



УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор

учреждения образования

«Брестский государственный

университет имени А.С. Пушкина»

\_\_\_\_\_ Марзан С.А.

27 апреля 2023 г.

## ОТЗЫВ ОППОНИРУЮЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

на диссертацию Закревской Виктории Сергеевны  
«Конечные группы с обобщенным условием Ore,  
определяемым заданной решеткой подгрупп»,  
представленную на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

**Соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки со ссылкой на область исследования паспорта соответствующей специальности, утвержденного ВАК**

Диссертационная работа В.С. Закревской посвящена изучению конечных групп с заданными системами обобщенно перестановочных и обобщенно субнормальных подгрупп. В работе рассмотрены новые системы подгрупп (частично  $\sigma$ -субнормальные и частично  $\sigma$ -перестановочные подгруппы), формирующие частичные подрешетки решетки всех подгрупп группы, что позволило получить новые обобщенные условия Ore ( $(\mathcal{U}, \sigma)$ -вложенность и  $uVsp$ -вложенность) и изучить их влияние на строение группы.

Содержание диссертационной работы В.С. Закревской «Конечные группы с обобщенным условием Ore, определяемым заданной решеткой подгрупп» соответствует отрасли «физико-математические науки» и паспорту специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (область исследования – теории алгебраических структур).

**Научный вклад соискателя в решение научной задачи с оценкой его значимости**

Изучение строения групп по системам подгрупп, обладающих свойствами подобными нормальным подгруппам, является одним из перспективных направлений исследований в теории групп. Развитие теории групп привело к появлению многих естественных обобщений свойства нормальности. Одними из таких обобщений являются субнор-

мальность,  $\mathbb{P}$ -субнормальность,  $\sigma$ -субнормальность, квазинормальность,  $S$ -перестановочность,  $\sigma$ -перестановочность, модулярность и др.

Результаты рассматриваемой работы базируются на уже ставшими классическими понятии  $s$ -нормальности (Я. Ванг, 1996) и более широком понятии подгруппы, удовлетворяющей условию Ore (В. Го и А.Н. Скиба, 2015): подгруппа  $H$  группы  $G$  удовлетворяет *условию Ore*, если  $G$  имеет такие нормальные подгруппы  $T$  и  $K$ , что  $G = HT$ ,  $K \leq H$  и  $H \cap T \leq K$ .

Работы Я. Ванга (1996), А. Баллестера-Болинше, Я. Ванга и Я. Го (2000), А.Н. Скибы (2007) показали эффективность использования систем  $s$ -нормальных подгрупп и подгрупп, удовлетворяющих условию Ore, при изучении классов всех разрешимых, сверхразрешимых, нильпотентных и метанильпотентных групп, а также их  $\sigma$ -аналогов. Это привело к естественному развитию данной тематики. Так, накладывая на подгруппу  $K$  условия  $S$ -перестановочности,  $\sigma$ -перестановочности, модулярности и др., были получены такие обобщенные условия Ore, как слабая  $S$ -перестановочность,  $m$ - $\sigma$ -перестановочность, слабая  $\sigma$ -перестановочность и др.

Используя методы работ А.Н. Скибы, В.Го, Я. Ванга, А. Баллестера-Болинше, а также классические методы теории решеток, классов групп и  $\sigma$ -теории, в диссертационной работе были доказаны теоремы о  $\sigma$ -разрешимости конечных групп в следующих случаях: каждая максимальная цепь длины 3 содержит частично  $\sigma$ -субнормальную подгруппу; каждая нильпотентная максимальная подгруппа группы  $G$  является  $(\mathcal{U}, \sigma)$ -вложенной. Найдены достаточные условия сверхразрешимости конечных групп с частично  $\sigma$ -перестановочными 2-максимальными подгруппами. Получены новые критерии мета- $\sigma$ -нильпотентности, мета- $\pi$ -разложимости и мета- $\pi$ -специальности конечных групп. Установлено наличие связи между  $u\forall sp$ -вложенностью подгрупп группы и ее  $p$ -разрешимостью.

Таким образом, разработанная теория  $(\mathcal{U}, \sigma)$ -вложенных и  $u\forall sp$ -вложенных подгрупп позволила доказать теоремы, обобщающие и усиливающие хорошо известные в данном направлении классические результаты Б. Хупперта (1954), А. Спенсера (1968), Р. Шмидта (1969), Р. Агравалья (1976), Я. Ванга (1996), а также целый ряд современных результатов В.С. Монахова и В.Н. Княгиной (2004), Ч. Чжанг, Ч. Ву и В. Го (2017), В. Ксианбао (2019), В. Го и А.Н. Скибы (2019), Л. Юбо и Я. Ли (2021), М. Асаада и М. Рамадана (2023).

Научный вклад соискателя, значимость его результатов также подтверждается их опубликованностью в 11 научных работах: 6 статей в ведущих рецензируемых научных журналах, соответствующих пункту 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (среди которых научные журналы, входящие в базу данных Scopus: «Advances in Group Theory and Applications», «Asian-European Journal of Mathematics», «Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика»), 3 статьи в сборниках материалов на-

учных конференций и 2 тезиса докладов.

Диссертация прошла апробацию на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, республиканских научных конференциях, а также на международных научных конференциях: XIII школа-конференция по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова (Екатеринбург, 3–7 августа 2020 г.) и «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, 22–25 ноября 2021 г.).

Результаты диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей в Брестском, