On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups, J. Algebra, 2015, Vol. 436, 1–16] методами теории σ-свойств групп были обобщены результаты Дескинза-Кегеля о силовски перестановочных подгруппах конечных групп. Однако решение такой задачи, в качестве теоретической основы, потребовало развития обширного понятийного аппарата и нахождения σ-обобщений нескольких классических теорий (теорий разрешимых и нильпотентных групп, теории субнормальных подгрупп Виландта, теории перестановочных подгрупп и др.). Содержательная теория σ-свойств групп, построенная в этой работе, нашла приложения в работах Н.М. Адарченко, М.М. Аль-Шомрани, А. Баллестер-Болиншеса, Д. Бейдлемана, Д. Ванга, А.Ф. Васильева, Н.Т. Воробьева, Н.Н. Воробьева, Го Вэньбиня, Д. Го, И.М. Дергачевой, М. Диксона, Е.А. Задорожнюк, В.А. Закревской, С.Ф. Каморникова, Ю. Каспика, В.И. Мурашко, М.Д. Перец-Рамоша, Д.О. Ревина, В.Г. Сафонова, М.М. Сорокиной, М. Тромбетти, В.Н. Тютянова, М. Ферраро, А.А. Хелиэйля, И.П. Шабалиной, О.Л. Шеметковой, А. Царева и многих других математиков, чем подтверждается ее актуальность.

Тем не менее, в настоящее время теория σ-свойств групп хорошо развита лишь для класса σ-разрешимых групп, т.е. групп, у которых каждый главный фактор является σ-примарным. В этой связи наиболее крупным достижением диссертации Сафоновой И.Н. является создание новых методов исследования групп и, в частности, методов исследования σ-свойств не обязательно σ-разрешимых групп. В основе таких методов лежат построенные в диссертации оригинальные теории σ-комплексов Робинсона и σ-графов Хоукса групп, теория σ-дисперсивных групп, теория обобщенно субнормальных подгрупп и теория σ-локальных формаций, позволившие решить целый ряд открытых задач, как теории конечных групп в целом, так и теории σ-свойств групп, в частности.

Среди наиболее крупных приложений σ-комплексов Робинсона в диссертации решены проблема классификации $P\sigma T$-групп (А.Н. Скиба, 2014), т.е. конечных групп, в которых отношение σ-перестановочности для подгрупп является транзитивным, и проблема классификации MT-групп (А. Фриджерио, 1974; И. Циммерманн, 1989), т.е. конечных групп, в которых отношение модулярности для подгрупп является транзитивным. Обе эти проблемы хорошо известны. Следует отметить, что решению первой из них посвящены публикации А.Н. Скибы (2015, 2018, 2020), Д. Бейдлемана и А.Н. Скибы (2017), К. Зу, Ц. Као и В. Го (2019), Н.М. Адарченко (2020), А. Баллестер-Болиншеса, М.К. Педраса-Агилеры и М.Д. Перец-Рамоша (2023) и некоторых других авторов, полное ее решение было достигнуто лишь в σ-разрешимом случае.

Решение второй из этих двух проблем было получено А. Фриджерио (1974) и И. Циммерманн (1989) в классе разрешимых групп. Таким образом, задача классификации MT-групп в общем случае оставалась открытой более 45 лет.

Значительным достижением данной диссертации является разработка и успешное применение метода подгрупповых функторов (в смысле А.Н. Скибы [А.Н. Скиба, Алгебра формаций, Беларуская навука: Минск, 1997]). В диссертации такой метод применяется двояко. С одной стороны, в диссертации доказаны теоремы 2.6.2 и 2.6.4, показывающие, что многие известные результаты теории разрешимых обобщенных T-групп имеют общую природу и представляют собой лишь специальные случаи этих двух теорем (для подходящих подгрупповых функторов). Такой подход в изучении T-групп и обобщенных T-групп оригинален и применяется впервые.

С другой стороны, в диссертации создана теория τ-замкнутых σ-локальных формаций и построена алгебра таких формаций, где τ – произвольный подгрупповой функтор в смысле А.Н. Скибы, тем самым достигнуто существенное усиление значительной части результатов докторской диссертации А.Н. Скибы "Локальные формации конечных групп с заданными системами подформаций" (Минск, 1993) и его монографии "Алгебра формаций".

