Задачи 1 тура 2013/2014 года

Задача 1. Решите уравнение $x^2-7x+10=\frac{7}{x^2-11x+28}$ и найдите сумму его корней. (2 балла)

Решение

$$x^2-7x+10=\frac{7}{x^2-11x+28}\Leftrightarrow(x-2)(x-5)=\frac{7}{(x-4)(x-7)}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x-7)(x-4)(x-5)=7,\\ x\neq 4,\ \ x\neq 7.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-9x+14)(x^2-9x+20)=7,\\ x\neq 4,\ \ x\neq 7.\end{cases}$$

Произведем замену: $t=x^2-9x+17$, получим уравнение: $(t-3)(t+3)=7\Leftrightarrow t^2=16$. Отсюда $t=4$ или $t=-4$. Возвращаясь к замене получаем: $\left[\begin{array}{l}x^2-9x+17=4,\\ x^2-9x+17=-4.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-9x+13=0,\\ x^2-9x+21=0.\end{array}\right.$

Второе уравнение действительных корней не имеет, как нетрудно заметить, числа 4 и 7 не являются корнями первого уравнения, поэтому по теореме Виета сумма корней равна 9.

Ответ: 9.

Задача 2. Сумма первых 80 членов арифметической прогрессии равна 80, а сумма первых 160 её членов равна 320. Чему равна сумма первых 40 членов этой прогрессии? (4 балла)

Решение

I способ

По условию задачи составим систему:

$$\begin{cases}S_{80}=80,\\ S_{160}=320\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2a_1+79d}{2}\cdot 80=80,\\ \dfrac{2a_1+159d}{2}\cdot 160=320\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=\dfrac{2}{80},\\ a_1=\dfrac{1}{80}.\end{cases}$$

Тогда искомая величина равна $S_{40}=\frac{2a_1+39d}{2}\cdot 40=20$.

II способ

Обозначим, через $S_{(m,n)}$ — сумму членов арифметической прогрессии с номера m по номер n включительно. Данные суммы образуют арифметическую прогрессию, то есть $S_{(41,80)}=S_{40}+D$, $S_{(81,120)}=S_{40}+2D$ и так далее. Имеем:

$$\begin{cases}S_{40}+S_{40}+D=80,\\ S_{40}+S_{40}+D+S_{40}+2D+S_{40}+3D=320\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2S_{40}+D=80\\ 4S_{40}+6D=320\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}12S_{40}+6D=480\\ 4S_{40}+6D=320\end{cases}\Rightarrow 8S_{40}=160\Leftrightarrow\ S_{40}=20.$$

Ответ: 20.

Задача 3. $ABCD$ — прямоугольник. Точки N и K — середины сторон AD и CD, O — точка пересечения отрезков AK и BN. Если площадь прямоугольника равна 60, то площадь четырехугольника $OKDN$ равна… (6 баллов)

Решение

Способ 1

Введем систему координат: $A(0;0)$, $B(0;2b)$, $C(2a;2b)$, $D(2a;0)$, $K(2a;b)$, $N(a;0)$.

Уравнение прямой BN: $\frac{x}{a}+\frac{y}{2b}=1$.

Уравнение прямой AK: $\frac{x-0}{2a-0}=\frac{y-0}{b-0}\Leftrightarrow\frac{x}{2a}-\frac{y}{b}=0$.

$$O=BN\cap AK\Rightarrow O\left(\frac{4a}{5};\frac{2b}{5}\right).$$

$$S_{\Delta AKD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot KD=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot CD\right)=\frac{1}{4}\cdot AD\cdot CD=\frac{1}{4}\cdot 60=15;$$

$$S_{\Delta AKD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot KD = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = ab = 15;$$

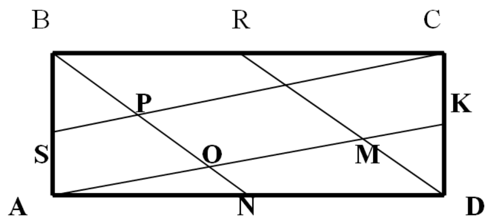
$$S_{\Delta AON} = \frac{1}{2} \cdot AN \cdot O_y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2b}{5} = \frac{ab}{5} = 3;$$

$$S_{OKDN} = S_{\Delta AKD} - S_{\Delta AON} = 15 - 3 = 12.$$

Ответ: 12.

Способ 2 (Сакун Андрей)

Пусть R и S – середины сторон BC и AB соответственно. Проведем DR и CS.



Очевидно $DR || BN$, $CS||AK$ и $BP = MD$.

