УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

Объект авторского права
УДК 512.542

**САФОНОВА
Инна Николаевна**

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ σ-СВОЙСТВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ИХ КЛАССОВ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2025

Научная работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Научный консультант: **Скиба Александр Николаевич**,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и геометрии УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины».

Официальные оппоненты: **Махнев Александр Алексеевич**,
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского» Уральского отделения Российской академии наук;

Каморников Сергей Федорович,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры финансов и кредита УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»;

Воробьев Николай Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики УО «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Оппонирующая организация – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского».

Защита состоится 23 мая 2025 года в 14-00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины» по адресу: 246028, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3-1. Телефон ученого секретаря: +375 (232) 51-03-07. E-mail: sovetd021201@yandex.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины».

Автореферат разослан 14 апреля 2025 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций В. И. Мурашко

ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы конечны. К арифметическим методам исследования групп относятся методы, базирующиеся на информации о порядке группы и, в частности, информации о простых делителях ее порядка. Такое направление восходит к теореме Лагранжа о делимости порядка группы на порядки ее подгрупп, теореме Силова, классическим результатам Ф. Холла о разрешимых группах и результатам Ф. Холла и С.А. Чунихина о π-свойствах групп, т.е. об их свойствах относительно разбиения $\{\pi, \pi'\}$ множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Все эти результаты легли в основу современной теории групп и нашли применение при доказательстве теоремы Фейта–Томпсона о разрешимости групп нечетного порядка, а также при решении общей задачи классификации неабелевых простых групп.

К арифметическим методам исследования групп можно отнести и методы теории арифметических графов групп, т.е. таких ассоциированных с группой графов, у которых множество вершин совпадает с множеством всех простых делителей порядка группы.

Классическим примером арифметического графа группы является граф Грюнберга–Кегеля [1, 2, 3], в котором вершины p и q соединены ребром (p, q), если G имеет элемент порядка pq. Такие графы нашли глубокие применения при решении многих задач современной теории групп. Полезные применения нашли и другие арифметические графы группы: графы Хоукса [4], силовские графы [5, 6], $\mathfrak{N}$-критические графы Васильева–Мурашко [7, 8] и др.

Теорию арифметических графов групп можно отнести и к геометрическим методам исследования групп, которые позволяют изучать группы по свойствам ассоциированных с ними различных геометрических объектов (частично упорядоченных множеств, решеток и полурешеток, графов и др.).

Следует отметить, что арифметические методы исследования групп в классическом понимании этого термина оказались не применимыми при реше-

[1] Williams, J.S. Prime graph components of finite groups / J.S. Williams // Journal of Algebra. – 1981. – Vol. 69, № 2. – P. 487–513.

[2] Кондратьев, А.С. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп / А.С. Кондратьев // Математический сборник. – 1989. – Т. 180, № 6. – С. 787–797.

[3] Мазуров, В.Д. Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов / В.Д. Мазуров // Алгебра и логика. – 1998. – Т. 37, № 6. – С. 651–666.

[4] Hawkes, T. On the class of the Sylow tower groups / T. Hawkes // Mathematische Zeitschrift. – 1968. – Vol. 105, № 5. – P. 393–398.

[5] Kazarin, L.S. On the Sylow graph of a group and Sylow normalizers / L.S. Kazarin, A. Martinez-Pastor, M.D. Perez-Ramos // Israel Journal of Mathematics. – 2011. – Vol. 186. – P. 251–271.

[6] Russo, F.G. Problems of connectivity between the Sylow graph, the prime graph and the non-commuting graph of a group / F.G. Russo // Advances in Pure Mathematics. – 2012. – Vol. 2, № 6. – P. 391–396.

[7] Васильев, А.Ф. Арифметические графы и классы конечных групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Сибирский математический журнал. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 55–73.

[8] Мурашко, В.И. Группы с заданными системами подгрупп Шмидта / В.И. Мурашко // Сибирский математический журнал. 2019. – Т. 60, № 2. – С. 429–440.

нии ряда задач современной теории групп и, в частности, целого ряда открытых проблем о *σ-свойствах групп* (в терминологии работ [9,10]), т.е. об их свойствах относительно произвольного разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества всех простых чисел $\mathbb{P}$.

Отдельные результаты о σ-свойствах групп были доказаны и использовались в качестве вспомогательных утверждений в публикациях многих авторов и, в частности, в монографиях Л.А. Шеметкова [11], А.Н. Скибы [12], В. Го [13, 14] и А. Баллестера-Болинчес и Л.М. Эскверо [15].

Подгруппу A группы G называют *σ-перестановочной* [10] в G, если G *σ-полна*, т.е. G имеет холлову σ_i-подгруппу для всех $i \in I$ и A *перестановочна* со всеми такими холловыми подгруппами H из G, т.е. $AH = HA$ для всех i.

Фактически, возникновение теории σ-свойств групп связано, главным образом, с попытками решить следующую задачу, которая для специального разбиения $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$ множества $\mathbb{P}$ решена в работах [16, 17].

Проблема 1 (А.Н. Скиба [9, 10]). *Каково строение $P\sigma T$-групп, т.е. групп, в которых условие σ-перестановочности подгрупп является транзитивным?*

Группа G называется [10]: *σ-разрешимой*, если каждый ее главный фактор H/K *σ-примарен*, т.е. H/K – σ_i-группа для некоторого $i \in I$; *σ-нильпотентной*, если G – прямое произведение σ-примарных групп.

Отметим, что эта задача оказалась весьма трудной даже в σ-разрешимом случае, поскольку ее решение в этом специальном случае потребовало разработки нескольких классических разделов теории групп (теорий разрешимых и π-разрешимых групп, теории нильпотентных групп, теории субнормальных подгрупп, теории решеток подгрупп и др.).

Теория σ-разрешимых $P\sigma T$-групп разработана в работах [10, 18, 19, 20], а так-

[9] Skiba, A.N. On σ-properties of finite groups I / A.N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 34(4). – С. 89–96.

[10] Skiba, A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

[11] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.

[12] Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

[13] Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Science Press-Kluwer Academic Publishers, Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London: Springer Dordrecht, 2000. – 258 p.

[14] Guo, W. Structure theory for canonical classes of finite groups / W. Guo. – Heidelberg-New York-Dordrecht-Londonc: Springer, 2015. – 359 p.

[15] Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Mathematics and Its Applications (Springer) 584. Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.

[16] Agrawal, R.K. Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups / R.K. Agrawal // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1975. – Vol. 47. – P. 77–83.

[17] Robinson, D.J.S. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // Journal of the Australian Mathematical Society. – 2001. – Vol. 70, № 2. – P. 143–159.

[18] Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.

[19] Zhu, X. Finite σ-soluble groups in which σ-permutability is a transitive relation / X. Zhu, C. Cao, W. Guo // Journal of Algebra and Its Applications. – 2019. – Vol. 18, № 4. – Article: 1950064.

[20] Adarchenko, N.M. A new characterization of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / N.M. Adarchenko // Algebra and Discrete Mathematics. – 2020. – Vol. 29, № 1. – P. 33–41.

же в недавних статьях [21, 22].

Одной из главных целей данной диссертации является решение проблемы 1 для классов групп без условия σ-разрешимости, а также нахождение описаний σ-разрешимых $P\sigma T$-групп, отличных от полученных в работе [18].

Напомним, что В.Е Дескинз [23] и О.Х. Кегель [24] доказали, что если подгруппа A S-перестановочна в группе G, т.е. $AP = PA$ для всех силовских подгрупп P группы G, то секция A^G/A_G нильпотентна. Этот классический результат стал ключевым при решении задачи классификации конечных PST-групп, т.е. групп, в которых условие силовской перестановочности для подгрупп является транзитивным [16, 17]. Одним из первых среди наиболее значительных результатов теории σ-свойств групп является следующее обобщение [10] этого результата: *Если подгруппа A σ-перестановочна в G, то секция A^G/A_G σ-нильпотентна.* Именно этот результат явился ключевым при решении проблемы 1 в классе σ-разрешимых групп, достигнутом в работах [10, 18].

Отметим, что результаты, методы и некоторые идеи работ [10, 18] получили дальнейшее развитие в публикациях многих отечественных и зарубежных математиков, в том числе, в ряде публикаций по теории бесконечных групп (см., например, недавние публикации М. Феррара, М. Тромбетти [25, 26]). Это обстоятельство указывает на актуальность и перспективность такого направления исследований и основным достижением данной диссертации является реализация предложенных автором новых подходов к изучению σ-свойств групп, что позволило решить ряд открытых задач теории групп, первой из которых является проблема 1.

Остановимся кратко на некоторых других задачах, решенных в диссертации. Как известно, классификация групп с модулярной решеткой подгрупп была получена К. Ивасавой (см. [27], теорема 2.4.4). В дальнейшем стали изучаться и нашли применения *модулярные подгруппы* в группе G, которые являются модулярными элементами (в смысле Куроша [27, с. 43]) решетки $\mathcal{L}(G)$ всех подгрупп группы G. Значительная часть книги [27] посвящена изучению и приложениям модулярных подгрупп. В настоящее время теория модулярных подгрупп хорошо развита. Тем не менее, следующая хорошо известная проблема долгое время

[21] Zhang, C. On a generalisation of finite T-groups / C. Zhang, W. Guo, A.-M. Liu // Communications in Mathematics and Statistics. – 2022. – Vol. 10, № 1. – P. 153–162.

[22] Ballester-Bolinches, A. On two classes of generalised finite T-groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Pérez-Calabuig // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales - Serie A: Matematicas. – 2023. – Vol. 117, № 3. – Article: 105.

[23] Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Mathematische Zeitschrift. – 1963. – Vol. 82, № 2. – P. 125–132.

[24] Kegel, O.H. Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen / O.H. Kegel // Mathematische Zeitschrift. – 1962, № 1. – Vol. 78. – P. 205–221.

[25] Ferrara, M. σ-Subnormality in locally finite groups / M. Ferrara, M. Trombetti // Journal of Algebra. – 2023. – Vol. 614. – P. 867–897.

[26] Ferrara, M. Joins of σ-subnormal subgroups / M. Ferrara, M. Trombetti // Illinois Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 68, no. 2. – P. 211–244.

[27] Schmid, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmid. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – 564 p.

оставалась открытой.

Проблема 2 (А. Фриджерио[28]). *Каково строение группы G, в которой условие модулярности для подгрупп является транзитивным, т.е. если $A \leq B \leq G$, где A модулярна в B и B модулярна в G, то A модулярна в G?*

Такая проблема впервые анализировалась в работе А. Фриджерио[28], где было доказано, что условие модулярности для подгрупп является транзитивным в конечной разрешимой группе G тогда и только тогда, когда решетка $\mathcal{L}(G)$ является модулярной. Новое доказательство этого результата было найдено в более поздней работе И. Циммерманн[29].

Одной из целей данной диссертации является разработка методов исследования решетки подгрупп группы, позволяющих решить эту задачу в общем случае. Но фактически, решение проблемы 2 было получено в качестве специального приложения построенной в диссертации теории специальных классов $P\sigma T$-групп.

Ввиду теоремы Р. Шмидта[27] подгруппа является квазинормальной в группе тогда и только тогда, когда она модулярна и субнормальна. Этот результат мотивировал введение следующих понятий.

Подгруппа A группы G называется *σ-квазинормальной*[30], если A модулярна и σ-субнормальна в G.

Мы говорим, что G называется *$M\sigma T$-группой*, если условие σ-квазинормальности подгрупп является транзитивным отношением в G.

Следующая открытая проблема является одной из наиболее трудных в теории σ-свойств групп: *Каково строение $M\sigma T$-групп?*

Отметим, что в случае, когда $\sigma = \{\mathbb{P}\}$, эта проблема представляет собой старый открытый вопрос А. Фриджерио[28] (проблема 2). Кроме того, следующий частный случай данной проблемы также не изучен.

Проблема 3. *Каково строение разрешимых $M\sigma T$-групп?*

В диссертации получено полное решение проблемы 3, а также дано описание строения разрешимых T_σ-групп, т.е. групп, у которых каждая σ-субнормальная подгруппа нормальна[21].

В силу теоремы Р. Шмидта[27] о квазинормальных подгруппах, группа G является PT-группой тогда и только тогда, когда каждая субнормальная подгруппа группы G модулярна в G. Принимая во внимание это наблюдение и результаты работ[17, 42], естественным является следующий вопрос.

Проблема 4. *Как устроена группа G, в которой каждая σ-субнормальная подгруппа модулярна в G?*

---

[28] Frigerio, A. Gruppi finiti nei quali e transitivo l'essere sottogruppo modulare / A. Frigerio // Ist. Veneto Sci. Lett. Arti, Atti Cl. Sci. Mat. Nat. – 1974. – Vol. 132. – P. 185–190.

[29] Zimmermann, I. Submodular subgroups in finite groups / I. Zimmermann // Mathematische Zeitschrift. – 1989. – Vol. 202, № 4. – P. 545–557.

[30] Hu, B. On σ-quasinormal subgroups of finite groups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // Bulletin of the Australian Mathematical Society. – 2019. – Vol. 99, № 3. – P. 413–420.

Мы говорим, что группа G является *$Q\sigma T$-группой*, если каждая σ-субнормальная подгруппа группы G модулярна в G.

В диссертации получено полное решение проблемы 4, т.е. дано описание строения $Q\sigma T$-групп, а также, на основе разработанных методов, дано описание строения T_σ-групп в общем случае.

Методы и техника, развитые при решении указанных проблем, позволили решить и ряд других задач. В частности, в диссертации получены положительные ответы на следующие вопросы из "Коуровской тетради" [31].

Проблема 5 (проблема 19.88 [31]). *Пусть для каждой силовской подгруппы P конечной группы G и каждой максимальной подгруппы V группы P существует σ-нильпотентная подгруппа T такая, что $VT = G$. Верно ли, что тогда G является σ-нильпотентной?*

Проблема 6 (проблема 19.87 [31]). *Пусть для каждой силовской подгруппы P конечной группы G и каждой максимальной подгруппы V группы P существует σ-разрешимая подгруппа T такая, что $VT = G$. Верно ли, что тогда G является σ-разрешимой?*

Отметим, что в работах [32, 33] решение проблем 5 и 6 получено независимо на основе использования классификации неабелевых простых групп. В диссертации решение этих проблем найдено другими методами, не использующими такую классификацию.

