

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе Закревской Виктории Сергеевны
«Конечные группы с обобщенным условием Ore,
определяемым заданной решеткой подгрупп»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Важное место в теории конечных групп занимают исследования групп с заданными системами подгрупп, удовлетворяющих условию Ore и его обобщениям, определяемым заданной решеткой подгрупп. Это обусловлено, прежде всего, тем, что O. Ore (1939) было впервые предложено оригинальное развитие понятия нормальности подгрупп, которое состоит в следующем. Подгруппу H группы G называют удовлетворяющей условию Ore, если G имеет такие нормальные подгруппы T и S , что $G = HT$, $S \leq H$ и $H \cap T \leq S$. Понятно, что H удовлетворяет условию Ore в точности тогда, когда фактор H/H_G имеет нормальное дополнение в G/H_G . В последующем Вангом (1996) подгруппы, удовлетворяющие условию Ore, было предложено называть s -нормальными. Примечателен тот факт, что многие известные классы групп, важные для приложений (классы всех разрешимых, сверхразрешимых, нильпотентных, дисперсивных групп и др.) можно охарактеризовать в терминах условия Ore. Все это приводит к актуальному научному направлению исследований в теории групп – нахождению дальнейших приложений как самого условия Ore, так и введению, изучению и применению различных типов обобщенных условий Ore. Значительный прогресс в этом направлении исследований был достигнут благодаря основополагающей работе А. Н. Скибы (On weakly S -permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209), где было предложено заменить в условии Ore для подгруппы H его ядро H_G в группе G на S -ядро H_{SG} , являющееся порождением всех тех силовски перестановочных подгрупп G , которые содержатся в H . Это позволило автору обобщить с единой точки зрения многие известные доказанные результаты о s -нормальных и силовски перестановочных подгруппах.

Таким образом, актуальность темы диссертации и исследуемые в ней объекты не вызывают сомнений, поскольку диссертантом введены и найдены эффективные приложения новых обобщенных условий Ore для подгрупп, которые впервые базируются на понятиях \mathcal{U} -нормальной (\mathcal{U} – класс всех сверхразрешимых групп) и обобщенно субнормальной подгрупп.

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 108 наименований источников и 11 наименований публикаций автора. Полный объем диссертации 99 страниц.

Глава 1 диссертации содержит аналитический обзор литературы по теме

диссертации. В ее трех разделах четко обосновывается выбор тематики исследований и формируется ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основных результатов диссертации. Основные результаты диссертационной работы получены соискателем в главах 2, 3 и 4.

Глава 2 посвящена развитию σ -метода исследования конечных групп (σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел), предложенного в серии работ А. Н. Скибы (см., например, Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16). В разделе 1 главы 2 диссертант определяет понятие частично σ -субнормальной подгруппы и находит многие его приложения для установления признаков обобщенной разрешимости (в частности, признаков разрешимости) конечных групп. Главный результат здесь – теорема 2.1.15 о том, что *если в каждой максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 частично σ -субнормальна, то G σ -разрешима*. Заметим, что следствиями теоремы 2.1.15 являются результаты В. Го и А. Н. Скибы (2019), Н. М. Адарченко и А. Н. Скибы (2020), А. Е. Спенсера (1968), Б. Хупперта (1954), Р. Шмидта (1969). Кроме того, теорема 2.1.15 позволила установить новые признаки π -отделимости и π -разрешимости групп (теоремы 2.1.18 и 2.1.19).

Дальнейшее последовательное развитие σ -метода и его приложений в исследовании групп соискатель подтверждает результатами раздела 2 главы 2. В нем он вводит новые понятия частично σ -перестановочной подгруппы и (\mathcal{U}, σ) -вложенной подгруппы. Напомним, что группу G , по предложению А. Н. Скибы, называют σ -полной силовского типа, если каждая подгруппа E из G является \mathcal{D}_{σ_i} -группой для $\sigma_i \in \sigma(E)$. При условии, что группа G является σ -полной силовской, используя свойства (\mathcal{U}, σ) -вложенности и σ -перестановочности максимальных подгрупп G , диссертантом получено два интересных результата. Первый из них, теорема 2.2.6, дает признак σ -разрешимости и характеризует разрешимые группы в терминах (\mathcal{U}, σ) -вложенности максимальных подгрупп и свойства разрешимости элементов полного холлова σ -множества группы G . Следствиями указанного результата являются известные теоремы В. Ксианбао (2019) и Я. Ванга (1996). Наиболее важным, на наш взгляд, является второй результат, теорема 2.2.11 о том, что *если G – σ -полная группа силовского типа такая, что в ней каждая 2-максимальная подгруппа частично σ -перестановочна в G и при этом G обладает полным холловым σ -множеством, элементы которого сверхразрешимы, то группа G сверхразрешима*. Необходимо отметить, что следствием теоремы 2.2.11 являются классические результаты о сверхразрешимости группы Р. К. Агравала (1976) и Р. Шмидта (1969).

Значительный научный интерес представляет доказанная автором диссертации теорема 2.2.18, которая дает новую характеристику мета- σ -нильпотентных групп (в частности, мета- π -разложимых и мета- π -специальных групп (теоремы 2.2.21 и 2.2.23)) с применением свойств (\mathcal{U}, σ) -вложенности, частичной σ -перестановочности и s -нормальности элементов полного холлова

σ -множества группы. Следствием теоремы 2.2.18 является известная характеристика метанильпотентных групп Л. Миао, Х. Чена и В. Го (2001).