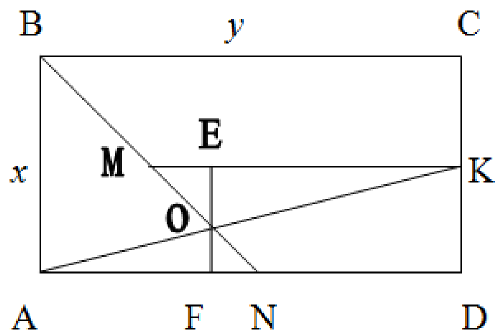
По теореме Фалеса $BP = PO$ и $AO = OM$, то $ON = \frac{1}{2}MD$, следовательно, $ON = \frac{1}{5}BN$ и $S_{AON} = \frac{1}{5} S_{ABN} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} AN \cdot AB = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} AD \cdot AB = \frac{1}{20} AD \cdot AB = \frac{1}{20} \cdot 60 = 3.$

$$S_{AKD} = \frac{1}{2} AD \cdot KD = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{1}{2} CD = \frac{1}{4} AD \cdot CD = \frac{1}{4} \cdot 60 = 15.$$

$$S_{OKDN} = S_{AKD} - S_{AON} = 15 - 3 = 12.$$

Ответ: 12.

Способ 3 (Жуковский Андрей)



Пусть $AB = CD = x$, $AD = BC = y$, тогда $S_{ABCD} = xy = 60$.

$S_{AKD} = \frac{1}{2} KD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} xy = \frac{1}{4} xy = \frac{1}{4} \cdot 60 = 15.$

$S_{ONKD} = S_{AKD} - S_{AON};$

$S_{AON} = \frac{1}{2} AN \cdot OF;$

MK – средняя линия трапеции *NDCB*.

$MK = \dfrac{y + \frac{1}{2} y}{2} = \frac{3}{4} y;$

Треугольники AON и MOK подобны по двум углам (углы MOK и AON равны как вертикальные, а углы MKO и OAN равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых MK и AN и секущей AK). Значит, $\frac{MK}{AN}=\frac{OE}{OF}$; $\frac{\frac{3}{4}y}{\frac{1}{2}y}=\frac{OE}{OF}$; $OE=\frac{3}{2}OF$;

Тогда $FE=KD=\frac{1}{2}x=OE+OF=\frac{5}{2}OF$; $OF=\frac{1}{2}x\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}x$;

$S_{AON}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y\cdot\frac{1}{5}x=\frac{1}{20}xy=3$;

$S_{OKDN}=15-3=12$.

Ответ: 12.

Задача 4. Из города A в город B выезжает велосипедист, а через 3 часа после его выезда из города B выезжает навстречу мотоциклист, скорость которого в 3 раза больше скорости велосипедиста. К моменту встречи велосипедист проехал половину пути до B. Если бы мотоциклист выехал не через 3, а через 2 часа после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к A. Найдите расстояние между A и B. (6 баллов)

Решение

Пусть длина пути от A до B равна S, x — скорость велосипедиста, тогда $3x$ — скорость мотоциклиста, $3x$ — путь проделанный велосипедистом до выезда мотоциклиста, $\frac{S-3x}{x+3x}$ — время встречи велосипедиста и мотоциклиста. Получаем уравнение:

$$3x+\frac{S-3x}{x+3x}\cdot x=\frac{S}{2}.$$

По аналогии для случая «если бы…» получаем: $2x+\frac{S-2x}{x+3x}\cdot x=\frac{S}{2}-15$.

Объединяем эти уравнения в систему и приводим подобные:

$$\begin{cases}\frac{9}{4}x-\frac{S}{4}=0,\\ \frac{6}{4}x-\frac{S}{4}=-15.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{9}{4}x-\frac{S}{4}=0,\\ \frac{9}{4}x-\frac{S}{4}-\frac{3}{4}x=-15.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x=S,\\ 3x=60.\end{cases}\Rightarrow \mathrm{S}=180.$$

Ответ: 180.

Комментарии. Если рассматривать движение мотоциклиста, то получаем следующую систему:

$$\begin{cases}\frac{S-3x}{x+3x}\cdot 3x=\frac{S}{2},\\ \frac{S-2x}{x+3x}\cdot 3x=\frac{S}{2}+15.\end{cases}$$

Ответ: 180.