Открытые и исследованные в диссертации новые σ-свойства групп позволили описать наиболее полезные для приложений свойства следующих классов групп: классов всех σ-нильпотентных, σ-сверхразрешимых, σ-разрешимых, мета-σ-нильпотентных и класса σ-дисперсивных групп.

Напомним, что группа G называется *дисперсивной* (Оре, Бэр), если G имеет нормальный ряд подгрупп, порядки факторов которого являются порядками соответствующих силовских подгрупп этой группы. Аналогично, σ-полная группа G называется *σ-дисперсивной* [10], если G имеет нормальный ряд подгрупп, порядки факторов которого являются порядками соответствующих холловых σ_i-подгрупп этой группы.

Относительно σ-дисперсивных групп долгое время оставался открытым вопрос о нахождении достаточных условий σ-дисперсивности группы и, в частности, следующая

Проблема 7 (А.Н. Скиба [9, 10]). *Пусть G – σ-разрешимая группа и $|\sigma(G)| = n$. Предположим, что каждая $(n+1)$-максимальная подгруппа G является σ-субнормальной. Верно ли тогда, что G является σ-дисперсивной?*

---

[31] Нерешенные проблемы по теории групп. Коуровская тетрадь. 19-е изд. доп. // Сост. В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2018 – 248 с.

[32] Йи, С. Об одном свойстве наследственных насыщенных решеточных формаций / С. Йи, С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – Т. 46, № 1. – С. 50–53.

[33] Каморников, С.Ф. О двух проблемах из "Коуровской тетради" / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2021. – Т. 27, № 1. – С. 98–102.

Кроме того, до последнего времени оставался открытым вопрос описания строения σ-дисперсивных групп, в частности, дисперсивных групп.

Проблема 8 (1) *Каково строение σ-дисперсивных групп?*

(2) *Можно ли описать строение дисперсивных групп методами теории графов* (Л.А. Шеметков, 1995)?

В диссертации последняя проблема решена с помощью свойств введенного в рассмотрение σ-графа Хоукса $\Gamma_{H\sigma}(G)$ группы G, вершинами которого являются элементы множества $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$.

Всякая функция f вида $f : \sigma \to \{$формации групп$\}$ называется *формационной σ-функцией*[34]. Для любой формационной σ-функции f определяется класс $LF_\sigma(f) = (G \mid G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех σ_i таких, что $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset)$. Если для некоторой формационной σ-функции f имеет место равенство $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то формацию $\mathfrak{F}$ называют *σ-локальной*.

Классы всех σ-разрешимых, σ-нильпотентных, мета-σ-нильпотентных групп и многие другие классы групп, необходимые при изучении σ-свойств групп, являются конкретными примерами σ-локальных формаций. Более того, именно σ-локальные формации оказались основным инструментом при решении некоторых старых задач теории групп, одной из которых являлась задача Л.А. Шеметкова (см.[11], с. 47, проблема 7) о расширении теории Крамера[35] о факторизациях разрешимых групп на классы произвольных групп. Решение такой задачи было получено в работе[36] методами σ-локальных формаций. σ-Локальные формации нашли и много других полезных применений и, в частности, в теории формальных языков[37, 38]. Эти наблюдения указывают на важность изучения σ-локальных формаций.

В диссертации построена общая теория функторно замкнутых кратно σ-локальных формаций и, в частности, описаны основные свойства решетки таких формаций, доказана полнота, модулярность, алгебраичность и отделимость решетки всех функторно замкнутых n-кратно σ-локальных формаций.

Изучены свойства минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций, что позволило решить проблему Л.А. Шеметкова о классификации критических формаций для произвольной σ-локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа.

Проблема 9 (Л.А. Шеметков[39]). *Описать $\mathfrak{H}$-критические формации для*

[34] Skiba, A.N. On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 34(1). – P. 79–82.

[35] Kramer, O.U. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes / O.U. Kramer // Mathematische Zeitschrift. – 1974. – Vol. 139, – P. 63–68.

[36] Chi, Z. A generalization of Kramer's theory / Z. Chi, A.N. Skiba // Acta Mathematica Hungarica. – 2019. – Vol. 158, № 1. – P. 87–99.

[37] Tsarev, A. Laws of the lattices of σ-local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 17, № 3. – Article: 75.

[38] Tsarev, A. Classes of monoids with applications: formations of languages and multiply local formations of finite groups / A. Tsarev, A. Kukharev // Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. – 2021. – Vol. 70, № 3. – P. 1257–1268.

[39] Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Тр. VI Всесоюзн. симпозиума по теории групп. – Киев: Наукова думка. – 1980. – С. 37–50.

случая произвольной σ-локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа.

Отметим, что данная задача решена в диссертации на основе методов, развитых автором в теории критических частично локальных формаций.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Тема диссертации соответствует пункту 1 перечня приоритетных направлений научной, научно-технической и инновационной деятельности на 2021–2025 годы, определенных Указом Президента Республики Беларусь от 7 мая 2020 г. № 156 «О приоритетных направлениях научной, научно-технической и инновационной деятельности на 2021–2025 годы».

Исследования проводились в рамках следующих научных программ и проектов: «Развитие концепции факторной центральности и ее применение к анализу классов групп и других систем» (№ ГР 20061155, 2006–2010). Тема входила в государственную программу фундаментальных научных исследований «Математические модели» на 2006–2010 годы; «Операторы на классах групп и их приложения» (№ ГР 20111553, 2011–2015). Тема входила в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы «Конвергенция», подпрограмма «Математические методы»; «Кратно локальные классы конечных групп и теория представлений конечномерных алгебр и групп» (№ ГР 20161713, 2016–2020). Тема входила в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем»; «Развитие обобщенно локальных методов в теории классов групп и их приложения при изучении непростых конечных групп» (№ ГР 20211328, 2021–2025). Тема входит в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 годы «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы»; «Строение конечных и периодических групп: фундаментальный и вычислительный аспекты» (№ ГР 20221874, 2022–2025, договор с БРФФИ № Ф23РНФ-237 от 15.11.2022); «Строение конечных и периодических групп и некоторые связанные с ними проблемы графов и решеток» (№ ГР 20240693, 2024–2026, договор с БРФФИ № Ф24КИ-021 от 01.03.2024).

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Целью исследования является дальнейшее развитие теории σ-свойств групп и их классов. Для достижения поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:

– описать строение групп, в которых условие σ-перестановочности, модулярности подгрупп является транзитивным отношением; разрешимых групп с транзитивным отношением σ-квазинормальности подгрупп; групп с модулярными (нормальными) σ-субнормальными подгруппами;

– найти и описать новые G-накрывающие системы подгрупп для классов σ-разрешимых $P\sigma T$-групп, разрешимых PST-групп и сверхразрешимых групп, σ-разрешимых и σ-нильпотентных групп;

– получить новые характеризации классов σ-разрешимых $P\sigma T$-групп, σ-нильпотентных, σ-разрешимых и сверхразрешимых групп, разрешимых PST-, PT- и T-групп;

– установить свойства подгрупп, обобщенно перестановочных с заданными накрывающими их системами подгрупп;

– найти достаточные условия σ-дисперсивности группы; описать строение σ-дисперсивных групп, установить σ-дисперсивность группы с σ-субнормальными $(n + 1)$-максимальными подгруппами;

– классифицировать группы с σ-абнормальными и формационно субнормальными подгруппами Шмидта;

– установить основные свойства функторно замкнутых n-кратно σ-локальных формаций; получить критерии функторной замкнутости n-кратно σ-локальной формации и n-кратной σ-локальности непустой функторно замкнутой формации;

– описать критические формации в классе σ-локальных формаций.

Объектом исследования являются конечные группы и их классы с заданными σ-свойствами. Предмет исследования – влияние таких свойств на строение конечных групп, а также на алгебру обобщенно локальных формаций конечных групп.

Научная новизна

Работа носит теоретический характер. Все результаты диссертации являются новыми и впервые получены соискателем.

Разработаны арифметические и геометрические методы исследования конечных групп и их классов, определяемые разбиениями σ множества всех простых чисел. На их основе найдены решения ряда открытых проблем теории конечных групп, теории обобщенно локальных формаций, установлены новые закономерности и свойства алгебры σ-локальных формаций. В частности, разработаны методы изучения групп, в которых заданное σ-свойство подгрупп является транзитивным отношением в группе, что позволило получить описание строения групп с транзитивными отношениями σ-перестановочности, σ-квазинормальности и модулярности подгрупп.

В диссертации получила развитие теория накрывающих систем подгрупп, в частности, найдены новые G-накрывающие системы подгрупп для классов всех σ-разрешимых $P\sigma T$-групп, σ-разрешимых, σ-нильпотентных и сверхразрешимых групп. Построена теория σ-дисперсивных групп, в рамках которой впервые получено описание строения σ-дисперсивных, в частности, дисперсивных групп, на основе разработанных в диссертации методов теории σ-графов Хоукса. Построена теория функторно замкнутых обобщенно локальных формаций, в рамках которой решена проблема описания критических σ-локальных формаций.

Положения, выносимые на защиту

1. Основные результаты построенной в диссертации теории специальных классов обобщенных T-групп:

– решение проблемы А.Н. Скибы об описании строения групп, в которых условие σ-перестановочности подгрупп является транзитивным отношением (теорема 2.2.1);

– решение проблемы А. Фриджерио о классификации групп, в которых условие модулярности подгрупп является транзитивным отношением (теорема 2.4.3);

– решение проблемы описания строения разрешимых групп, в которых σ-квазинормальность подгрупп является транзитивным отношением (теорема 2.3.3);

– решение проблемы описания строения групп, в которых каждая σ-субнормальная подгруппа модулярна (теорема 2.5.2);

– описание σ-разрешимых $P\sigma T$-групп с использованием разработанной в диссертации теории σ-специальных замкнутых подгрупповых функторов (теоремы 2.6.2, 2.6.4).

2. Теоремы, построенной в диссертации теории накрывающих систем подгрупп:

– описание новых G-накрывающих систем подгрупп для классов всех σ-разрешимых $P\sigma T$-групп (теорема 3.1.2), всех разрешимых PST-групп и всех сверхразрешимых групп (теорема 3.2.1);

– решение проблемы 19.87 из “Коуровской тетради” об описании G-накрывающих систем подгрупп для класса всех σ-разрешимых групп (теорема 3.1.6);

– решение проблемы 19.88 из “Коуровской тетради” об описании G-накрывающих систем подгрупп для класса всех σ-нильпотентных групп (теорема 3.1.2);

– новые характеризации σ-разрешимых $P\sigma T$-групп (теорема 3.1.3) и разрешимых PST-групп (теорема 3.1.4), разрешимых PT- и T-групп (теорема 3.2.2).

3. Основные результаты построенной в диссертации теории σ-дисперсивных групп:

– подтверждение гипотезы о σ-дисперсивности группы с σ-субнормальными $(n+1)$-максимальными подгруппами (теорема 4.1.6);

– решение проблемы описания строения σ-дисперсивных групп, разработанными в диссертации методами теории σ-графов Хоукса (теорема 4.2.4);

– решение проблемы Л.А. Шеметкова об описании строения дисперсивных групп методами теории графов (теорема 4.2.6).

4. Новые приложения теории $\mathfrak{F}$-критических и обобщенно $\mathfrak{F}$-критических подгрупп:

– описание строения групп, у которых все не σ-нильпотентные подгруппы Шмидта σ-абнормальны (теоремы 5.1.3, 5.1.4), в частности, групп, у которых все подгруппы Шмидта абнормальны (теоремы 5.1.17, 5.1.18);

– описание строения групп с K-$\mathfrak{F}$-субнормальными (теорема 5.2.1) и $\mathfrak{F} \wedge sn$-вложенными подгруппами Шмидта (теорема 5.3.3);

– описание новых свойств нормы (теорема 5.4.4) и обобщенной нормы группы (теорема 5.4.2).

5. Результаты построенной в диссертации теории функторно замкнутых σ-локальных формаций:

– решение проблемы Л.А. Шеметкова о классификации критических формаций в классе σ-локальных формаций (теорема 7.3.1);

– основные свойства функторно замкнутых n-кратно σ-локальных формаций и, в частности, свойства решетки всех функторно замкнутых n-кратно σ-локальных формаций (теоремы 7.2.1, 7.2.13, 7.2.19).

Личный вклад соискателя ученой степени в результаты диссертации

Диссертационная работа отражает личный вклад автора в проведенные исследования и опубликованные работы, на основе которых написана диссертация. Основные результаты диссертации получены соискателем самостоятельно при научном консультировании доктора физико-математических наук, профессора А.Н. Скибы, которым сформулированы основные научные направления работы. Совместно с научным консультантом определена цель диссертационного исследования, осуществлен выбор актуальных открытых задач, решение которых было реализовано соискателем на основе разработанных в диссертации методов исследования групп и их классов.

По теме диссертационной работы без соавторов опубликовано 13 статей [1-А] – [4-А], [13-А], [17-А], [18-А], [27-А], [30-А], [31-А], [33-А], [34-А], [37-А]. Ряд исследований проводились совместно, в том числе и с зарубежными математиками. В совместно опубликованных работах [5-А] – [12-А], [14-А] – [16-А], [19-А] – [26-А], [28-А], [29-А], [32-А], [35-А], [36-А] результаты получены авторами на равноправных началах.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины» и на следующих конференциях: Международная алгебраическая конференция, посвященная 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры (Москва, 26 мая–2 июня

2004 г.); VI Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная 100-летию Н.Г. Чудакова (Саратов, 13–17 сентября 2004 г.); Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша (Москва, 28 мая–3 июня 2008 г.); Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 16-20 ноября 2020 г.); Международная научная конференция «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, 22–25 ноября 2021 г.); XXI Международная конференция, посвященная 85-летию со дня рождения А.А. Карацубы «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, 17–21 мая 2022 г.); XV Международная школа-конференция по теории групп, посвященная 95-летию со дня рождения М.И. Каргаполова (Екатеринбург, 21–28 июля 2024 г.).

Результаты диссертации внедрены в учебный процесс Белорусского государственного университета, что подтверждается двумя актами о практическом использовании результатов исследования (№ 2.4/80 от 20.04.2023, № 2.4/174 от 07.06.2024; Приложение В).

