ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертационной работе
Закревской Виктории Сергеевны
«Конечные группы с обобщенным условием Оре,
определяемым заданной решеткой подгрупп»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Актуальность темы диссертации

Нормальные подгруппы и их обобщения широко используются при изучении свойств конечных групп. Исследования такого характера составляют содержательное направление современной алгебры, к которому относится рассматриваемая диссертация.

Одно из обобщений нормальности было предложено в 1939 году Оре в работе «Contributions to the theory of groups of finite order», где он рассмотрел приложения в группе G подгруппы H, для которой выполняется следующее: в G существует нормальная подгруппа T такая, что $G = HT$ и $H \cap T \trianglelefteq G$. Условию Оре удовлетворяет всякая подгруппа H с ядром $H_G = H \cap T$ и нормальным добавлением T в G. В случае $H \cap T \leq S \leq H$ для некоторой $S \trianglelefteq G$ подгруппа H была названа Вангом (1996 г.) c-нормальной. В исследованиях многих алгебраистов, например, Ванга (1996 г.), Баллестера-Болинше и Ванга (2000 г.), Вэй (2001 г.), С. Го и Шама (2003 г.), Рамадана, Еззата Мохамеда и Хелиела (2005 г.) системы выделенных c-нормальных подгрупп группы использовалась для доказательства разрешимости, сверхразрешимости, p-нильпотентности, p-сверхразрешимости группы, а также принадлежности группы заданной формации. В работах Баллестера-Болинше, Ванга и С. Го (2000 г.), Ванга, Вэй и Я. Ли (2002, 2004 гг.) установлена зависимость между $G \in \mathfrak{F}$ и некоторыми системами c-добавляемых подгрупп из $\mathfrak{F}$-корадикала группы для насыщенной формации $\mathfrak{F}$, содержащей все сверхразрешимые группы (c-добавляемая подгруппа группы – это такая подгруппа H, что $G = HT$ и $H \cap T \leq H_G$ для подгруппы T из G). В исследованиях Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы (2009 г.), В. Го и А.Н. Скибы (2009 г.), Асаада (2010 г.), Б. Ли (2011 г.), Я. Го и Айзекса (2015 г.) нашли приложения различные обобщенные условия Оре. Весьма результативным оказалось понятие слабо S-перестановочной подгруппы, введенное А.Н. Скибой (2007 г.). Рассмотрение им в условии Оре S-ядра $H \cap T = H_{sG}$ (H_{sG} – порождение всех содержащихся в H силовски перестановочных подгрупп) и использование того факта, что совокупность всех силовски перестановочных подгрупп группы образует подрешетку решетки всех подгрупп этой группы, указало возможности в обобщенных условиях Оре рассматривать принадлежащие другим подрешеткам и частичным подрешеткам группы подгруппы S. Ряд результатов в этом направлении был получен в работах А.Н. Скибы (2015, 2019 гг.), В.И. Мурашки (2018 г.), Ху, Хуанга и А.Н. Скибы (2019 г.), Лиу, В. Го, И.Н. Сафоновой и А.Н. Скибы (2022 г.).

Диссертация В.С. Закревской продолжает отмеченные выше исследования групп с обобщенным условием Оре, определяемым заданной решеткой подгрупп. Ее тема является актуальной.

Степень новизны результатов и научных положений, выносимых на защиту

Диссертация содержит следующие структурные части: перечень определений и условных обозначений, введение, общая характеристика работы, четыре главы с краткими выводами, заключение и библиографический список.

В общей характеристике работы содержится исторический обзор научных результатов, отмечены особенности данной диссертации. В первой главе дан анализ результатов, связанных с изучением групп с обобщенными условиями Оре, раскрыта актуальность темы диссертационной работы, приведены вспомогательные утверждения, необходимые для доказательств в других главах.

Основные результаты диссертации изложены в главах 2-4. В них используется и развивается разработанный А.Н. Скибой σ-метод исследования групп, базирующийся на разбиении множества всех простых чисел **P** на непересекающиеся подмножества, который позволил рассматривать и изучать обобщения таких известных понятий как примарные, нильпотентные, разрешимые, субнормальные, перестановочные и др. группы.

Во второй главе вводятся понятия частично σ-субнормальной, частично σ-перестановочной и $(\mathfrak{U},\sigma)$-вложенной подгрупп в группе, исследуются их свойства, которые применяются в последующих главах. Центральным результатом раздела 2.1 является теорема 2.1.15, устанавливающая σ-разрешимость группы G, у которой в каждой максимальной цепи длины 3 имеется хотя бы одна частично σ-субнормальная в G подгруппа. В качестве следствий она включает теоремы В. Го, А.Н. Скибы (2019 г.) и Н.М. Адарченко, А.Н. Скибы (2020 г.), если условие частично σ-субнормальности заменить на условие σ-субнормальности и почти σ-субнормальности соответственно. Значение теоремы 2.1.15 заключается в том, что при различных разбиениях σ из нее следуют новые признаки π-отделимости и π-разрешимости группы (теоремы 2.1.18 и 2.1.19 соответственно), а также известные признаки (Хупперт (1954 г.), Сперсер (1968 г.), Р. Шмидт (1969 г.)) разрешимости группы.