Напомним, что группа называется дисперсивной (О. Оре, Р. Бэр), если она имеет нормальный ряд подгрупп, индексы которого совпадают с порядками ее соответствующих силовских подгрупп. Аналогично, группа называется σ-дисперсивной, если она имеет нормальный ряд подгрупп, индексы которого совпадают с порядками ее соответствующих холловских σ_i-подгрупп. Техника, развитая в диссертации для получения классификации $P\sigma T$-групп и MT-групп и некоторых других классов групп с транзитивным условием обобщенной нормальности, носит фундаментальный характер, она лежит в основе решения многих других открытых задач теории групп, достигнутых в данной диссертации и, в частности, при решении задачи описания σ-дисперсивных групп и задачи структурного описания дисперсивных групп методами теории графов (Л.А. Шеметков, 1995). В настоящее время в этом направлении известен лишь результат Хоукса (1968) о том, что группа является дисперсивной, если граф Хоукса этой группы не имеет циклов. В данной диссертации эти две задачи решены полностью на основе методов теории σ-графов Хоукса, построенной в диссертации. В качестве еще одного приложения такой теории дано решение задачи 4.8 из упомянутой выше работы А.Н. Скибы "On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups".

В диссертации найдены новые применения теории G-накрывающих систем подгрупп, в частности, решены проблема 19.87 из "Коуровской тетради" (Нерешенные проблемы теории групп, Новосибирск, 2022 г.) об описании G-накрывающих систем подгрупп для класса всех σ-разрешимых групп и проблема 19.88 из "Коуровской тетради" об описании G-накрывающих систем подгрупп для класса всех σ-нильпотентных групп. Независимо, две последние задачи были решены в работе [С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов, О двух проблемах из "Коуровской тетради", Труды ИММ УрО РАН, 2021, Т. 27, № 1, 98–102] на основе использования классификации простых неабелевых групп. Применяемые в диссертации методы более эффективны и более перспективны для их дальнейшего использования, поскольку они не используют данную классификацию.

Научный вклад и значимость полученных в диссертации результатов подтверждается их опубликованностью в престижных международных математических журналах: Journal of Algebra (2 ст.), Archiv der Mathematik (1 ст.), Communications in Algebra (6 ст.), Journal of Group Theory (3 ст.), Journal of Algebra and Its Applications (1 ст.),

Quaestiones Mathematicae (1 ст.), Ricerche di Matematica (1 ст.), Advances in Group Theory and Applications (1 ст.), Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (1 ст.), Bulletin of the Australian Mathematical Society (1 ст.), Southeast Asian Bulletin of Mathematics (1 ст.), Communications in Mathematics and Statistics (1 ст.), Mediterranean Journal of Mathematics (1 ст.), Сибирский математический журнал (3 ст.), Математические заметки (2 ст.) и др. Всего по теме диссертационного исследования опубликовано 48 научных работ, в том числе 37 статей в рецензируемых научных журналах (13 статей без соавторов), соответствующих пункту 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, 4 препринта, 5 тезисов докладов и 2 статьи в сборниках материалов научных конференций.

Полученные результаты имеют важное теоретическое значение для дальнейших исследований в области теории конечных и бесконечных групп.

В целом, результаты диссертации носят фундаментальный характер и представляют собой, по существу, новое перспективное концептуальное направление теории групп, связанное с развитием новых обобщенно арифметических и геометрических методов реализации общей проблемы классификации непростых конечных групп.

Конкретные научные результаты (с указанием их новизны и практической значимости), за которые соискателю может быть присуждена искомая ученая степень

Диссертация Сафоновой И.Н. представляет собой комплексное исследование, логически законченное и выполненное на высоком научном уровне. Исходя из анализа содержания диссертационной работы, можно сделать общий вывод о том, что диссертация И.Н. Сафоновой "Проблемы теории σ-свойств конечных групп и их классов" соответствует требованиям Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, а ее автор заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук за концептуальное развитие актуального научного направления σ-свойств групп и их классов, в рамках которого автору удалось решить несколько известных проблем теории конечных групп и, в том числе, стоявшую более 45 лет известную в теории групп проблему А. Фриджерио о группах с транзитивным условием для модулярных подгрупп.