Опубликованность результатов диссертации

По теме диссертационного исследования опубликованы 48 научных работ, в том числе: 37 статей в рецензируемых научных журналах (13 без соавторов), соответствующих пункту 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, 4 препринта, 2 статьи в сборниках материалов научных конференций, 5 тезисов докладов. Общий объем опубликованных материалов составляет 31,09 авторских листов, в том числе статьи в научных журналах – 24,96 авторских листов, препринты, материалы и тезисы докладов конференций – 6,14 авторских листов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, общей характеристики работы, семи глав, заключения, списка использованных источников, приложений. Полный объем составляет 250 страниц. Библиографический список насчитывает 194 наименования на 12 страницах, список публикаций соискателя ученой степени, содержащих основные результаты диссертации, насчитывает 48 публикаций на 4 страницах.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному консультанту – заслуженному деятелю науки Республики Беларусь, доктору физико-математических наук, профессору Александру Николаевичу Скибе за постоянное внимание и поддержку, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Во введении приводится обзор исследований по разрабатываемой тематике и освещается круг проблем, которые решены в диссертации.

В первой главе проведен аналитический обзор литературных источников по теме диссертационного исследования. Описаны основные направления исследования, сформулирован ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основных результатов диссертации. Основное содержание диссертации представлено в главах 2–7.

Напомним, что группа G называется *T-группой*[40], если условие нормальности подгрупп является транзитивным отношением в G, т.е. если H – нормальная подгруппа группы K и K – нормальная подгруппа группы G, то H – нормальная подгруппа группы G.

Вторая глава диссертации посвящена изучению обобщенных T-групп в теории σ-свойств групп, в частности, здесь даны решения проблем 1 – 4, отмеченных во введении. Первая проблема решается на основе понятий σ-комплекса Робинсона группы и σ-SC-группы, введенных в этой главе. Раздел 2.1 посвящен построению теории σ-комплексов Робинсона и σ-SC-групп.

Определение 2.1.5. *Мы говорим, что набор подгрупп $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$ группы G называется σ-комплексом Робинсона (комплексом Робинсона, в случае когда $\sigma = \sigma^1$) группы G, если $D \neq 1$ – такая нормальная подгруппа группы G, что выполняются следующие условия:* (i) $D/Z(D) = U_1/Z(D) \times \cdots \times U_k/Z(D)$*, где $U_i/Z(D)$ – простой не σ-примарный главный фактор группы G, $Z(D) \leq \Phi(D)$;* (ii) *каждый главный фактор группы G ниже $Z(D)$ является циклическим.*

Определение 2.1.7. *Мы говорим, что G называется: σ-SC-группой, если каждый главный фактор группы G ниже $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ является простым; σ-сверхразрешимой*[41]*, если каждый главный фактор группы G ниже $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ является циклическим.*

Символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает наименьшую нормальную подгруппу N группы G с факторгруппой $G/N \in \mathfrak{F}$; $\mathfrak{N}_\sigma$ *– класс всех σ-нильпотеных групп*; $\mathfrak{S}_\sigma$ *– класс всех σ-разрешимых групп*; $\mathfrak{U}_\sigma$ *– класс всех σ-сверхразрешимых групп.*

Основными результатами раздела 2.1 являются следующие

Теорема 2.1.20 [22-А, теорема 2.11]. *Пусть каждый σ-примарный главный фактор группы G абелев. Тогда G является σ-SC-группой тогда и только тогда, когда $G/G^{\mathfrak{S}_\sigma}$ является σ-сверхразрешимой и если $G^{\mathfrak{S}_\sigma} \neq 1$, то G имеет σ-комплекс Робинсона $(G^{\mathfrak{S}_\sigma}, Z(G^{\mathfrak{S}_\sigma}); U_1, \ldots, U_k)$.*

---

[40] Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.

[41] Guo, W. On σ-supersoluble groups and one generalization of CLT-groups / W. Guo, C. Zhang, A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2018. – Vol. 512. – P. 92–108.

Теорема 2.1.24 [22-А, с. 230]. *Пусть G – не σ-разрешимая σ-полная σ-SC-группа с σ-комплексом Робинсона $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$, где $D = G^{\mathfrak{S}_\sigma} = G^{\mathfrak{U}_\sigma}$. Пусть U – не σ-перестановочная σ-субнормальная подгруппа минимального порядка в G. Тогда:*

(1) *если UU'_j/U'_j σ-перестановочна в G/U'_j для всех $j = 1, \ldots, k$, то U – σ-сверхразрешима;*

(2) *если U σ-сверхразрешима и UL/L σ-перестановочна в G/L для всех нетривиальных нильпотентных нормальных подгрупп L группы G, то U – циклическая p-группа для некоторого простого числа p.*

Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Мы говорим, что группа G удовлетворяет *условию* $\mathbf{N}_\pi$ ($\mathbf{N}_p$ соответственно) [40], если всякий раз, когда N – разрешимая нормальная подгруппа из G, π'-элементы (соответственно p'-элементы) группы G индуцируют степенные автоморфизмы в $O_\pi(G/N)$ (соответственно в $O_p(G/N)$).

Теоремы 2.1.20 и 2.1.24 являются ключевыми при доказательстве основного результата раздела 2.2, дающего решение проблемы 1.

Теорема 2.2.1 [22-А, теорема С]. *Предположим, что G – σ-полная группа и все холловы σ_i-подгруппы группы G сверхразрешимы для всех $i \in I$. Тогда G является $P\sigma T$-группой тогда и только тогда, когда G имеет нормальную подгруппу D такую, что:*

(i) *G/D – σ-разрешимая $P\sigma T$-группа;*

(ii) *если $D \neq 1$, то G имеет σ-комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$;*

(iii) *для любого множества $\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$, где $1 \leq r < k$, группы G и $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют условию $\mathbf{N}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(Z(D))$.*

Поскольку при $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$ $P\sigma^1T$-группа – это в точности PST-группа, то из теоремы 2.2.1 мы получаем следующий результат.

Следствие 2.2.2 (Дж.С. Робинсон [17]). *Группа G является PST-группой тогда и только тогда, когда G имеет совершенную нормальную подгруппу D такую, что:* (i) *G/D – разрешимая PST-группа;* (ii) *если $D \neq 1$, то G имеет комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$;* (iii) *для любого множества $\{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$, где $1 \leq r < k$, группы G и $G/U'_{j_1} \cdots U'_{j_r}$ удовлетворяют условию $\mathbf{N}_p$ для всех $p \in \pi(Z(D))$.*

Напомним, что подгруппа A группы G называется: *σ-субнормальной* [10] в G, если существует ряд подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$ такой, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ-примарной, для всех $i = 1, \ldots, n$; *модулярной* в G, если A – модулярный элемент (в смысле Куроша [27]) решетки $\mathcal{L}(G)$ всех подгрупп группы G, т.е. (i) $\langle X, A \cap Z \rangle = \langle X, A \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, и (ii) $\langle A, Y \cap Z \rangle = \langle A, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $A \leq Z$; *квазинормальной* в G (О. Оре), если A перестановочна со всеми подгруппами H группы G, т.е. $AH = HA$.

Определение 2.3.1. *Подгруппа A группы G называется σ-квазинор-*

мальной[30] *в G, если A модулярна и σ-субнормальна в G.*

Определение 2.3.2. *Мы говорим, что группа G называется:* (i) *$M\sigma T$-группой, если σ-квазинормальность подгрупп является транзитивным отношением в G, т.е., если H – σ-квазинормальная подгруппа в K и K – σ-квазинормальная подгруппа в G, то H – σ-квазинормальная подгруппа в G;* (ii) *T_σ-группой*[21]*, если каждая σ-субнормальная подгруппа группы G нормальна в G;* (iii) *M-группой*[27, с.54]*, если решетка $\mathcal{L}(G)$ модулярна;* (iv) *MT-группой, если модулярность является транзитивным отношением в G.*

В разделе 2.3 диссертации дано полное решение проблемы 3, а также получено следующее описание разрешимых T_σ-групп.

Теорема 2.3.3 [26-А, теорема C]. *Если G – разрешимая $M\sigma T$-группа (соответственно, разрешимая T_σ-группа) и $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$, то выполняются следующие условия:*

(i) *$G = D \rtimes M$, где D – абелева холлова подгруппа нечетного порядка в G, M – σ-нильпотентная M-группа (соответственно, M – σ-нильпотентная группа Дедекинда);*

(ii) *каждый элемент из G индуцирует степенной автоморфизм в D;*

(iii) *$O_{\sigma_i}(D)$ имеет нормальное дополнение в холловой σ_i-подгруппе группы G для всех i.*

Обратно, если выполняются условия (i), (ii) *и* (iii) *для некоторых подгрупп D и M группы G, то G является разрешимой $M\sigma T$-группой (соответственно, разрешимой T_σ-группой).*

В случае $\sigma = \{\mathbb{P}\}$ из теоремы 2.3.3 получаем

Следствие 2.3.4 (А. Фриджерио[28], И. Циммерманн[29]). *Разрешимая группа G является MT-группой тогда и только тогда, когда G – M-группа.*

Напомним, что группа G называется[40]: *группой Ивасавы (группой Дедекинда)*, если каждая ее подгруппа квазинормальна (нормальна) в G.

В случае когда $\sigma = \sigma^1$, ввиду теоремы Р. Шмидта[27] класс всех $M\sigma^1 T$-групп совпадает с классом всех PT-групп и, очевидно, группа является T_{σ^1}-группой тогда и только тогда, когда она является T-группой. Поэтому следствиями теоремы 2.3.3 являются результаты Г. Цахера и В. Гашюца.

Следствие 2.3.5 (Г. Цахер[42], В. Гашюц[43]). *Группа G является разрешимой PT-группой (соответственно, разрешимой T-группой) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:* (i) *нильпотентный корадикал L группы G является абелевой холловой подгруппой нечетного порядка;* (ii) *G действует сопряжением на L как группа степенных автоморфизмов;* (iii) *G/L – группа Ивасавы (соответственно, группа Дедекинда).*

[42] Zacher, G. I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normali / G. Zacher // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Serie Ottava. Rendiconti. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. – 1964. – Vol. 37, № 8. – P. 150–154.

[43] Gaschütz, W. Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist / W. Gaschütz // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.

В разделе 2.4 на основе методов, развитых в предыдущих разделах главы 2, дано решение проблемы 2 в общем случае.

Группу G называют [27, с. 49] *неабелевой P-группой*, если $G = A \rtimes \langle t \rangle$, где A – элементарная абелева p-группа и элемент t простого порядка $q \neq p$ индуцирует нетривиальный степенной автоморфизм на A. В частности, при конкретных p и q группу G называют *неабелевой P-группой типа* (p, q).

Мы говорим, что G удовлетворяет: *условию* $\mathbf{M}_P$ ($\mathbf{M}_{p,q}$ соответственно), если всякий раз, когда N – разрешимая нормальная подгруппа в G и P/N – нормальная неабелева P-подгруппа (соответственно нормальная неабелева P-группа типа (p, q)) в G/N, каждая несубнормальная подгруппа в P/N модулярна в G/N; *условию* $\mathbf{P}_p$, если всякий раз, когда N – разрешимая нормальная подгруппа в G, каждая подгруппа в $O_p(G/N)$ квазинормальна в каждой силовской p-подгруппе группы G/N.

Полное решение проблемы 2 дает следующая

Теорема 2.4.3 [23-А, теорема D]. *Группа G является MT-группой тогда и только тогда, когда G имеет совершенную нормальную подгруппу D такую, что выполняются следующие условия:*

(i) *G/D – M-группа;*

(ii) *если $D \neq 1$, то G имеет комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$;*

(iii) *для любого множества $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, где $1 \leq r < k$, группы G и $G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$ удовлетворяют условию $\mathbf{N}_p$ для всех $p \in \pi(Z(D))$, условию $\mathbf{P}_p$ для всех $p \in \pi(D)$ и условию $\mathbf{M}_{p,q}$ для всех $\{p, q\} \cap \pi(D) \neq \emptyset$.*

Схема доказательства данного результата была представлена в [25-А].

В разделе 2.5 диссертации изучаются группы, у которых всякая σ-субнормальная подгруппа модулярна (проблема 4), а также группы с нормальными σ-субнормальными подгруппами.

Определение 2.5.1. *Мы говорим, что G называется $Q\sigma T$-группой, если каждая σ-субнормальная подгруппа группы G модулярна в G.*

Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Если $\pi = \emptyset$, то полагаем $O_\pi(G) = O_\emptyset(G) = 1$.

Мы говорим, что группа G удовлетворяет: *условию* $\mathbf{P}_\pi$, если всякий раз, когда N – разрешимая нормальная подгруппа группы G, каждая подгруппа U/N группы $O_\pi(G/N)$ модулярна в $\langle U/N, xN \rangle$ для всех π-элементов $xN \in G/N$; *условию* $\mathbf{T}_\pi$ ($\mathbf{T}_p$ соответственно) [40], если всякий раз, когда N – разрешимая нормальная подгруппа группы G, каждая подгруппа группы $O_\pi(G/N)$ (соответственно $O_p(G/N)$) нормальна в G/N.

Ответ на проблему 4 дает следующая

Теорема 2.5.2 [35-А, теорема D]. *Группа G является $Q\sigma T$-группой (соответственно T_σ-группой) тогда и только тогда, когда G имеет нормальную подгруппу D такую, что выполняются следующие условия:*

(i) G/D – *σ-разрешимая $Q\sigma T$-группа (соответственно σ-разрешимая T_σ-группа);*

(ii) *если $D \neq 1$, то G имеет σ-комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \ldots, U_k)$;*

(iii) *для любого множества $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, k\}$, где $1 \leq r < k$, группы G и $G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$ удовлетворяют условию $\mathbf{N}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(Z(D))$ и условию $\mathbf{P}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(D)$ (соответственно группы G и $G/U'_{i_1} \cdots U'_{i_r}$ удовлетворяют условию $\mathbf{T}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(Z(D))$).*

Из теоремы 2.5.2 следует результат Дж.С. Робинсона[17], дающий описание PT-групп. Ввиду замечания 2.5.4 класс всех $Q\sigma T$-групп является более широким классом групп, чем класс всех PT-групп.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп и каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Тогда τ называется *подгрупповым функтором* в смысле А.Н. Скибы[12] на $\mathfrak{X}$, если выполняются следующие условия: (1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G; (2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Подгруппые функторы такого типа уже нашли много приложений при исследовании групп и их классов[12, 44, 45, 46, 14] и, в частности, в докторских диссертациях А.Н. Скибы (1993), С.Ф. Каморникова (1995), М.В. Селькина (1998), Го Вэньбиня (2002), А.Ф. Васильева (2007), В.Г. Сафонова (2008), В.М. Селькина (2012), Н.Н. Воробьёва (2013).

