

Школа юных. Юный математик
Задачи 1 тура 2018-2019 учебного года
(срок отправки решения: до 7 марта)

Задание 1. Вычислить $\operatorname{tg} 4\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$. (4 балла)

$$\text{Т.к. } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{8}{15}, \text{ то } \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{240}{161}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{240}{161}.$$

Задание 2. На графике функции $y = 0,8|x| \cdot \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ найти точку, ордината которой в 2 раза больше её абсциссы (сам график строить не обязательно). (9 баллов)

Если $x \geq 0, y \geq 0$, то ордината и абсцисса искомой точки связаны соотношением $y = 2x$. Тогда имеем уравнение

$$2x = 0,8x \cdot \frac{x^2 + 1}{x + 1}. \quad (1)$$

Если $x \neq 0$, то уравнение (1) принимает вид $5 = 2 \cdot \frac{x^2 + 1}{x + 1}$. Корнями этого уравнения являются числа 3 и $-\frac{1}{2}$. Итак, учитывая условие $x \geq 0$, имеем точку (3;6).

Заметим, что $x = 0$ также является решением уравнения (1). Кроме того, точка (0;0) формально может считаться решением задачи, т.к. $2 \cdot 0 = 0$. Однако с точки зрения логики координаты точки (0;0) удовлетворяют условию «ордината равна абсциссе», а не условию «ордината в 2 раза больше абсциссы».

Возможен еще один случай $x < 0, y < 0$. Но тогда ордината и абсцисса искомой точки связаны соотношением $x = 2y$ (например, у точки (-2;-1) ордината -1 в 2 раза больше абсциссы -2, т.к. $-1 \cdot 2 = -2$). Поэтому имеем уравнение $5 = -8 \cdot \frac{x^2 + 1}{x + 1}$, которое, однако, не имеет действительных корней.

Ответ: (3;6). Если в ответ записана и точка (0;0), оценка не снижается.

Задание 3. В цилиндрический сосуд, радиус основания которого $R = 40$ мм, помещен шар радиуса $r = 3$ см. В сосуд наливается вода так, что ее свободная поверхность касается поверхности шара (шар при этом не всплывает). Определить толщину того слоя воды, который получится, если вынуть шар из сосуда. (10 баллов)

Пусть V_0 - объем воды в сосуде, когда в него помещен шар, V_1 - объем шара, V_2 - объем жидкости в сосуде после того, как вынули шар, h - высота искомого

слоя жидкости, H - высота слоя жидкости с шаром, V - объем воды и шара вместе. Тогда

$$H = 2r = 6 \text{ см},$$

$$V = \pi R^2 H = 96\pi \text{ см}^3,$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \text{ см}^3,$$

$$V_0 = V - V_1 = 60\pi \text{ см}^3,$$

$$V_2 = \pi R^2 h.$$

$$\text{Т.к. } V_2 = V_0, \text{ то } h = \frac{V_0}{\pi R^2} = \frac{60\pi}{16\pi} = 3,75 \text{ (см)}.$$

Ответ: 3,75 см.

Задание 4. Решить уравнение $\sqrt{2} \cdot 0,5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}} - 16^{\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}} = 0$. (7 баллов)

Приведя все степени к одному основанию 2, получим

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{5}{4\sqrt{x}+10}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}} = 0,$$

или

$$2^{\frac{1}{2} - \frac{5}{4\sqrt{x}+10}} = 2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}}.$$

Полагая $\sqrt{x} = y \geq 0$, переходим к равносильному уравнению

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{2(2y+5)} = \frac{2}{y+1},$$

которое имеет корни $y_1 = 5$ и $y_2 = -2$ (второй не подходит, т.к. $y \geq 0$). Итак, $x = 25$.

Ответ: $x = 25$.

Задание 5. Докажите, что $3^{-2} + 5^{-2} + 7^{-2} + 9^{-2} + 11^{-2} + 13^{-2} < 2^{-2}$. (6 баллов)

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{121} + \frac{1}{169} &< \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{168} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{14} \right) < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Задание 6. Найти сумму положительных корней уравнения $(x^2 - 3x - 9)^2 + 4x^2 - 41 = 12x$. (4 балла)

Перепишем уравнение в виде $(x^2 - 3x - 9)^2 + 4(x^2 - 3x - 9) - 5 = 0$. Введем новую переменную $x^2 - 3x - 9 = t$ и получим относительно t уравнение $t^2 + 4t - 5 = 0$. Решив его, найдем $t_1 = -5$, $t_2 = 1$.

Значит,

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 9 = -5, \\ x^2 - 3x - 9 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4, & x_2 = -1, \\ x_3 = 5, & x_4 = -2. \end{cases}$$

Сумма положительных корней исходного уравнения равна 9.

Ответ: 9.