Заключительный раздел 3 главы 2 посвящен обобщению и развитию основного результата работы Циммерман (1989), что представлено диссертантом теоремой 2.3.2 о том, что *если в каждой максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3 , M_2 или M_1 является либо субмодулярной, либо слабо σ -перестановочной в G , то G σ -разрешима.*

В главе 3 соискателем введено следующее новое оригинальное обобщенное условие Ore, применение которого позволило доказать автору диссертации серию новых характеристик разрешимых и p -разрешимых групп. Подгруппу H группы G автор называет $u^{\vee sp}$ -вложенной, если в G существуют субнормальная подгруппа K и частично S -перестановочная подгруппа S такие, что $G = HK$, $H_G \leq S \leq H \cap K$ и индекс $|H \cap K : S| - p'$ -число. Наиболее значимые результаты диссертанта в главе 3 – теорема 3.1.18 и ее следствие 3.1.20 о том, что *группа G p -разрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа $u^{\vee sp}$ -вложена в G и G разрешима в точности тогда, когда все ее максимальные подгруппы $u^{\vee sp}$ -вложены в G .* В качестве следствий теоремы 3.1.18 важно отметить известные характеристики разрешимых и p -разрешимых групп, полученные ранее в работах Я. Ванга (1996), Л. Чжу, В. Го и К. П. Шама (2002), Л. Юбо и Я. Ли (2021), Асаада и Рамадана (2023).

Методы исследования главы 3 успешно реализуется в заключительной четвертой главе диссертации, которая посвящена изучению конечных групп с ограничениями на подгруппы Шмидта. Здесь автором диссертации было определено понятие \mathcal{U}_p -нормальной подгруппы как подгруппы H группы G такой, что каждый главный фактор G между H^G и H_G является либо циклическим, либо p' -группой. Основным результатом главы 4 – теорема 4.1.2 о том, что *если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо \mathcal{U}_p -нормальна в G , то производная подгруппа G' группы G является p -нильпотентной.* Заметим, что следствиями теоремы 4.1.2 являются результаты В. Н. Семенчука (1981), В. С. Монахова и В. Н. Княгиной (2004), И. В. Близнаца и В. М. Селькина (2019), Дж. Хуанга, Б. Ху и А. Н. Скибы (2021).

Данная диссертация является цельным законченным научным исследованием, содержание которого полностью соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел. Все результаты диссертации и научные положения, выносимые на защиту, являются новыми и строго научно обоснованы, что не вызывает сомнений в их достоверности. Более того, их достоверность подтверждает своевременная опубликованность в 11 научных публикациях, среди которых 6 статей в рецензируемых научных журналах, соответствующих п. 19 положения ВАК Республики Беларусь, в том числе статьи без соавторов в известных международных журналах «Advances in Group Theory and Applications» и «Asian-European Journal of Mathematics». Результаты диссертации апробированы также на 4 международных

конференциях, что подтверждает их опубликованность в материалах конференций.

Работа имеет теоретический характер. Результаты и методы диссертации могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории перестановочных и обобщенно перестановочных подгрупп, осуществляемых в научных центрах Республики Беларусь, России, Украины, США, Испании, Италии, Германии, Китая и др., а также при чтении специальных курсов по теории групп и написании курсовых, дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций. Отдельные результаты диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, что подтверждают 2 акта о внедрении. Все это указывает на практическую значимость результатов диссертации.

Оформление диссертации и автореферата соответствует требованиям ВАК Беларуси. Автореферат полно и адекватно отражает содержание диссертации и положений, выносимых на защиту.

Отметим некоторые недостатки в оформлении диссертации:

– стр. 17, 10-я строка сверху: следовало бы напомнить определение понятия «сильно сверхразрешимой группы»;

– стр. 18, 29-я строка сверху: вместо «числа.» должно быть «числа.»;

– стр. 22, 5-я строка сверху: вместо «А. Баллестера-Болиншес» должно быть «А. Баллестер-Болиншес»;

– стр. 22, 23-я строка сверху: вместо «с-добавляемость» должно быть «с-добавляемая»;

– стр. 28, 21,22-я строки сверху: некорректный перенос формулы;

– стр. 42, 7-я строка снизу: вместо «по 2.1.10(1)» должно быть «по лемме 2.1.10(1)»;

– стр. 80, 9-я строка снизу: вместо « $K_1 = G$ поскольку» должно быть « $K_1 = G$, поскольку»;

– стр. 92: источник 11 повторяется (источник 15).

Эти недостатки не влияют на достоверность полученных результатов и легко устранимы.

На основе анализа содержания диссертации, используемых методов доказательства, значимости научных результатов, их обоснованности и достоверности, можно заключить, что научная квалификация автора полностью соответствует научной степени кандидата физико-математических наук.

Считаю, что диссертация В.С. Закревской «Конечные группы с обобщенным условием Ore, определяемым заданной решеткой подгрупп» является квалификационной научной работой, а ее автор Закревская Виктория Сергеевна заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук за решение важной научной задачи теории конечных групп, развития и применения новых методов исследования конечных групп с обобщенным условием Ore, а именно за:

– доказательство σ -разрешимости конечных групп, в которых каждая максимальная цепь длины 3 содержит частично σ -субнормальную подгруппу;

- нахождение новых характеристик конечных сверхразрешимых групп;
- доказательство новых критериев мета- σ -нильпотентности конечных групп;
- описание связи между $uvsp$ -вложенностью подгрупп конечной группы и её p -разрешимостью.

Официальный оппонент
профессор кафедры математики
учреждения образования
«Витебский государственный университет
имени П.М. Машерова»,
доктор физико-математических наук,
профессор



Н.Т. Воробьев



Подпись удостоверяю
начальник отдела кадров

Е.П. Соловьёва

26.04.2023