В диссертации теория подгрупповых функторов получила развитие и нашла приложения в двух независимых направлениях. Во-первых, в главе 2 такие функторы лежат в основе исследования $P\sigma T$-групп. Во-вторых, в главе 7 диссертации подгрупповые функторы такого типа являются основой построения теории τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций.

В разделе 2.6 диссертации построена теория специальных подгрупповых функторов для описания некоторых классов $P\sigma T$-групп.

Подгруппу $A \in \tau(G)$ мы называем *τ-подгруппой* G. Группу G мы называем *τ-насыщенной*, если каждая подгруппа G является ее τ-подгруппой.

Мы говорим, что подгрупповой функтор τ на классе всех σ-разрешимых групп $\mathfrak{S}_\sigma$ является σ-специальным, если для каждой группы $G \in \mathfrak{S}_\sigma$ выполняются следующие условия: (1) каждая σ-субнормальная τ-подгруппа группы G σ-перестановочна в G; (2) $\langle A, B\rangle \in \tau(G)$ для любых двух σ-субнормальных τ-подгрупп A, B группы G; (3) если $G = D \rtimes M$ – $P\sigma T$-группа, где $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$, а A – σ-примарная σ-субнормальная подгруппа группы G такая, что $A \in \tau(M)$, то $A \in \tau(G)$.

Первым основным результатом раздела 2.6 является

[44] Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 2003. – 253 с.

[45] Селькин, В.М., Однопорожденные формации / В.М. Селькин. – Гомель: ГГУ, 2011. – 237 с.

[46] Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2012. – 322 с.

Теорема 2.6.2 [32-А, теорема 1.7]. *Пусть G – σ-разрешимая группа с $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и пусть τ – σ-специальный подгрупповой функтор на классе всех σ-разрешимых групп.*

Если каждая σ-субнормальная подгруппа группы G является τ-подгруппой группы G, то G является $P\sigma T$-группой и выполняются следующие условия:

(i) *$G = D \rtimes M$, где D – абелева холлова подгруппа в G нечетного порядка, M – σ-нильпотентная τ-насыщенная группа и каждый элемент группы G индуцирует степенной автоморфизм в D;*

(ii) *$O_{\sigma_i}(D)$ имеет нормальное дополнение в холловой σ_i-подгруппе группы G для всех i.*

Обратно, если условия (i) *и* (ii) *выполнены для некоторых подгрупп D и M из G, то каждая σ-субнормальная подгруппа G принадлежит $\tau(G)$.*

В диссертации подгрупповой функтор τ на классе всех σ-разрешимых групп $\mathfrak{S}_\sigma$ мы называем *замкнутым*, если для каждой группы $G \in \mathfrak{S}_\sigma$ выполняются условия: (I) если $A \leq E \leq G$ и $A \in \tau(G)$, то $A \in \tau(E)$; (II) если $G = D \times L$, где D – холлова подгруппа группы G и $A \in \tau(D)$, то $A \in \tau(G)$; (III) $A \in \tau(G)$ для любой нормальной подгруппы A группы G.

Вторым основным результатом данного раздела является

Теорема 2.6.4 [32-А, теорема 1.16]. *Пусть G – σ-разрешимая группа, τ – σ-специальный замкнутый подгрупповой функтор на классе всех σ-разрешимых групп. Тогда всякая σ-субнормальная подгруппа группы G является τ-подгруппой в G тогда и только тогда, когда G является $P\sigma T$-группой и каждая холлова σ_i-подгруппа из G τ-насыщена, для всех $i \in I$.*

Пусть для любой σ-разрешимой группы G: $\tau_1(G)$ – множество всех σ-перестановочных подгрупп в G; $\tau_2(G)$ – множество всех модулярных подгрупп в G; $\tau_3(G)$ – множество всех нормальных подгрупп в G; $\tau_4(G)$ – множество всех σ-гиперцентрально вложенных подгрупп в G.

В разделе 2.6 показано, что τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4 – σ-специальные замкнутые подгрупповые функторы на классе всех σ-разрешимых групп [28-А, теоремы 4, 5 и 6] и поэтому для них верны теоремы 2.6.2 и 2.6.4.

Из теоремы 2.6.2, в случае когда $\sigma = \sigma^1$ и $\tau = \tau_3$ получаем результат В. Гашюца[43] об описании строения разрешимых T-групп (следствие 2.3.5). С учетом теоремы Р. Шмидта[27] о квазинормальных подгруппах из теоремы 2.6.2 при $\tau = \tau_2$ получаем результат Г. Цахера[42] о строении разрешимых PT-групп (следствие 2.3.5). Кроме того, при $\tau = \tau_2$ из теоремы 2.6.2 получаем результат Б. Ху, Дж. Хуана, А.Н. Скибы[47] об описании строения σ-разрешимых $Q\sigma T$-групп, а при $\tau = \tau_3$ следующий результат Ц. Чжана, В. Го, А.-М. Лю[21].

Следствие 2.6.15 (Ц. Чжан, В. Го, А.-М. Лю[21]). *σ-Разрешимая группа G*

[47] Hu, B. A generalization of finite *PT*-groups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // Bulletin of the Australian Mathematical Society. – 2018. – Vol. 97, № 3. – P. 396–405.

с $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ является T_σ-группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: (i) *$G = D \rtimes L$, где D – абелева холлова подгруппа в G нечетного порядка, и L – группа Дедекинда;* (ii) *каждый элемент G индуцирует степенной автоморфизм в D;* (iii) *$O_{\sigma_i}(D)$ имеет нормальное дополнение в холловой σ_i-подгруппе группы G для всех i.*

Наконец, при $\tau = \tau_4$ из теоремы 2.6.2 получаем следующее

Следствие 2.6.16 (А.Н. Скиба[18]) *Группа G является σ-разрешимой $P\sigma T$-группой тогда и только тогда, когда каждая σ-субнормальная подгруппа группы G σ-гиперцентрально вложена в G.*

Поскольку[27, с. 72] группа с модулярной решеткой подгрупп сверхразрешима, а группа Дедекинда – нильпотентна, то из теоремы 2.6.4 при $\tau = \tau_2$ и $\tau = \tau_3$ получаем новые характеризации σ-разрешимых $Q\sigma T$-групп [32-А, следствие 1.18] и σ-разрешимых T_σ-групп [32-А, следствие 1.17], а также характеризацию σ-разрешимых T_σ-групп, полученную А. Баллестер-Болинчес, М.К. Педраса-Агилера, В. Перес-Калабьюг[22].

Множество Σ подгрупп группы G называют *G-накрывающей системой подгрупп для класса групп $\mathfrak{F}$*[48], если $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $\Sigma \subseteq \mathfrak{F}$.

Теория G-накрывающих систем подгрупп хорошо представлена в книге[14]. Однако, представленная в этой книге теория G-накрывающих систем подгрупп имеет дело с наследственными формациями, а класс всех $P\sigma T$-групп формацией не является. Поэтому в главе 3 диссертации развиваются новые аспекты такой теории, применимые к классам $P\sigma T$-групп и специальных классов $P\sigma T$-групп.

Одним из основных результатов раздела 3.1 является следующая теорема о G-накрывающих системах подгрупп для классов всех σ-разрешимых $P\sigma T$-групп и всех σ-нильпотентных групп.

Теорема 3.1.2 [9-А, теорема B]. *Пусть $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset \neq \sigma_j \cap \pi(G)$ для некоторых $i \neq j$ и пусть множество Σ подгрупп группы G содержит хотя бы одно добавление к каждой максимальной подгруппе каждой силовской p-подгруппы группы G для всех $p \in (\sigma_i \cup \sigma_j) \cap \pi(G)$. Тогда Σ является G-накрывающей системой подгрупп для класса всех σ-разрешимых $P\sigma T$-групп и для класса всех σ-нильпотентных групп.*

Теорема 3.1.2 дает положительный ответ на проблему 19.88 “Коуровской тетради”[31] (проблема 5), а также позволяет получить следующие новые характеризации σ-разрешимых $P\sigma T$-групп и, в частности, разрешимых PST-групп.

Теорема 3.1.3 [9-А, с 282]. *Группа G является σ-разрешимой $P\sigma T$-группой тогда и только тогда, когда либо G σ-нильпотентна, либо $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset \neq \sigma_j \cap \pi(G)$, для некоторого $i \neq j$, и каждая максимальная подгруппа каждой силовской p-подгруппы из G имеет добавление T в G такое, что T является σ-разрешимой $P\sigma T$-группой для всех $p \in (\sigma_i \cup \sigma_j) \cap \pi(G)$.*

[48] Guo, W. G-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Israel Journal of Mathematics. – 2003. – Vol. 138, № 1. – P. 125–138.

Теорема 3.1.4 [9-А, с. 282]. *Группа G является разрешимой PST-группой тогда и только тогда, когда либо G нильпотентна, либо $|\pi(G)| > 1$ и для некоторых простых чисел $p \neq q$, делящих $|G|$, каждая максимальная подгруппа любой силовской r-подгруппы группы G имеет добавление T в G такое, что T – разрешимая PST-группа для каждого $r \in \{p, q\}$.*

Отметим, что в работе С. Йи, С.Ф. Каморникова, В.Н. Тютянова [49] условие теоремы 3.1.2, в случае σ-нильпотентных групп значительно ослаблено.

Следующий результат раздела 3.1 дает положительный ответ на проблему 19.87 [31] (проблема 6).

Теорема 3.1.6 [9-А, теорема C]. *Пусть множество Σ подгрупп группы G содержит хотя бы одно добавление к каждой максимальной подгруппе каждой силовской подгруппы группы G. Тогда Σ является G-накрывающей системой подгрупп для класса всех σ-разрешимых групп.*

Отметим также, что другое решение проблем 5 и 6, использующее классификацию неабелевых простых групп, было получено в работах С. Йи, С.Ф. Каморникова, В.Н. Тютянова [32] и С.Ф. Каморникова, В.Н. Тютянова [33].

В разделе 3.2 изучаются G-накрывающие системы подгрупп для классов всех разрешимых PST-групп и сверхразрешимых групп.

Теорема 3.2.1 [7-А, теорема A]. *Предположим, что множество подгрупп Σ (соответственно Σ^*) группы G содержит хотя бы одно добавление к каждой максимальной подгруппе каждой силовской подгруппы (соответственно каждой нециклической силовской подгруппе) группы G. Тогда Σ является G-накрывающей системой подгрупп для класса всех разрешимых PST-групп, а множество Σ^* является G-накрывающей системой подгрупп для класса всех сверхразрешимых групп.*

Заметим, что группа $G = (C_p \rtimes C_q) \times C_p$, где $C_p \rtimes C_q$ неабелева группа порядка pq для некоторых простых чисел p и q (q делит $p - 1$), не является PST-группой. Ясно также, что каждая максимальная подгруппа силовской p-подгруппы группы G имеет такое добавление T в G, что T является PST-группой. Поэтому множество Σ^* в теореме 3.2.1 не является системой G-накрывающих подгрупп для класса всех разрешимых PST-групп.

Пример экстраспециальной группы порядка p^3 показывает, что множество Σ в теореме 3.2.1 не является системой G-накрывающих подгрупп для классов всех разрешимых PT-групп и всех разрешимых T-групп.

Мы применяем теорему 3.2.1 для получения следующих новых характеризаций разрешимых PT-групп и разрешимых T-групп, которые обсуждались в [10-А].

Теорема 3.2.2 [7-А, теорема B]. *Предположим, что множество подгрупп Σ содержит хотя бы одно добавление к каждой максимальной подгруппе каж-*

[49] Йи С., G-Покрывающие подгрупповые системы для класса всех σ-нильпотентных конечных групп / С. Йи, С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Математические заметки. – 2022. – Т. 111, № 2. – С. 233–240.

дой силовской подгруппы группы G. Тогда G является разрешимой PT-группой (соответственно разрешимой T-группой) тогда и только тогда, когда каждая подгруппа из Σ является разрешимой PT-группой (соответственно разрешимой T-группой) и по крайней мере одна из неединичных силовских подгрупп группы G является группой Ивасавы (соответственно группой Дедекинда).

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Напомним, что множество $\mathcal{H}$ подгрупп группы G называется *полным холловым* Π-*множеством* группы G, если каждый неединичный элемент из $\mathcal{H}$ является холловой σ_i-подгруппой из G для некоторого $\sigma_i \in \Pi$ и $\mathcal{H}$ содержит ровно одну холлову σ_i-подгруппу из G для каждого $\sigma_i \in \Pi \cap \sigma(G)$. Группа G называется: Π-*полной*, если G обладает полным холловым Π-множеством; Π-*полной группой силовского типа*, если каждая подгруппа E группы G является D_{σ_i}-группой для каждого $\sigma_i \in \sigma(E) \cap \Pi$.

Мы говорим, что $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_t\}$ является Π-накрывающей системой подгрупп для подгруппы H в G, если все элементы множества $\mathcal{X}$ являются σ-примарными подгруппами группы G и для каждого $\sigma_i \in \sigma(H) \cap \Pi$ существует индекс j и σ_i-полупроектор U подгруппы H такие, что $U \leq X_j$.

Раздел 3.3 диссертации посвящен изучению свойств подгрупп, обобщенно перестановочных с заданными накрывающими их системами подгрупп.

Результаты этих исследований отражены в работах [5-А, 19-А, 36-А]. В частности, одним из основных результатов данного раздела является следующая

Теорема 3.3.4 [19-А, теорема А]. *Пусть H – Π-подгруппа группы G и пусть $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_t\}$ – Π-накрывающая система подгрупп для H и $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_r\}$ – Π'-накрывающая система подгрупп для H^G в группе G. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(i) *если $HX^x = X^xH$ для всех $X \in \mathcal{X}$ и $x \in E := (X_1 \cdots X_t)^G$, то H является σ-субнормальной в G, секция H/H_E является σ-нильпотентной и $H^G \leq O_\Pi(G)$;*

(ii) *если H^G – Π'-полная группа силовского типа и $HY^x = Y^xH$ для всех $Y \in \mathcal{Y}$ и $x \in G$, то H^G обладает σ-нильпотентной холловой Π'-подгруппой.*

Отметим, что при $\sigma = \sigma^1$ следствиями теоремы 3.3.4 являются соответствующие результаты О.Х. Кегеля [24], В.Э. Дескинса [23] и И.М. Айзекса [50].

