

Школа юных. Юный математик
Задачи 2 тура 2018-2019 учебного года
(срок отправки решения: до 13 апреля)

Задание 1. Определить боковую поверхность и объем усеченного конуса с образующей, равной l , описанного около шара радиуса r . (10 баллов)

Рассмотрим осевое сечение данной комбинации тел: равнобокую трапецию $ABCD$, $AB = CD = l$ и вписанный в нее круг с центром O радиуса r .

O_1 – центр нижнего основания усеченного конуса – середина AD , O_2 – центр верхнего основания – середина BC , a и b – радиусы соответственно нижнего и верхнего оснований, K – точка касания круга, вписанного в трапецию $ABCD$, со стороной AB .

Тогда $O_1A = AK = a$, $O_2B = BK = b$, $OK \perp AB$, $OK = r$, $a + b = l$.

Боковая поверхность усеченного конуса $S = \pi(a + b)l = \pi l^2$.

Так как O – центр круга, вписанного в трапецию, то $\angle AOB = 90^\circ$, $OK^2 = AK \cdot BK$, т.е. $ab = r^2$.

Высота усеченного конуса $H = 2r$.

Объем усеченного конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi H (a^2 + ab + b^2) = \frac{2}{3} \pi r ((a + b)^2 - ab) = \frac{2}{3} \pi r (l^2 - r^2).$$

Ответ: πl^2 ; $\frac{2}{3} \pi r (l^2 - r^2)$.

Задание 2. Решить уравнение $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$. (5 баллов)

Сгруппируем степени с основанием 2 в левой части, а степени с основанием 3 в правой части уравнения и разложим каждую часть на множители. Имеем

$$2^{x^2-1}(1 + 2^3) = 3^{x^2-1}(1 + 3), \text{ или } 2^{x^2-1} \cdot 3^2 = 3^{x^2-1} \cdot 2^2.$$

Разделив обе части уравнения на $3^{x^2-1} \cdot 2^2 \neq 0$, получим

$$\frac{2^{x^2-1} \cdot 3^2}{3^{x^2-1} \cdot 2^2} = 1, \text{ или } \frac{2^{x^2-3}}{3^{x^2-3}} = 1, \text{ или } \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^0.$$

Отсюда $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$.

Ответ: $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$.

Задание 3. Докажите, что выражение $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ представляет собой иррациональное число. (5 балла)

Доказательство. Допустим противное: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = t$, где $t \in \mathbb{Q}$. Тогда $\sqrt{3} = t - \sqrt{2}$, откуда $3 = t^2 - 2\sqrt{2}t + 2$; $2\sqrt{2}t = t^2 - 1$; $\sqrt{2} = \frac{t^2 - 1}{2t}$. Получается, что

иррациональное число $\sqrt{2}$ равно рациональному числу $\frac{t^2-1}{2t}$, чего быть не может.

Получено противоречие. Делаем вывод, что указанное выражение представляет собой иррациональное число.

Задание 4. Найти количество целых решений неравенства $(9-5x)^4 + 2(9-5x)^2 - 24 < 0$. (5 баллов)

Сделаем замену: $(9-5x)^2 = t$. Тогда получим неравенство $t^2 + 2t - 24 < 0$; $(t+6)(t-4) < 0$. Значит, $-6 < t < 4$. Возвращаясь к переменной x , получим $-6 < (9-5x)^2 < 4$. Двойное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (9-5x)^2 > -6, \\ (9-5x)^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ (9-5x-2)(9-5x+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (7-5x)(11-5x) < 0.$$

Итак, решением неравенства является промежуток $(1,4; 2,2)$, которому принадлежит только одно целое число, равное 2.

Ответ: одно.

Задание 5. Является ли функция $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$ четной или нечетной? (5 баллов)

$$f(-x) = \frac{1}{-x-2} + \frac{1}{-x+2} = -\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = -\left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}\right) = -f(x).$$

Так как функция $f(x)$ определена на симметричном относительно нуля множестве $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ и для нее выполняется условие $f(-x) = -f(x)$, то она является нечетной.

Ответ: нечетная.