Соискателю И.Н. Сафоновой может быть присуждена ученая степень доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел за следующие принципиально новые научно обоснованные результаты:

– решение проблемы А.Н. Скибы (2014) о классификации конечных групп, в которых условие σ-перестановочности для подгрупп является транзитивным отношением;

– решение проблемы А. Фриджерио (1974) о классификации конечных групп, в которых условие модулярности для подгрупп является транзитивным отношением;

– построение теории σ-специальных замкнутых подгрупповых функторов и ее приложения к решению проблемы классификации обобщенных T-групп;

– дальнейшее развитие теории G-накрывающих систем подгрупп и ее приложения к решению проблем 19.87 и 19.88 из "Коуровской тетради" о G-накрывающих системах подгрупп для классов σ-разрешимых и σ-нильпотентных групп;

– построение теории σ-дисперсивных групп и ее приложения к подтверждению гипотезы о σ-дисперсивности группы с обобщенно субнормальными $(n+1)$-максимальными подгруппами (А.Н. Скиба, 2015);

– построение теории σ-графов Хоукса и ее приложения к решению проблемы описания σ-дисперсивных групп и, в частности, к решению задачи описания дисперсивных групп методами теории графов (Л.А. Шеметков, 1995);

– развитие и применение новых аспектов теории $\mathfrak{F}$-критических подгрупп и, в том числе, подгрупп Шмидта, к исследованию нормы и обобщенной нормы группы;

– построение алгебры функторно замкнутых σ-локальных формаций и ее приложения к решению проблемы Л.А. Шеметкова (1980) о классификации $\mathfrak{H}$-критических формаций для случая произвольной σ-локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа.

Все содержащиеся в диссертации результаты, в том числе, выносимые на защиту, являются новыми и впервые получены ее автором. Исследования, проведенные Сафоновой И.Н., являются актуальными, представляют несомненный научный интерес и вносят существенный вклад в развитие теории непростых конечных групп и их классов.

Практическая значимость результатов диссертации подтверждена их применением в учебном процессе Белорусского государственного университета (2 акта о внедрении).

Рекомендации по практическому использованию результатов диссертации

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, идеи и методы диссертационной работы могут быть использованы в теории групп и теориях других алгебр для решения открытых проблем, реализации общей задачи классификаций групп и алгебр, а также для нахождения приложений в алгебре и в теориях, лежащих за ее пределами (в теории формальных языков, криптографии и др.)

Результаты диссертации Сафоновой И.Н. в настоящее время уже используются более, чем в 60 публикациях других авторов, и они несомненно найдут дальнейшие применения в научных исследованиях, проводимых в научных центрах Республики Беларусь, России, США, Англии, Германии, Италии, Испании, Китая и других стран.

Материалы диссертации будут полезны при чтении спецкурсов по алгебре для студентов математических специальностей университетов, при написании курсовых, дипломных работ и диссертаций.

Замечания по диссертации

Диссертационная работа тщательно оформлена. Все утверждения сопровождаются развернутыми доказательствами. Имеется незначительное число стилистических замечаний и обнаруженных опечаток:

1) на стр. 81 диссертации, 13 строка сверху, вместо "$V = \langle a_1, a_2, \ldots, a_i \rangle$" следует писать "$V = \langle a_1, a_2, \ldots, a_t \rangle$";

2) на стр. 96 диссертации, 2 строка снизу, вместо *"вопреки выбор"* следует писать *"вопреки выбору"*;

3) на стр. 104 диссертации, 10 строка сверху, в выражении "$h_\sigma(M) < |\sigma()|$" пропущена буква, следует писать "$h_\sigma(M) < |\sigma(M)|$";

4) на стр. 105 диссертации, 20 строка снизу, в предложении "... секция H/K G такая, что ..." должно быть "... секция H/K *группы* G такая, что ...";