Глава 4 посвящена изучению свойств σ-дисперсивных групп.

Группа G называется: *σ-дисперсивной* [10], если либо $G = 1$, либо G имеет нормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{t-1} < G_t = G$ такой, что G_k/G_{k-1} является σ_i-группой для некоторого $i \in I$, $\sigma_i \in \sigma(G)$, и G/G_k и G_{k-1} являются σ_i'-группами для всех $k = 1, \ldots, t$; *дисперсивной* (О. Оре, Р. Бэр), если G σ-дисперсивна, где $\sigma = \sigma^1$.

Определение 4.1.4. *Группа G имеет σ-высоту Спенсера* [51] *$h_\sigma(G) = n$,*

[50] Isaacs, I.M. Semipermutable π-subgroups / I.M. Isaacs // Archiv der Mathematik. – 2014. – Vol. 102, № 1. – P. 1–6.

[51] Guo, W. Finite groups whose n-maximal subgroups are σ-subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Science China Mathematics. – 2019. – Vol. 62, № 7. – P. 1355–1372.

если каждая максимальная цепь подгрупп группы G длины n содержит собственную (т.е. отличную от G) σ-субнормальную подгруппу и существует по крайней мере одна максимальная цепь подгрупп из G длины $n-1$, не содержащая ни одной собственной σ-субнормальной подгруппы из G.

В разделе 4.1 получены следующие достаточные условия σ-дисперсивности группы.

Теорема 4.1.5 [20-А, теорема 1.5]. *Пусть G – σ-разрешимая группа. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(i) *если $h_\sigma(G) < |\sigma(G)|$, либо $h_\sigma(G) < |\pi(G)|$ и группа G разрешима, то группа G является σ-нильпотентной;*

(ii) *если $h_\sigma(G) \leq |\sigma(G)| + 1$, либо $h_\sigma(G) \leq |\pi(G)| + 1$ и группа G разрешима, то группа G является σ-дисперсивной.*

Теорема 4.1.6 [20-А, следствие 1.6]. *Пусть G – σ-разрешимая группа и $|\sigma(G)| = n$. Если каждая $(n+1)$-максимальная подгруппа группы G σ-субнормальна в G, то G является σ-дисперсивной группой.*

Теорема 4.1.6 подтверждает гипотезу А.Н. Скибы (проблема 7). Отметим также, что частично этот вопрос был решен автором в статье [13-А], где доказан следующий частный случай теоремы 4.1.5.

Теорема 4.1.7 [13-А, теоремы 0.1, 0.2]. *Пусть G – разрешимая группа и для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$ каждая холлова σ_i-подгруппа группы G сверхразрешима. Тогда выполняются следующие условия:*

(i) *если $h_\sigma(G) \leq |\sigma(G)| + 1$, то G является σ-дисперсивной группой;*

(ii) *если $|\sigma(G)| = n$ и каждая $(n+1)$-максимальная подгруппа группы G σ-субнормальна в G, то G является σ-дисперсивной группой.*

Теорема 4.1.5 имеет много следствий, в частности, имеют место

Следствие 4.1.8 (В. Го, А.Н. Скиба[51]). *Если разрешимая группа G не является σ-нильпотентной, то $|\pi(G)| \leq h_\sigma(G)$.*

В случае когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$ из теоремы 4.1.5 получаем

Следствие 4.1.9 (А. Манн[52]). (i) *Пусть $|\pi(G)| = n + 1$. Если каждая n-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G, то группа G нильпотентна.* (ii) *Пусть $|\pi(G)| = n$. Если каждая $(n+1)$-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G, то группа G дисперсивна.*

Следствие 4.1.10 (А.Е. Спенсер[53]). (i) *Если $h(G) < |\pi(G)|$, то группа G нильпотентна.* (ii) *Если $h(G) \leq |\pi(G)| + 1$, то G дисперсивна.*

В разделе 4.2 изучается строение σ-дисперсивных групп.

Определение 4.2.1. *Мы говорим, что ряд $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{t-1} \leq G_t = G$ является σ-холовым нормальным рядом (соответственно холловым*

[52] Mann, A. Finite groups whose *n*-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Transactions of the American Mathematical Society. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.

[53] Spencer, A.E. Maximal non-normal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific Journal of Mathematics. – 1968. – Vol. 27, № 1. – P. 167–173.

нормальным рядом) группы G, если G_i является σ-холловой (соответственно холловой) нормальной подгруппой группы G для всех $i = 1, \ldots, t$; G_i/G_{i-1} – фактор этого ряда, а t – его длина.

Определение 4.2.3. (1) *Под холловой σ-нильпотентной длиной, обозначаемой $l_{h\sigma}(G)$, σ-дисперсивной группы G понимается длина кратчайшего σ-холлова нормального ряда группы G с σ-нильпотентными факторами. По определению $l_{h\sigma}(G) = 0$ для каждой единичной группы G.*

(2) *Под холловой нильпотентной длиной, обозначаемой $l_h(G)$, дисперсивной группы G понимается длина кратчайшего холлова нормального ряда группы G с нильпотентными факторами. По определению $l_h(G) = 0$ для каждой единичной группы G.*

(3) *Если $G = A \times B$, где $A \neq 1$ – σ-холлова подгруппа группы G и A не может быть представлена в виде прямого произведения двух своих σ-холловых собственных подгрупп, то мы говорим, что A является холловой σ-компонентой группы G.*

Через $V(\Gamma)$ обозначим множество всех вершин ориентированного графа Γ, $A(\Gamma)$ – множество всех дуг Γ. Если Γ_1 – ориентированный граф такой, что $V(\Gamma_1) \subseteq V(\Gamma)$ и $A(\Gamma_1) \subseteq A(\Gamma)$, то Γ_1 является *подграфом* в Γ и в этом случае мы пишем $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$. *Путь* в Γ – это любая последовательность дуг (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \ldots, (x_{k-1}, x_k)$ таких, что конец одной дуги является началом другой дуги, *длина пути* – количество дуг, содержащихся в нем.

Поставим в соответствие каждой группе $G \neq 1$ ориентированный граф $\Gamma = \Gamma_{H\sigma}(G)$ следующим образом. Пусть $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t\}$. $\Gamma_{H\sigma}(G)$ имеет t вершин $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$ и (σ_i, σ_j) является дугой Γ (направленной из σ_i в σ_j) тогда и только тогда, когда $\sigma_j \in \sigma(G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G))$. Такой граф мы называем *σ-графом Хоукса* группы G.

Вершины x и y ориентированного графа Γ называются *слабо связными* [54], если есть вершины $a_1 = x, a_2, \ldots, a_t = y$ такие, что для каждого $i = 2, \ldots, t$ либо $(a_{i-1}, a_i) \in A(\Gamma)$, либо $(a_i, a_{i-1}) \in A(\Gamma)$. Граф Γ называется *слабо связным* или *слабым* [54], если любые две его вершины слабо связаны. *Слабая компонента графа* Γ [54] – это любой его максимальный слабый подграф. Наконец, *цикл* – это путь $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{k-1}, x_k)$, в котором начальная вершина x_1 совпадает с конечной вершиной x_k.

Основным результатом раздела 4.2 является следующая теорема, дающая решение проблемы 8, а также критерии σ-дисперсивности группы.

Теорема 4.2.4 [29-А, теорема 1.7]. *Пусть $G \neq 1$ и $\Gamma = \Gamma_{H\sigma}(G)$ является σ-графом Хоукса группы G.*

(a) *Группа G является σ-дисперсивной тогда и только тогда, когда граф Γ не имеет циклов.*

[54] Harary, F. Graph Theory / F. Harary. – Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1969. – 274 p.

(b) *Группа G является σ-дисперсивной с $l_{h\sigma}(G) = n$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие утверждения:* (i) *G однозначно записывается в виде $G = C_1 \times \cdots \times C_r$, где $C_1, \ldots, C_r$ являются холловыми σ-компонентами группы G и C_i является σ-дисперсивной группой для всех $i = 1, \ldots, r$. Кроме того, $\Gamma_{H\sigma}(C_1), \ldots, \Gamma_{H\sigma}(C_r)$ – множество всех слабых компонент графа Γ;* (ii) *для некоторого i имеем $l_{h\sigma}(G) = l_{h\sigma}(C_i)$;* (iii) *если $n > 1$, то холлова σ-нильпотентная длина $l_{h\sigma}(G)$ группы G равна $m + 1$, где m – максимум длин путей в $\Gamma_{H\sigma}(C_i)$.*

В случае, когда $\sigma = \sigma^1$, мы используем символ $\Gamma_H(G)$ вместо $\Gamma_{H\sigma}(G)$.

Следствие 4.2.5 (Т. Хоукс[4]). *Группа $G \neq 1$ является дисперсивной тогда и только тогда, когда граф $\Gamma_H(G)$ не имеет циклов.*

Следующая теорема дает решение проблемы Л.А. Шеметкова об описании строения дисперсивных групп методами теории графов, поставленной им на Гомельском алгебраическом семинаре в 1995 г.

Теорема 4.2.6 [29-А, теорема 1.9]. *Пусть $G \neq 1$ и $\Gamma = \Gamma_H(G)$. Если G – дисперсивная группа и $n = l_h(G)$, то выполняются следующие утверждения:*

(i) *G однозначно записывается в виде $G = C_1 \times \cdots \times C_r$, где $C_1, \ldots, C_r$ являются холловыми компонентами группы G и C_i является дисперсивной группой для всех $i = 1, \ldots, r$. Кроме того, $\Gamma_H(C_1), \ldots, \Gamma_H(C_r)$ – множество всех слабых компонент графа Γ;*

(ii) *для некоторого i имеем $l_h(G) = l_h(C_i)$;*

(iii) *если $n > 1$, то холлова нильпотентная длина $l_h(G)$ группы G совпадает с $m + 1$, где m – максимум длин путей в $\Gamma_H(C_i)$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Если $G \notin \mathfrak{F}$, но $H \in \mathfrak{F}$ для каждой собственной подгруппы H из G, то G называют *$\mathfrak{F}$-критической*[55] или *минимальной не-$\mathfrak{F}$-группой*[56]. Минимальную ненильпотентную группу называют *группой Шмидта*.

В главе 5 диссертации изучается влияние $\mathfrak{F}$-критических и обобщенно $\mathfrak{F}$-критических подгрупп на строение основной группы.

Большое число публикаций связано с изучением групп, в которых подгруппы Шмидта либо субнормальны[57, 58, 59, 60], либо σ-субнормальны[61, 62], см.

---

[55] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

[56] Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 255 с.

[57] Семенчук, В.Н. Конечные группы с системой минимальных не-$\mathfrak{F}$-групп / В.Н. Семенчук // Подгрупповая структура конечных групп. – Мн.: Наука и техника, 1981. – С. 138–149.

[58] Княгина, В.Н. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.

[59] Ведерников, В.А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 6. – С. 669–687.

[60] Monakhov, V.S. Finite groups with Hall subnormally embedded Schmidt subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Communications in Algebra. – 2020. – Vol. 48, № 1. – P. 93–100.

[61] Al-Sharo, K.A. On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / K.A. Al-Sharo, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 45, № 10. – P. 4158–4165.

[62] Hu, B. On finite groups with generalized σ-subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // Communications in

также работы [63, 64, 65]. В частности, отвечая на вопрос А.Н. Скибы [10], А. Баллестер-Болинчес, С.Ф. Каморников, Х. Йии доказали [65], что если каждая подгруппа Шмидта в G σ-субнормальна, то секция $G/F_\sigma(G)$ является циклической, где $F_\sigma(G)$ – наибольшая нормальная σ-нильпотентная подгруппа из G.

Нами впервые анализируется альтернативная ситуация, когда все подгруппы Шмидта группы G являются либо абнормальными, либо σ-абнормальными в G. Напомним, что подгруппа A группы G называется *σ-абнормальной* [66] *в* G, если для всех подгрупп $K < H$ из G, где $A \leq K$, секция H/K_H не является σ-примарной.

В разделе 5.1 дано описание *$S\sigma A$-групп*, т.е. не σ-нильпотентных групп, в которых каждая не σ-нильпотентная подгруппа Шмидта σ-абнормальна и *SA-групп*, т.е. групп, в которых каждая подгруппа Шмидта абнормальна.

Теорема 5.1.3 [24-А, теорема 1.1]. *Пусть G – σ-разрешимая $S\sigma A$-группа. Тогда выполняются следующие условия:*

(i) *$G = D \rtimes Q$, где $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma} = G^{\mathfrak{N}} \neq 1$ и $Q = \langle x \rangle$ – циклическая силовская q-подгруппа из G для некоторого простого числа q, делящего $|G|$. Кроме того, Q является холловой σ_i-подгруппой группы G для некоторого i;*

(ii) *$F_\sigma(G) = D\langle x^q \rangle$ – наибольшая нормальная σ-нильпотентная подгруппа группы G. В частности, $\langle x^q \rangle \leq Z(G)$ и $G = DH$ для любой не σ-нильпотентной подгруппы H группы G;*

(iii) *$D \cap H = H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ для каждой не σ-нильпотентной подгруппы H из G;*

(iv) *если $N_D(Q) \neq 1$, то D является холловой σ_j-подгруппой группы G для некоторого $j \neq i$;*

(v) *если p – простое число, делящее $|D|$, и для силовской p-подгруппы P группы D имеем $Q \leq N_G(P)$ и $[P, Q] \neq 1$, то относительно подгруппы $E = P \rtimes Q$ выполняются следующие условия:* (a) *$N := N_E(Q)$ нильпотентна с $N_E(N) = N$;* (b) *$Z_\infty(E) \cap P = N \cap P \leq \Phi(P)$;* (c) *любые два главных фактора H/K и T/L из E между $N \cap P$ и P являются E-изоморфными и $|H/K| = p^n$, где n – наименьшее целое число, такое что q делит $p^n - 1$.*

Обратно, если условия (i), (ii) *и* (iii) *выполнены для некоторых подгрупп D и Q группы G, то G является σ-разрешимой $S\sigma A$-группой.*

Мы говорим, что G является *σ-квазипростой группой*, если G квазипроста и факторгруппа $G/Z(G)$ не является σ-примарной.