Задача 5. Найдите значение выражения $\frac{30}{\sin^2 26^\circ+\sin^2 146^\circ+\sin^2 94^\circ}$. (8 баллов)

Решение

$$\sin^2 26^\circ+\sin^2 146^\circ+\sin^2 94^\circ=\sin^2 26^\circ+\sin^2(180^\circ-34^\circ)+\sin^2(90^\circ+4^\circ)=$$

применим формулы приведения

$$=\sin^2 26^\circ+\sin^2 34^\circ+\cos^2 4^\circ=$$

понизим степени слагаемых

$$=\frac{1-\cos 52^\circ}{2}+\frac{1-\cos 68^\circ}{2}+\frac{1+\cos 8^\circ}{2}=\frac{3-(\cos 52^\circ+\cos 68^\circ)+\cos 8^\circ}{2}=$$

заменим сумму косинусов произведением

$$= \frac{3 - 2\cos 60° \cos 8° + \cos 8°}{2} = \frac{3 - \cos 8° + \cos 8°}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{30}{\sin^2 26° + \sin^2 146° + \sin^2 94°} = \frac{30}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20.$$

Ответ: 20.

Задача 6. На реке расположены пункты A и B, причем B ниже по течению на расстоянии 20 км от A. Катер направляется из A в B, затем сразу возвращается в A и снова следует в B. Одновременно с катером из A отправился плот. При возращении из B катер встретил плот в 4 км от A. На каком расстоянии от A катер нагонит плот, следуя вторично в B? (10 баллов)

Решение (арифметическое).

Заметим, что катер удаляется от плота или приближается к нему с одной и той же скоростью — своей скоростью относительно воды. Следовательно, время, которое катер плыл от пункта A до B, удаляясь от плота, равно времени, которое катер плыл от пункта B до встречи с плотом. Значит, отношение путей, пройденных катером от пункта A до B и от B до плота, равно отношению его скоростей по и против течения, то есть отношение скоростей равно $\frac{20}{16} = \frac{5}{4}$. Таким же, и по тем же соображениям, будет отношение путей, пройденных катером от пункта A до второй встречи с плотом и от первой встречи до пункта A. Таким образом, катер нагонит плот в 5 км от пункта A.

Ответ: 5.

Решение (алгебраическое).

Способ 1

Пусть скорость катера $v_{\text{к}}$, скорость плота равна скорости течения реки и равна $v_{\text{п}}$, t – время в пути катера, а соответственно и плота. Так как расстояние между A и B равно 20 км, то до встречи с плотом катер проплыл $v_{\text{к.ср.}}t = 20 + 16$, а плот проплыл $v_{\text{п}}t = 4$. Значит, $v_{\text{к.ср.}} = 9v_{\text{п}}$.

Пусть x км проплыл плот до следующей встречи с катером. Тогда катер проплывает 36 км за то же время, что плот 4 км. Значит, катер проплывет $(4 + 4 + x)$ км за то же время, что плот x км. Отсюда, $\frac{36}{4} = \frac{8+x}{x}$, $36x = 4(8 + x)$, $32x = 32$, $x = 1$ (км). Значит, катер догонит плот на расстоянии 4+1 =5 км от пункта A.

Ответ: 5 км.

Способ 2

Пусть x — скорость катера, y — скорость течения, z — искомое расстояние. Из первой встречи следует уравнение: $\frac{20}{x+y} + \frac{20-4}{x-y} = \frac{4}{y}$ (*). Из второй встречи следует, что $\frac{20}{x+y} + \frac{20}{x-y} + \frac{z}{x+y} = \frac{z}{y}$ (**). Из (*) получаем, что $x = 9y$. Подставляя найденное соотношение в (**), получим, что $z = 5$.

Ответ: 5.

Способ 3

Пусть x — скорость катера, y — скорость течения. Тогда $\frac{20}{x+y}$ — время, за которое катер пройдет путь от A до B; $\frac{20y}{x+y}$ — расстояние, пройденное плотом за тоже время; $\frac{20-\frac{20y}{x+y}}{(x-y)+y}$ — время, за которое встретится плот и катер, плывущий впервые из B. Из условия задачи получаем уравнение:

$$\left(\frac{20 - \frac{20y}{x+y}}{(x-y)+y} + \frac{20}{x+y}\right) y = 4. \qquad (1)$$

Аналогично составляем искомое выражение. $\frac{20}{x+y} + \frac{20}{x-y}$ —время, за которое пройдет катер путь $A - B - A$, $\left(\frac{20}{x+y} + \frac{20}{x-y}\right) y$ — расстояние, которое пройдет плот за это время. $\frac{\left(\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}\right)y}{(x+y)-y}$ — время, за которое катер догонит плот, следуя вторично из A. $\frac{\left(\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}\right)y}{(x+y)-y}+\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}$ —время, прошедшее от начала движения до второй встречи. Тогда искомое выражение:

$$\left(\frac{\left(\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}\right)y}{(x+y)-y}+\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}\right)y. \qquad (2)$$

Из (1) следует, что $\frac{10y}{x+y}=1 \Leftrightarrow x=9y$. Подставляя найденное соотношение в (2), получаем 5.

Ответ: 5.