5) на стр. 105 диссертации, 9 строка снизу, в выражении "$h_\sigma(M) \leq |\pi()| + 1$" пропущена буква, следует писать "$h_\sigma(M) \leq |\pi(M)| + 1$";

6) на стр. 120 диссертации, 6 строка снизу, в выражении "$\ldots = Z_\infty(G/\Phi) \cap (G^{\mathfrak{N}}/\Phi = \ldots$" следует писать "$\ldots = Z_\infty(G/\Phi) \cap (G^{\mathfrak{N}}/\Phi) = \ldots$";

7) на стр. 129 диссертации, 2 строка снизу вместо *"известные результатв"* следует писать *"известные результаты"*;

8) на стр. 143 диссертации, 1 строка сверху, в выражении "$V(G) \leq N_G(U^{\mathfrak{F})}$" следует писать "$V(G) \leq N_G(U^{\mathfrak{F}})$";

9) на стр. 156 диссертации, 21 строка снизу, в выражении “$r \geq \pi(G)|$” следует писать “$r \geq \pi|(G)|$”;

10) на стр. 180 диссертации, 2 строка снизу, в выражении “$h \leq f = \vee^{\tau}_{\sigma_{n-1}}(f_j \mid j \in J$” следует писать “$h \leq f = \vee^{\tau}_{\sigma_{n-1}}(f_j \mid j \in J)$”.

Следует отметить, что приведенные выше замечания не затрагивают основных положений и выводов, содержащихся в диссертации, и не снижают научной и практической ценности полученных результатов.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени, на которую он претендует

По совокупности представленных новых научно обоснованных результатов, подтвержденных научными публикациями в журналах высокого уровня и докладами по теме диссертации на научных конференциях, аргументированных выводов, используемых методов исследования и интерпретации полученных результатов, качественного оформления диссертации в полном соответствии с требованиями ВАК Республики Беларусь, можно сделать вывод о том, что соискатель Сафонова И.Н. соответствует научной квалификации доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Отзыв оппонирующей организации, подготовленный экспертом доктором физико-математических наук Сорокиной М.М., рассмотрен и утвержден на научном собрании кафедры математического анализа, алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского» (протокол от 24 апреля 2025 г. № 11).

Сафонова И.Н. выступила с докладом на расширенном научном собрании кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского» и дала исчерпывающие ответы на заданные вопросы.

На заседании научного собрания присутствовало 24 человека, из которых 6 докторов наук и 13 кандидатов наук, в том числе 3 доктора физико-математических наук и 8 кандидатов физико-математических наук.

Результаты открытого голосования присутствующих на заседании, имеющих ученые степени: всего голосовало — 19 человек (6 докторов наук и 13 кандидатов наук); «за» — 19; «против» — 0; «воздержались» — 0.

Председатель научного собрания
Врио заведующего кафедрой
математического анализа, алгебры и геометрии
ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет
им. академика И.Г. Петровского»,
кандидат физико-математических наук
Махина Наталья Михайловна
раб. тел.: +7(4832)58-93-38, доб. 1134

Эксперт оппонирующей организации
профессор кафедры математического анализа,
алгебры и геометрии

ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет
им. академика И.Г. Петровского»
доктор физико-математических наук, доцент
Сорокина Марина Михайловна
e-mail: mmsorokina@yandex.ru;
раб. тел.: +7(4832)58-93-38, доб. 1134

Секретарь заседания научного собрания

доцент кафедры математического анализа,
алгебры и геометрии
ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет
им. академика И.Г. Петровского»
кандидат физико-математических наук, доцент
Еловикова Юлия Александровна
e-mail: elov77@yandex.ru;
раб. тел.: +7(4832)58-93-38, доб. 1134

Контактные данные

Адрес: 241036, Российская Федерация,
г. Брянск, ул. Бежицкая, 14.
Телефон служебный: +7(4832)66-65-38,
e-mail: bryanskgu@mail.ru;
web-сайт: https://brgu.ru/.

ОТДЕЛ ДЕЛОПРОИЗВОДСТВА

Малиной Н.М., Сорокиной М.М., Еловиковой Ю.А.
Подпись _____ заверяю
Документовед Силуянова