Описание строения не σ-разрешимых $S\sigma A$-групп дает следующая

Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 7. – P. 3127–3134.

[63] Yi, X. Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / X. Yi, S.F. Kamornikov // Journal of Algebra. – 2020. – Vol. 560, № 15. – P. 181–191.

[64] Сунь, Ф. Конечные группы с обобщенно субнормальными подгруппами Шмидта / Ф. Сунь, С. Йи, С.Ф. Каморников // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 2. – С. 450–456.

[65] Ballester-Bolinches, A. Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, X. Yi // Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society. – 2022. – Vol. 45. – P. 2431–2440.

[66] Skiba, A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Communications in Mathematics and Statistics. – 2016. – Vol. 4. – P. 281–309.

Теорема 5.1.4 [24-А, теорема 1.2]. *Пусть G – не σ-разрешимая $S\sigma A$-группа. Тогда выполняются следующие условия:*

(i) *группа G является σ-квазипростой. Следовательно, $Z(G) \leq \Phi(H)$ для любой не σ-нильпотентной подгруппы Шмидта H группы G и $U/Z(G)$ является не σ-нильпотентной подгруппой Шмидта в $G/Z(G)$ тогда и только тогда, когда U является не σ-нильпотентной подгруппой Шмидта в G;*

(ii) *любая не σ-разрешимая подгруппа H группы G является σ-совершенной, т.е. $H^{\mathfrak{N}_\sigma} = H$;*

(iii) *если $N = N_G(P)$ для некоторой неединичной p-подгруппы P группы G, то либо N является группой типа (i), либо N σ-нильпотентна, либо $|N/F_\sigma(N)|$ простое число.*

Описание строения SA-групп дано нами в теоремах 5.1.17 и 5.1.18 [21-А, теоремы 1.1, 1.2], доказанных в данном разделе диссертации.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация групп. Подгруппа A из G называется *K-$\mathfrak{F}$-субнормальной* [15] в G, если существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i} \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Можно показать, что в случае когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\sigma$ – класс всех σ-нильпотентных групп, понятия K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы и σ-субнормальной подгруппы эквивалентны [10].

Формация $\mathfrak{F}$ называется *K-решеточной* [15], если в каждой группе G множество всех ее K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

Полная классификация K-решеточных наследственных насыщенных формаций дана в работах [67, 68] (см. также [гл. 6] [15]). Такого рода формации оказались полезными при изучении многих вопросов теории конечных групп (см., например, [гл. 6] [15]).

Используя методы о σ-свойствах групп, разработанные в предыдущих главах диссертации, в разделах 5.2–5.5 исследуется влияние $\mathfrak{F}$-критических подгрупп на строение основной группы. В частности, в разделе 5.2, доказана следующая теорема, доказательство которой также использует такую классификацию, и которая обобщает многие известные результаты, в том числе, соответствующие результаты работ В.Н. Семенчука [57], В.С. Монахова и В.Н. Князиной [58], И.В. Близнеца и В.М. Селькина [69], К.А. Аль-Шаро и А.Н. Скибы [61], Б. Ху, Дж. Хуана [62].

Теорема 5.2.1 [8-А, теорема]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная K-решеточная формация, содержащая все нильпотентные группы.*

(i) *Если каждая $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа H группы G K-$\mathfrak{F}$-субнормаль-*

---

[67] Ballester-Bolinches, A. On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Perez-Ramos // Journal of Algebra. – 1992. – Vol. 148. – P. 42–52.

[68] Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры, Киев: Ин-т математики. – 1993. – С. 27–54.

[69] Blisnets, I.V. On finite groups with modular Schmidt subgroup / I.V. Blisnets, V.M. Sel'kin // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – Т. 4, № 41. – С. 36–38.

на в G и $H/F(H) \in \mathfrak{F}$, то $G/F(G) \in \mathfrak{F}$.

(ii) *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо K-$\mathfrak{F}$-субнормальна, либо модулярна в G, то коммутант G' группы G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Подгруппа A группы G называется *$\mathfrak{F}$-нормальной*[70] в G, если либо $A \trianglelefteq G$, либо каждый главный фактор H/K в G между A_G и A^G является *$\mathfrak{F}$-центральным*[56] в G, т.е. $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$.

В разделе 5.3 нами анализируются дальнейшие применения решеток субнормальных подгрупп и $\mathfrak{F}$-нормальных подгрупп группы в теории $\mathfrak{F}$-критических подгрупп. Мы говорим, что подгруппа H группы G является *$\mathfrak{F} \wedge sn$-вложенной в G*, если $H = A \cap B$ для некоторой $\mathfrak{F}$-нормальной подгруппы A и субнормальной подгруппы B группы G.

В диссертации доказано, что множество $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}\wedge sn}(G)$ всех $\mathfrak{F} \wedge sn$-вложенных подгрупп в G является нижней подрешеткой[27, с. 7] решетки $\mathcal{L}(G)$. Этот результат лежит в основе приложений $\mathfrak{F} \wedge sn$-вложенных подгрупп.

Пусть $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп. В разделе 5.3 описаны группы с $\mathfrak{U} \wedge sn$-вложенными подгруппами Шмидта и, в качестве одного из приложений этого результата, доказана следующая теорема.

Теорема 5.3.3 [14-А, теорема 1.4]. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда $G = AB$, где A и B – сверхразрешимые $\mathfrak{U} \wedge sn$-вложенные подгруппы из G и любая подгруппа Шмидта группы G $\mathfrak{U} \wedge sn$-вложена в G.*

Раздел 5.4 посвящен изучению свойств нормы и $\mathfrak{F}$-нормы группы.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Мы говорим, что группа G является *обобщенно $\mathfrak{F}$-критической группой*, если в G имеется нормальная подгруппа N такая, что $N \leq \Phi(G)$ и факторгруппа G/N является $\mathfrak{F}$-критической.

Норма $N(G)$ группы G определяется (Р. Бэр, 1935) как пересечение нормализаторов всех подгрупп из G. Первые приложения этой конструкции даны Р. Бэром[71], показавшим, что группа G с единичным центром имеет $N(G) = 1$.

Пересечение нормализаторов $\mathfrak{F}$-корадикалов $N_{\mathfrak{F}}(G)$ всех подгрупп группы G, где $\mathfrak{F}$ – непустая формация, называют *$\mathfrak{F}$-нормой*[72] группы G.

Основными результатами раздела 5.4 диссертации являются

Теорема 5.4.2 [12-А, теорема 3]. *Если группа G не принадлежит непустой наследственной формации $\mathfrak{F}$, то $N_{\mathfrak{F}}(G)$ группы G совпадает с пересечением нормализаторов $\mathfrak{F}$-корадикалов всех ее обобщенных $\mathfrak{F}$-критических подгрупп.*

Теорема 5.4.4 [12-А, с 234]. *Норма $N(G)$ группы G совпадает с пересечением нормализаторов всех циклических подгрупп группы G, имеющих своим*

[70] Chi, Z. On two sublattices of the subgroup lattice of a finite group / Z. Chi, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 6. – P. 1035–1047.

[71] Baer, R. Norm and hypernorm / R. Baer // Publicationes Mathematicae Debrecen. – 1956. – Vol. 4, № 3-4. – P. 347–350.

[72] Su, N. On the normalizers of $\mathfrak{F}$-residuals of all subgroups of a finite group / N. Su, Y. Wang // Journal of Algebra. – 2013. – Vol. 392. – P. 185–198.

порядком степень простого числа.

Следствиями теоремы 5.4.4 являются соответствующие результаты работ Ю. Линь, Ю. Гун, З. Шэнь [73], Ц. Шэнь, В. Ши, Г. Цянь [74] и Б. Ху, Дж. Хуан, А.Н. Скибы [75].

В разделе 5.5 получено следующее обобщение теоремы Э. Шенкмана [76] о централизаторе нильпотентного корадикала субнормальной подгруппы.

Теорема 5.5.1 [6-А, теорема А]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. Пусть S – K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, и пусть $Z_{\mathfrak{F}}(E) = 1$ для каждой подгруппы E такой, что $S \leq E$. Тогда $C_G(S^{\mathfrak{F}}) \leq S^{\mathfrak{F}}$.*

Для приложений теории σ-свойств групп весьма полезными оказались σ-нильпотентные, мета-σ-нильпотентные и σ-разрешимые группы. Поэтому их изучение является важной задачей теории σ-свойств групп. Такая задача решается в работах [11-А,16-А]. Результаты этих работ представлены в разделах 6.1 и 6.2, где доказаны следующие теоремы.

Теорема 6.1.4 [16-А, теорема 1]. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *группа G является σ-разрешимой;*

(ii) *каждая подгруппа группы G является K-$\mathfrak{S}_\sigma$-субнормальной;*

(iii) *G имеет полное холлово σ-множество $\mathcal{H}$ все элементы которого являются слабо K-$\mathfrak{S}_\sigma$-субнормальными в G;*

(iv) *в каждой максимальной цепи $\cdots < M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G по крайней мере одна из подгрупп M_3, M_2, или M_1 является слабо K-$\mathfrak{S}_\sigma$-субнормальной в G;*

(v) *$i_{K,\mathfrak{S}_\sigma}(G) \leq 2|\sigma(G)|$, где $i_{K,\mathfrak{S}_\sigma}(G)$ – число классов изоордных не K-$\mathfrak{S}_\sigma$-субнормальных подгрупп группы G.*

Напомним, что группы A и B называются *изоордными*, если $|A| = |B|$.

Подгруппу H группы G мы называем: *слабо K-$\mathfrak{S}_\sigma$-субнормальной в G*, если существуют K-$\mathfrak{S}_\sigma$-субнормальные подгруппы T и S такие, что $G = HT$ и $H \cap T \leq S \leq H$; *(σ, m)-вложенной в G*, если в G имеются σ-субнормальная подгруппа T, σ-перестановочная подгруппа A и модулярная подгруппа B такие, что $G = HT$ и $H \cap T \leq \langle A, B\rangle \leq H$; *$\mathfrak{U} \wedge sp$-вложенной в G*, если для некоторых $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппы A и силовски перестановочной подгруппы B группы G имеет место $H = A \cap B$.

Теорема 6.2.1 [11-А, теорема 1.5]. *Группа G является мета-σ-нильпотентной тогда и только тогда, когда G обладает полным холловым*

---

[73] Lin, Y. On the generalized norms of a group / Y. Lin, Y. Gong, Z. Shen // Communications in Algebra. – 2021. – Vol. 49, № 9. – P. 4092–4097.

[74] Shen, Z. On the norm of the nilpotent residuals of all subgroups of a finite group / Z. Shen, W. Shi., G. Qian // Journal of Algebra. – 2012. – Vol. 352, № 2. – P. 290–298.

[75] Hu, B. On the σ-nilpotent norm and the σ-nilpotent length of a finite group / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // Glasgow Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 63, № 1. – P. 121–132.

[76] Schenkman, E. On the tower theorem for finite groups / E. Schenkman // Pacific Journal of Mathematics. – 1955. – Vol. 5, № S2 – P. 995–998.

σ-множеством $\mathcal{H}$, все элементы которого (σ, m)-вложенны в группу G.

Разработанные в предыдущих разделах методы позволили в разделе 6.3 получить новые характеризации сверхразрешимых групп.

Теорема 6.3.3 [15-А, теорема 1.3]. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *группа G сверхразрешима;*

(ii) *каждая подгруппа группы G является $\mathfrak{U} \wedge sp$-вложенной в G;*

(iii) *каждая максимальная подгруппа из G $\mathfrak{U} \wedge sp$-вложенна в G;*

(iv) *все вторые максимальные подгруппы $\mathfrak{U} \wedge sp$-вложены в G;*

(v) *все максимальные подгруппы любой нециклической силовской подгруппы группы G являются $\mathfrak{U} \wedge sp$-вложенными в G;*

(vi) *все циклические подгруппы группы G, имеющие простой порядок или порядок 4, являются $\mathfrak{U} \wedge sp$-вложенными в G;*

(vii) *G имеет $\mathfrak{U} \wedge sp$-вложенные сверхразрешимые подгруппы A_1, A_2, A_3, чьи индексы $|G : A_1|, |G : A_2|, |G : A_3|$ попарно взаимно просты;*

(viii) *группа G имеет ряд подгрупп $1 = L_0 \trianglelefteq L_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq L_{t-1} \trianglelefteq L_t = G$, где фактор L_{i+1}/L_i цикличен и L_i является $\mathfrak{U} \wedge sp$-вложенной в G для всех $i = 0, 1, \ldots, t-1$.*

В главе 7 построена общая теория функторно замкнутых кратно σ-локальных формаций.

Определение 7.1.1. [34] *Функция f вида $f : \sigma \to \{$формации групп$\}$ называется формационной σ-функцией. Для любой формационной σ-функции f определяется класс $LF_\sigma(f) = (G \mid G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$. Если для некоторой формационной σ-функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то формация $\mathfrak{F}$ называется σ-локальной, а f – σ-локальным определением формации $\mathfrak{F}$.*

Определение 7.1.2. [34] *Каждая формация считается 0-кратно σ-локальной. При $n > 0$, формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно σ-локальной, если либо $\mathfrak{F} = (1)$ – класс всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)$ – $(n-1)$-кратно σ-локальна для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.* Формация называется *тотально σ-локальной*, если она является n-кратно σ-локальной для всех целых неотрицательных n.

Пусть τ – подгрупповой функтор [12]. Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой* или иначе *(функторно замкнутой)*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $G \in \mathfrak{F}$.

В разделе 7.1 построена общая теория функторно замкнутых кратно σ-локальных формаций [17-А, 18-А, 33-А, 37-А] и, в частности, получены критерии n-кратной σ-локальности непустой функторно замкнутой формации и функторной замкнутости n-кратно σ-локальной формации.

Совокупность всех τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций мы обозначаем через $l^\tau_{\sigma_n}$. Формации из $l^\tau_{\sigma_n}$ мы называем *$l^\tau_{\sigma_n}$-формациями.*

Формационная σ-функция f называется: *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i; *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i. Если $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$ и F – полная внутренняя формационная σ-функция, то F называется *каноническим σ-локальным определением* формации $\mathfrak{F}$.