В разделе 2.2 существенно используется понятие полного холлова σ-множества $\mathcal{H}$, т.е. множества $\mathcal{H}$ подгрупп группы G, каждый неединичный элемент которого является холловой σ_i-подгруппой группы G для некоторого $i \in I$ и $\mathcal{H}$ содержит в точности одну холлову σ_i-подгруппу группы G для всех i таких, что $\sigma_i \in \sigma(G)$. Основные результаты раздела 2.2 – теоремы 2.2.6, 2.2.11 и 2.2.18. В первых двух рассматривается σ-полная группа силовского типа G. Для такой группы установлена σ-разрешимость при условии: каждая ненильпотентная максимальная подгруппа группы G является $(\mathfrak{U},\sigma)$-вложенной в G (теорема 2.2.6 (i)), что позволило доказать новый критерий разрешимости G (теорема 2.2.6 (ii)); а также найдена новая характеризация сверхразрешимости G – при частично σ-перестановочности каждой 2-максимальной подгруппы в G и наличии полного холлова σ-множества $\mathcal{H}$ со сверхразрешимыми элементами группа G сверхразрешима (теорема 2.2.11). Критерий мета-σ-нильпотентности группы G получен в теореме 2.2.18, где в п. (i) доказана эквивалентность таких условий, как (a) наличие полного холлова σ-множества $\mathcal{H}$ с $(\mathfrak{U},\sigma)$-вложенными в G элементами, (b) мета-σ-нильпотентность G, (c) σ-разрешимость G и c-нормальность в G всех холловых σ-подгрупп из G. В п. (ii) этой же теоремы доказана σ-нильпотентность G в случае, когда элементы полного холлова σ-множества $\mathcal{H}$ частично σ-перестановочны в G.

В разделе 2.3 установлено, что группа G σ-разрешима всякий раз, как в каждой максимальной цепи длины 3 группы G хотя бы одна из подгрупп является либо субмодулярной, либо слабо σ-перестановочной в G.

Из отмеченных теорем в качестве следствий вытекают соответствующие результаты Р. Шмидта (1969 г.), Агравала (1976 г.), Циммерманн (1989 г.), Ванга (1996 г.), Ч. Чжанга, Ч. Ву и В. Го (2017 г.), Ксианбао (2019 г.). Также при различных разбиениях σ, например, при $\sigma=\sigma^{\pi}=\{\pi, \pi'\}$, $\sigma=\sigma^{1\pi}= \{\{p_1\}, \{p_2\},\ldots, \{p_n\}, \pi'\}$ получаются новые критерии мета-π-разложимости (теорема 2.2.21) и мета-π-специальности (теорема 2.2.23) группы.

В третьей главе вводится понятие $u\vee sp$-вложенной подгруппы группы (т.е. такой подгруппы H группы G, что $G = HK$, $H_G \le S \le H \cap K$ и индекс $|H \cap K : S|$ является p'-числом, p – простое число, для некоторой субнормальной подгруппа K и частично S-перестановочной подгруппы S в G), которое является новым обобщенным условием Оре для подгрупп, и исследуется его связь со свойствами всей группы. В разделе 3.1 приведен пример 3.1.4, показывающий, что $u\vee sp$-вложенными подгруппами являются c-нормальные, слабо c-нормальные, c_p-нормальные, слабо S_p-перестановочные подгруппы. Центральным результатом этого раздела является теорема 3.1.18, в которой доказано, что необходимое и достаточное условие p-разрешимости группы G – это $u\vee sp$-вложенность в G каждой ее максимальной подгруппы. В разделе 3.2 установлена связь между $u\vee sp$-вложенностью n-максимальных подгрупп группы (n=2 или 3) и ее p-разрешимостью. Доказано, что если G – группа, $p \in \pi(G)$ и каждая 2-максимальная подгруппа G $u\vee sp$-вложена в G, то группа G является p-разрешимой (теорема 3.2.1); если $2 \in \pi(G)$ и каждая 3-максимальная подгруппа G $u\vee s2$-вложена в G, то G разрешима (теорема 3.2.2). Результаты третьей главы усиливают результаты многих алгебраистов, в частности, Ванга (1996 г.), Л. Чжу, В. Го и К.П. Шама (2002 г.), Л. Юбо и Я. Ли (2021 г.), Асаада, Рамадана (2023 г.).

В четвертой главе изучаются свойства групп с ограничениями на подгруппы Шмидта. Здесь группа Шмидта – это минимальная ненильпотентная группа. В разделе 4.1 подгруппа H подгруппы G называется $\mathfrak{U}_p$-нормальной в G, если каждый главный фактор группы G между H^G и H_G является либо циклическим, либо p'-группой, и устанавливаются ее свойства. Опираясь на результаты предыдущих глав, доказан основной результат раздела 4.1 – теорема 4.1.2. В ней установлено, что коммутант G' группы p-нильпотентен, если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G. Группы с субнормальными подгруппами Шмидта исследовались В.Н. Семенчуком (1981 г.), В.С. Монаховым, В.Н. Княгиной (2004 г.), с модулярными подгруппами Шмидта И.В. Близнецом В.М. Селькиным (2019 г.), с $\mathfrak{U}$-нормальными подгруппами Шмидта Дж. Хуангом, Б. Ху, А.Н. Скибой (2021 г.). Их соответствующие результаты в качестве следствий включаются в теорему 4.1.2.

Соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки

Из выше сказанного следует, что содержание рассматриваемой диссертации в полной мере соответствует заявленной специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел и отрасли «физико-математические науки».

Степень новизны результатов и научных положений, выносимых на защиту

Основные результаты и научные положения, выносимые на защиту, являются новыми. В диссертации нашел применение и получил дальнейшее развитие σ-метод при исследовании конечных групп с обобщенным условием Оре, определяемым заданной решеткой подгрупп. Придание более общего характера понятиям σ-субнормальной, σ-перестановочной, $\mathfrak{U}$-нормальной подгрупп в группе позволило найти новые признаки σ-разрешимости, мета-σ-нильпотентности, p-разрешимости, сверхразрешимости группы. Следствиями найденных закономерностей являются как известные результаты, так и новые.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Диссертация является логически цельной научно-исследовательской работой. Приведенные примеры показывают охват известных результатов о конечных группах с обобщенными условиями Оре. Все результаты обоснованы подробными доказательствами, которые проведены корректно, и их достоверность не вызывают сомнений.

Научная, практическая, экономическая и социальная значимость результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию

Диссертационные исследования и результаты имеют теоретический характер. Они могут найти применение при изучении свойств конечных групп, обладающих обобщенно субнормальными, обобщенно перестановочными подгруппами, а также в учебном процессе в университетах и педагогических институтах при чтении специальных математических курсов, при написании курсовых, дипломных, диссертационных работ.

Опубликованность результатов диссертации в научной печати

Выносимые на защиту основные положения и результаты опубликованы в одиннадцати научных работах, среди них девять выполнены без соавторов. Личный вклад соискателя по теме диссертации отражен в 6 научных статьях в журналах «Advances in Group Theory and Applications», «Asian-European Journal of Mathematics», «Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика», «Веснік ВДУ», «Проблемы физики, математики и техники» и 5 тезисах докладов на трех международных и одной республиканской научных конференциях, а также одной школы-конференции по теории групп. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК

Диссертация оформлена аккуратно в соответствии с требованиями ВАК Республики Беларусь. Имеются некоторые опечатки. Например, на с. 15 в 16-ой строке снизу вместо «группу простых чисел порядка pq, p и q.» нужно «группу порядка pq для простых чисел p и q.»; на с. 16 в 11-ой строке сверху вместо «такие, что G_{p1}, G_{p2}, …, G_{pr}» нужно «такие, что $G_{p1}G_{p2}\ldots G_{pr}$»; на с. 17 в 11-ой строке снизу вместо «$G/M_G \notin \mathfrak{F}$» нужно «$G/A_G \notin \mathfrak{F}$»; на с. 23 в 6-ой строке снизу вместо «нормальное дополнение» нужно «нормальное добавление»; на с. 24 в 5-ой и 9-ой строках сверху вместо «$\mathfrak{J}_p$» нужно «$\mathfrak{J}_p(G)$», а в 6-ой строке сверху вместо «$\mathfrak{J}^p$» нужно «$\mathfrak{J}^p(G)$»; на с. 52 в 12-ой строке снизу вместо «едиственной» нужно «единственной»; в Списке использованных источников в номерах 3, 15 используются разные сокращения: J. Algebra, Journal of Algebra; на с. 93 вместо «24 Ito, N. Uber» нужно «24 Ito, N. Über». Указанные замечания не снижают значимости полученных результатов и не влияют на общую положительную оценку диссертационного исследования.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени

Считаю, что диссертация В.С. Закревской «Конечные группы с обобщенным условием Оре, определяемым заданной решеткой подгрупп» соответствует заявленной специальности, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям ВАК Беларуси, и является завершенной квалификационной научной работой, а сама Виктория Сергеевна Закревская является квалифицированным специалистом в области теории конечных групп и заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел за: доказательство σ-разрешимости конечных групп, в которых каждая максимальная цепь подгрупп содержит частично σ-субнормальную подгруппу; нахождение новых характеризаций конечных сверхразрешимых групп; установление связи между $u\vee sp$-вложенностью подгрупп конечных групп и p-разрешимостью; нахождение новых критериев мета-σ-нильпотентности конечных групп в терминах $(\mathfrak{U},\sigma)$-вложенных подгрупп.

Официальный оппонент
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики
УО «Белорусский государственный
университет транспорта» Т.И. Васильева

27 апреля 2023 г.

Личную подпись Васильевой Т.И.
удостоверяю
Ведущий специалист по кадрам ОК Ю. Самойлова

АДДЗЕЛ
КАДРАЎ
Гомель