Критерий τ-замкнутости n-кратно σ-локальной формации дает

Теорема 7.1.11 [33-А, теорема 2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – n-кратно σ-локальная формация ($n \geq 1$) и F – каноническое σ-локальное определение $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тогда и только тогда, когда $F(\sigma_i)$ является τ-замкнутой формацией для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый набор групп. Символ $l^\tau_{\sigma_n}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ обозначает *$l^\tau_{\sigma_n}$-формацию порожденную* $\mathfrak{X}$, т.е. пересечение всех $l^\tau_{\sigma_n}$-формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Для любого $\sigma_i \in \sigma$ и всякого неотрицательного целого числа n класс групп $\mathfrak{X}^\tau_{\sigma_n}(\sigma_i)$ мы определяем следующим образом: $\mathfrak{X}^\tau_{\sigma_n}(\sigma_i) = l^\tau_{\sigma_n}\mathrm{form}\,(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}^\tau_{\sigma_n}(\sigma_i) = \emptyset$, если $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X})$.

Критерий кратной σ-локальности непустой τ-замкнутой формации дает следующая теорема.

Теорема 7.1.21 [37-А, теорема 3.7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая τ-замкнутая формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathfrak{F}$ *является τ-замкнутой n-кратно σ-локальной* ($n \geq 1$)*;*

(2) $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^\tau_{\sigma_{n-1}}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ *для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$;*

(3) $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\cup_{\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{F})}\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^\tau_{\sigma_{n-1}}(\sigma_i))$.

Хорошо известно, что решетка всех многообразий групп (которые, как известно, являются формациями) является полной, модулярной, коалгебраической, но не является алгебраической. В связи с этим, актуальной является задача о наличии таких же свойств у решеток σ-локальных формаций групп. Решение такой задачи посвящены работы автора [27-А, 31-А, 34-А]. Основные результаты этих работ представлены в разделе 7.2, где установлены основные свойства решеток τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций.

Пусть θ – полная решетка формаций. Следуя [12, с. 14], символом θ^σ обозначим множество всех формаций $\mathfrak{F}$ таких, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) \in \theta$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$. Полную решетку θ^σ будем называть *σ-индуктивной*, если для любого множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\} \subseteq \theta^\sigma$ и для любого множества $\{f_j \mid j \in J\}$, где $\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j)$, σ-локальное определение f_j является внутренним и $f_j(\sigma_i) \in \theta$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$, имеет место $\theta^\sigma\mathrm{form}\,(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j) = LF_\sigma(f)$, где $\theta^\sigma\mathrm{form}\,(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j)$ – пересечение всех формаций из θ^σ, содержащих $\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ и f – такая формационная σ-функция, что для всех $\sigma_i \in \sigma(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j)$ $f(\sigma_i) = \theta\mathrm{form}\,(\cup_{j\in J}f_j(\sigma_i))$ – пересечение всех формаций из θ, содержащих $\cup_{j\in J}f_j(\sigma_i)$.

Теорема 7.2.1 [31-А, теорема 1.1]. *Множество $l^\tau_{\sigma_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций частично упорядочено относительно включения. При этом $l^\tau_{\sigma_n}$ образует полную σ-индуктивную решетку формаций, в которой для любого множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\} \subseteq l^\tau_{\sigma_n}$, пересечение $\cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$*

является наибольшей нижней границей и $\vee^{\tau}_{\sigma_n}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$ *– наименьшей верхней границей* $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ *в* $l^{\tau}_{\sigma_n}$.

Теорема 7.2.13 [27-А, теорема 1.1]. *Решетка* $l^{\tau}_{\sigma_n}$ *всех* τ*-замкнутых* n*-кратно* σ*-локальных формаций алгебраична и модулярна.*

Напомним, что полная решетка формаций θ называется $\mathfrak{X}$*-отделимой*[12, с. 159], если для любого терма $\nu(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\theta\}$, любых θ-формаций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \nu(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что $A \in \nu(\theta\mathrm{form}\, A_1, \ldots, \theta\mathrm{form}\, A_m)$. В частности, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех конечных групп, то $\mathfrak{G}$-отделимая решетка формаций называется *отделимой*.

Теорема 7.2.19 [34-А, теорема 1.1]. *Решетка* $l^{\tau}_{\sigma_n}$ *всех* τ*-замкнутых* n*-кратно* σ*-локальных формаций является отделимой.*

Раздел 7.3 посвящен решению задачи Л.А. Шеметкова[39] (проблема 9) о классификации критических формаций в теории σ-локальных формаций. Следуя[39, 77], *минимальной* σ*-локальной не* $\mathfrak{H}$*-формацией* или $\mathfrak{H}_\sigma$*-критической формацией* мы называем σ-локальную формацию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные σ-локальные подформации которой содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Основным результатом раздела 7.3 является следующая теорема, дающая описание $\mathfrak{H}_\sigma$-критических формаций для произвольной σ-локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа [30-А] (т.е. формации, которая имеет такое σ-локальное определение, все неабелевы значения которого σ-локальны).

Теорема 7.3.1 [30-А, теорема А]. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *–* σ*-локальная формация классического типа и* H *– ее каноническое* σ*-локальное определение. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной* σ*-локальной не* $\mathfrak{H}$*-формацией, когда* $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$*, где* G *– такая монолитическая группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$*, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = P$ *– простая* σ_i*-группа,* $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$*;*

2) P *– не* σ*-примарная группа и* $P = G^{H(\sigma_i)}$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma(P)$*;*

3) $G = P \rtimes K$*, где* $P = C_G(P)$ *–* p*-группа,* $p \in \sigma_i$*, а* K *– такая монолитическая группа с монолитом* $Q = K^{H(\sigma_i)}$*, что* $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ *и либо* $\Phi(K) = 1$ *и* $K^{H(\sigma_j)} \subseteq Q$ *для всех* $\sigma_j \in \sigma(Q)$*, либо* K *– минимальная не* $H(\sigma_i)$*-группа одного из следующих типов:* а) *группа кватернионов порядка* 8*, если* $2 \notin \sigma_i$*;* б) *неабелева группа порядка* q^3 *простой нечетной экспоненты* $q \notin \sigma_i$*;* в) *циклическая* q*-группа,* $q \notin \sigma_i$.

Решение задачи Л.А. Шеметкова базируется на методах, разработанных автором в теории критических ω-локальных формаций [1-А, 2-А, 3-А].

---

[77] Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Изв. АН БССР. Сер. физ.–мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе разработаны новые арифметические и геометрические методы исследования конечных групп и их классов, определяемые разбиениями σ множества всех простых чисел, на основе которых найдены решения ряда открытых проблем теории конечных групп, теории обобщенно локальных формаций, установлены новые закономерности и свойства алгебры σ-локальных формаций.

Основные научные результаты диссертации

Решена проблема А.Н. Скибы об описании строения $P\sigma T$-групп, т.е. групп, в которых условие σ-перестановочности подгрупп является транзитивным отношением [22-A, 48-A].

Решена проблема А. Фриджерио о классификации групп, в которых модулярность подгрупп является транзитивным отношением [23-A, 25-A, 48-A].

Дано описание строения разрешимых групп с транзитивным отношением σ-квазинормальности подгрупп [26-A, 48-A].

Получено описание строения групп, в которых каждая σ-субнормальная подгруппа модулярна (нормальна) [35-A, 48-A].

Построена теория σ-специальных замкнутых подгрупповых функторов, позволившая описать классы σ-разрешимых $P\sigma T$-групп [28-A, 32-A, 48-A].

Получено описание новых G-накрывающих систем подгрупп для классов всех σ-разрешимых $P\sigma T$-групп, [9-A, 46-A], всех разрешимых PST-групп и всех сверхразрешимых групп [7-A, 10-A].

Решена проблема 19.88 из “Коуровской тетради” об описании G-накрывающих систем подгрупп для класса всех σ-нильпотентных групп [9-A, 46-A]. Решена проблема 19.87 из “Коуровской тетради” об описании G-накрывающих систем подгрупп для класса всех σ-разрешимых групп [9-A, 46-A].

Получены новые характеризации σ-разрешимых $P\sigma T$-групп и разрешимых PST-групп [9-A], разрешимых PT- и T-групп [7-A, 10-A].

Установлены свойства подгрупп, обобщенно перестановочных с заданными накрывающими их системами подгрупп [5-A, 19-A, 36-A].

Подтверждена гипотеза о σ-дисперсивности группы с σ-субнормальными $(n + 1)$-максимальными подгруппами [13-A, 20-A]. Получены критерии σ-дисперсивности группы [13-A, 20-A, 29-A].

Решена проблема описания строения σ-дисперсивных групп, разработанными в диссертации методами теории σ-графов Хоукса. Решена проблема Л.А. Шеметкова об описании строения дисперсивных групп методами теории графов [29-A].

Описано строение групп с σ-абнормальными не σ-нильпотентными подгруппами Шмидта и групп с абнормальными подгруппами Шмидта [21-A, 24-A].

Описано строение групп с K-$\mathfrak{F}$-субнормальными и $\mathfrak{F} \wedge sn$-вложенными подгруппами Шмидта [8-А, 14-А].

Установлены новые свойства нормы и $\mathfrak{F}$-нормы конечной группы для произвольной наследственной формации $\mathfrak{F}$ [12-А].

Усилен результат Е. Шенкмана о нильпотентном корадикале субнормальной подгруппы с использованием формационных методов [6-А, 45-А].

Даны новые характеризации классов всех σ-разрешимых [11-А, 16-А], мета-σ-нильпотентных [11-А] и сверхразрешимых групп [15-А].

Построена теория функторно замкнутых σ-локальных формаций, в том числе установлены основные свойства τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций [17-А, 47-А].

Получены критерии τ-замкнутости n-кратно σ-локальной формации [33-А, 47-А] и n-кратной σ-локальности непустой τ-замкнутой формации [18-А, 37-А, 39-А, 47-А].

Установлены основные свойства (полнота, σ-индуктивность, модулярность, алгебраичность, отделимость) решетки всех τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций [27-А, 31-А, 34-А, 44-А, 47-А].

Решена проблема Л.А. Шеметкова о классификации критических формаций в классе σ-локальных формаций [30-А]. В частности, дана классификация критических σ-локальных формаций для классов всех σ-разрешимых, σ-нильпотентных, мета-σ-нильпотентных групп, групп с σ-нильпотентным коммутантом [4-А, 30-А, 38-А, 43-А].

Получено описание минимальных ω-локальных неметанильпотентых формаций [1-А, 40-А], минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций, где $\mathfrak{H}$ – формация всех групп с метанильпотентным коммутантом [3-А, 42-А], формация всех разрешимых групп с нильпотентной длиной, не превосходящей n [2-А, 41-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты и методы диссертационной работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях современной теории групп при изучении σ-свойств групп и их классов, проводимых в научных центрах Республики Беларусь, России, Украины, США, Германии, Италии, Испании, Китая, Иордании и др.

Материалы диссертации будут также полезны при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей университетов, при написании курсовых, дипломных работ и диссертаций.

Практическая значимость результатов диссертационного исследования подтверждена их применением в учебном процессе Белорусского государственного университета (акты о практическом использовании результатов исследования № 2.4/80 от 20.04.2023, № 2.4/174 от 07.06.2024; Приложение В).

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных рецензируемых журналах

1-А. Сафонова, И.Н. О критических частично насыщенных формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. – 2006. – №2. – С. 51–55.

2-А. Сафонова, И.Н. О минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{N}^n$-формациях / И.Н. Сафонова // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 5(38). – С. 68–72.

3-А. Сафонова, И.Н. О минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Веснік Гродненскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. – 2010. – № 2(96). – С. 67–71.

4-А. Сафонова, И.Н. О минимальных σ-локальных не-$\mathfrak{H}$-формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4(45). – С. 105–112.

5-А. Сафонова, И.Н. Обобщенно σ-субнормальные и σ-перестановочные подгруппы конечных групп / И.Н. Сафонова, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3(48). – С. 76–81.

6-А. Aivazidis, S. Subnormality and residuals for saturated formations: A generalisation of Schenkman's theorem / S. Aivazidis, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2021. – Vol. 24, № 4. – P. 807–818.

7-А. G-covering subgroup systems for the classes of finite soluble PST-groups / J. Guo, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2021. – Vol. 49, № 9. – P. 3872–3880.

8-А. Finite groups with K-$\mathfrak{F}$-subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang, D. Song, I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2021. – Vol. 49, № 10. – P. 4513–4518.

9-А. G-covering subgroup systems for some classes of σ-soluble groups / A.-M. Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2021. – Vol. 585. – P. 280–293.

10-А. Guo, W. On σ-subnormal subgroups of finite groups / W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 2021. – Vol. 45, № 6. – P. 813–824.

11-А. Рыжик, В.Н. Критерии σ-разрешимости и мета-σ-нильпотентности конечной группы / В.Н. Рыжик, И.Н. Сафонова // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 6. – С. 1369–1381. Английская версия: Ryzhik, V.N. Criteria for σ-solvability and meta-σ-nilpotency of a finite group / V.N. Ryzhik, I.N. Safonova // Siberian Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 62, № 6. – P. 1110–1118.

12-А. Рыжик, В.Н. О $\mathfrak{F}$-норме конечной группы / В.Н. Рыжик, И.Н. Сафонова, А.Н. Скиба // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2022. – Т. 28, № 1. – С. 232–238. Английская версия: Ryzhik, V.N. On the $\mathfrak{F}$-norm of a finite group / V.N. Ryzhik, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2022. – Vol. 317, № 1. – P. 136–141.

13-А. Сафонова, И.Н. Об одном вопросе А.Н. Скибы в теории σ-свойств конечных групп / И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1(50). – С. 78–83.

14-А. A generalization of subnormality / A-M. Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 19, № 3. – 98 (15 pages).

15-А. Решеточные характеризации конечных сверхразрешимых групп / А.-М. Лю, В. Го, И.Н. Сафонова, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2022. – Т. 63, № 3. – С. 626–638. Английская версия: Lattice characterizations of finite supersoluble groups / A-M. Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Siberian Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 63, № 3. – P. 520–529.

16-А. Характеризации σ-разрешимых конечных групп / В. Го, Ч. Ван, И.Н. Сафонова, А.Н. Скиба // Математические заметки. – 2022. – Т. 111, № 4. – С. 506–518. Английская версия: Characterizations of σ-solvable finite groups / W. Guo, Z. Wang, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Mathematical Notes. – 2022. – Vol. 111, № 4. – P. 534–543.

17-А. Safonova, I.N. Some properties of n-multiply σ-local formations of finite groups / I.N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 15, № 7. – 2250138 (12 pages).

18-А. Safonova, I.N. A criterion for σ-locality of a non-empty formation / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2022. – Vol. 50, № 6. – P. 2366–2376.

19-А. A generalization of σ-permutability / Z. Wang, J. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Communications in Mathematics and Statistics. – 2022. – Vol. 10, № 3. – P. 565–579.

20-А. On finite σ-tower groups / J. Cai, J. Wang, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2023. – Vol. 26, № 1. – P. 119–134.

21-А. Finite groups with abnormal minimal non-nilpotent subgroups / Z. Wang, J. Cai, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Bulletin of the Australian Mathematical Society. – 2023. – Vol. 107, № 2. – P. 261–270.

22-А. A Robinson description of finite $P\sigma T$-groups / X.-F. Zhang, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2023. – Vol. 631. – P. 218–235.

23-А. Finite groups in which modularity is a transitive relation / A-M. Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Archiv der Mathematik. – 2023. – Vol. 121, № 2. – P. 111–121.

24-А. Конечные группы с σ-абнормальными подгруппами Шмидта Х. Ли, Ч. Ван, И.Н. Сафонова, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2023. —Т. 64, № 3. – С. 585–597. Английская версия: Finite groups with σ-abnormal Schmidt subgroups H. Li, Zh. Wang, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Siberian Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 64, No 3. – P. 629–638.

25-А. On an open question in the theory of modular subgroups / A-M. Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – №. 2. – С. 28–34.

26-А. Конечные разрешимые группы с транзитивным отношением σ-квазинормальности подгрупп / Ч. Ван, В. Го, И.Н. Сафонова, А.Н. Скиба // Математические заметки. – 2023. – Т. 114, № 5. – С. 669–678. Английская версия: Finite soluble groups in which σ-quasinormality of subgroups is a transitive relation / Zh. Wang, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Mathematical Notes. – 2023. – Vol. 114, № 5. – P. 1029–1036.

27-А. Safonova, I.N. On properties of the lattice of all τ-closed n-multiply σ-local formations / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2023. – Vol. 51, № 10. – P. 4454–4461.

28-А. Safonova, I.N. On some classes of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / I.N. Safonova, A.N. Skiba // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 6. – С. 460–464.

29-А. Cai, J. On finite Sylow tower and σ-tower groups / J. Cai, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Quaestiones Mathematicae. – 2023. – Vol. 46, № 9. – P. 1799–1813.

30-А. Сафонова, И.Н. О критических σ-локальных формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.

31-А. Safonova, I.N. On σ-inductive lattices of n-multiply σ-local formations of finite groups / I.N. Safonova // Journal of Algebra and Its Applications. – 2024. – Vol. 23, № 1. – 2450017 (13 pages).

32-А. Characterizations of some classes of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / H. Li, A.-M. Liu, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2024. – Vol. 52, № 1. – P. 128–139.

33-А. Safonova, I.N. On the τ-closedness of n-multiply σ-local formation / I.N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – Vol. 18. – P. 123–136.

34-А. Safonova, I.N. On separability of the lattice of τ-closed n-multiply σ-local formations / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2024. – Vol. 52, № 2. – P. 3309–3318.

35-А. Finite groups with modular σ-subnormal subgroups / A.-M. Liu, M. Chen, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2024. – Vol. 27,

№ 3. – P. 595–610.

36-А. A generalization of some results of the theory of permutable subgroups / M. Chen, H. Li, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Ricerche di Matematica. – 2024. – Vol. 73, № 4. – P. 2131–2144.

37-А. Сафонова, И.Н. О n-кратной σ-локальности непустой τ-замкнутой формации конечных групп / И.Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 1. – С. 32–38.

Материалы конференций

38-А. Сафонова, И.Н. О минимальных σ-локальных не $\mathfrak{N}_\sigma$-формациях / И.Н. Сафонова // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Международной науч. конф., Минск, 22–25 ноября 2021 г.: в 2 ч. / НАН Беларуси: сост. В.В. Лепин. – Минск: Беларуская навука, 2021. – Ч. 1. – С. 117–118.

39-А. Сафонова, И.Н. О кратной σ-локальности τ-замкнутых формаций конечных групп / И.Н. Сафонова // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: материалы XXI Международной конф., посвященной 85-летию со дня рождения А.А. Карацубы, Тула, 17–21 мая 2022 г. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого, 2022. – С. 81–85.

Тезисы докладов конференций

40-А. Сафонова, И.Н. О минимальных ω-насыщенных неметанильпотентных формациях / И.Н. Сафонова // Международная алгебраическая конференция, посвященная 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры: тез. докл., Москва, 26 мая–2 июня 2004 г. – Москва: МГУ, 2004. – С. 112–113.

41-А. Сафонова, И.Н. О минимальных частично насыщенных не $\mathfrak{N}^n$-формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // VI Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная 100-летию Н.Г. Чудакова: тез. докл., Саратов, 13–17 сентября 2004 г. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2004. – С. 106–107.

42-А. Сафонова, И.Н. О минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формациях / И.Н. Сафонова // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша: тез. докл., Москва, 28 мая–3 июня 2008 г. – Москва: МГУ, 2008. – С. 207–208.

43-А. Сафонова, И.Н. О $\mathfrak{H}_{\theta^\sigma}$-критических формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Международная конференция «Мальцевские чтения»: тез. докл., Новосибирск: 16–20 ноября 2020 г. – Новосибирск: НГУ, 2020. – С. 164.

44-А. Сафонова, И.Н. О решетке всех n-кратно σ-локальных формаций / И.Н. Сафонова // XV Международная школа-конференция по теории групп,

посвященная 95-летию со дня рождения М.И. Каргаполова: тез. докл., Екатеринбург, 21–28 июля 2024 г. – Екатеринбург: Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 2024. – С. 83–84.

Препринты

45-А. Aivazidis, S. A generalization of Schenkman's theorem / S. Aivazidis, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Cornell University Library, arXiv: 2009.08145v1 [math.GR] 17 Sep. 2020. – 9 p.

46-А. A G-covering subgroup system of a finite group for some classes of σ-soluble groups / A-M. Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Cornell University Library, arXiv: 2101.00247v1 [math.GR] 1 Jan. 2021. – 8 p.

47-А. Safonova, I.N. On τ-closed n-multiply σ-local formations of finite groups / I.N. Safonova // Cornell University Library, arXiv: 2105.00430 [math.GR] 2 May 2021. – 29 p.

48-А. Safonova, I.N. Finite groups in which generalized normality is a transitive relation / I.N. Safonova, A.N. Skiba // Cornell University Library, arXiv: 2302.13250v1 [math.GR] 26 Feb. 2023. – 47 p.

РЭЗЮМЭ

Сафонава Іна Мікалаеўна

Праблемы тэорыі σ-уласцівасцяў канечных груп і іх класаў

Ключавыя словы: канечная група, σ-нільпатэнтная і σ-вырашальная група, σ-поўная група, σ-субнармальная падгрупа, σ-перастановачная падгрупа, мадулярная падгрупа, група Шміта, рашотка падгруп, норма групы, фармацыя, рашоткавая фармацыя, абагульнена лакальная фармацыя, падгрупавы функтар, крытычная фармацыя, рашотка фармацый

Мэта працы: развіццё тэорыі σ-уласцівасцяў груп і іх класаў.

Метады даследавання: метады абстрактнай тэорыі груп, метады тэорыі класаў груп, метады агульнай тэорыі рашотак, метады тэорыі графаў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Распрацаваны арыфметычныя і геаметрычныя метады даследавання канечных груп і іх класаў, якія вызначаюцца разбіццямі σ мноства ўсіх простых лікаў. Абагульнены і развіты вынікі тэорыі абагульненых T-груп. У прыватнасці, вырашана праблема А.М. Скібы аб апісанні будовы груп з транзітыўным стаўленнем σ-перастановачнасці падгруп. Вырашана праблема А. Фрыджэрыо аб класіфікацыі груп, з транзітыўным стаўленнем мадулярнасці падгруп. Развіта тэорыя накрываючых сістэм падгруп. Атрыманы станоўчыя адказы на праблемы 19.87 і 19.88 “Коўраўскага сшытка”. Пабудавана тэорыя σ-дысперсіўных груп і σ-графаў Хоукса. Вырашана праблема Л.А. Шамяткова аб апісанні будовы дысперсіўных груп метадамі тэорыі графаў. Развіта тэорыя абагульненай субнармальнасці і абнармальнасці падгруп. Атрымана абагульненне тэарэмы Шэнкмана аб цэнтралізатары $\mathfrak{F}$-карадыкала фармацыйна субнармальнай падгрупы. Дадзена апісанне груп з абагульнена абнармальнымі і абагульнена субнармальнымі падгрупамі Шміта. Пабудавана тэорыя функтарна замкнутых σ-лакальных фармацый. У прыватнасці, устаноўлены асноўныя ўласцівасці рашоткі ўсіх функтарна замкнутых n-кратна σ-лакальных фармацый. Вырашана праблема Л.А. Шамяткова аб класіфікацыі крытычных σ-лакальных фармацый. Развіта тэорыя часткова лакальных крытычных фармацый.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Дысертацыя мае тэарэтычны характар. Распрацаваныя метады і атрыманыя вынікі могуць быць скарыстаны ў даследаваннях па тэорыі канечных груп і іх класаў. У прыватнасці, пры вывучэнні структуры груп з зададзенымі сістэмамі падгруп, алгебры абагульнена лакальных класаў груп, а таксама ў навучальным працэсе пры чытанні спецкурсаў для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцей, напісанні курсавых і дыпломных работ, дысертацый.

Галіна прымянення: сучасная тэорыя канечных груп і іх класаў.

РЕЗЮМЕ

Сафонова Инна Николаевна

Проблемы теории σ-свойств конечных групп и их классов

Ключевые слова: конечная группа, σ-нильпотентная и σ-разрешимая группа, σ-полная группа, σ-субнормальная подгруппа, σ-перестановочная подгруппа, модулярная подгруппа, группа Шмидта, решетка подгрупп, норма группы, формация, решеточная формация, обобщенно локальная формация, подгрупповой функтор, критическая формация, решетка формаций

Цель работы: развитие теории σ-свойств групп и их классов.

Методы исследования: методы абстрактной теории групп, методы теории классов групп, методы общей теории решеток, методы теории графов.

Полученные результаты и их новизна. Разработаны арифметические и геометрические методы исследования конечных групп и их классов, определяемые разбиениями σ множества всех простых чисел. Обобщены и развиты результаты теории обобщенных T-групп. В частности, решена проблема А.Н. Скибы об описании строения групп с транзитивным отношением σ-перестановочности подгрупп. Решена проблема А. Фриджерио о классификации групп, с транзитивным отношением модулярности подгрупп. Развита теория накрывающих систем подгрупп. Получены положительные ответы на проблемы 19.87 и 19.88 “Коуровской тетради”. Построена теория σ-дисперсивных групп и σ-графов Хоукса. Решена проблема Л.А. Шеметкова об описании строения дисперсивных групп методами теории графов. Развита теория обобщенной субнормальности и абнормальности подгрупп. Получено обобщение теоремы Шенкмана о централизаторе $\mathfrak{F}$-корадикала формационно субнормальной подгруппы. Дано описание групп с обобщенно абнормальными и обобщенно субнормальными подгруппами Шмидта. Построена теория функторно замкнутых σ-локальных формаций. В частности, установлены основные свойства решетки всех функторно замкнутых n-кратно σ-локальных формаций. Решена проблема Л.А. Шеметкова о классификации критических σ-локальных формаций. Развита теория частично локальных критических формаций.

Рекомендации по использованию. Диссертация имеет теоретический характер. Разработанные методы и полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и их классов. В частности, при изучении структуры групп с заданными системами подгрупп, алгебры обобщенно локальных классов групп, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ, диссертаций.

Область применения: современная теория конечных групп и их классов.

SUMMARY

Safonova Inna Nikolaevna

Problems of the theory of σ-properties of finite groups and their classes

Keywords: finite group, σ-nilpotent and σ-soluble group, σ-full group, σ-subnormal subgroup, σ-permutable subgroup, modular subgroup, Schmidt group, lattice of subgroups, group norm, formation, lattice formation, generalized local formation, subgroup functor, critical formation, lattice of formations

Research aim: development of the theory of σ-properties of groups and their classes.

Research methods: methods of abstract group theory, methods of class theory of groups, methods of general lattice theory, methods of graph theory.

Obtained results and their novelty. Arithmetic and geometric methods for studying finite groups and their classes, defined by partitions σ of the set of all prime numbers, have been developed. The results of the theory of generalized T-groups have been generalized and developed. In particular, A.N. Skiba's problem on describing the structure of groups with a transitive relation of σ-permutability of subgroups has been solved. A. Frigerio's problem on the classification of groups with a transitive relation of modularity of subgroups has been solved. The theory of covering systems of subgroups is developed. Positive answers are obtained to problems 19.87 and 19.88 of the "Kourovskaya Notebook". The theory of σ-dispersive groups and σ-Hawkes graphs is constructed. The problem of L.A. Shemetkov on describing the structure of dispersive groups by graph theory methods is solved. The theory of generalized subnormality and abnormality of subgroups is developed. A generalization of Shankman's theorem on the centralizer of the $\mathfrak{F}$-residual of a formationally subnormal subgroup is obtained. A description of groups with generalized abnormal and generalized subnormal Schmidt subgroups is given. The theory of functorially closed σ-local formations is constructed. In particular, the main properties of the lattice of all functorially closed n-multiple σ-local formations are established. The problem of L.A. Shemetkov on the classification of critical σ-local formations is solved. The theory of partially local critical formations is developed.

Recommendations for use. The dissertation has a theoretical character. The developed methods and obtained results can be used in research on the theory of finite groups and their classes. In particular, when studying the structure of groups with given systems of subgroups, algebra of generalized local classes of groups, as well as in the educational process when reading special courses for students of mathematical specialties, writing term papers and diploma papers, dissertations.

Application fieid: modern theory of finite groups and their classes.

Научное издание

САФОНОВА Инна Николаевна

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ σ-СВОЙСТВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ИХ КЛАССОВ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 11.04.2025. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,33. Уч.-изд. л. 2,54.
Тираж 60 экз. Заказ 244.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель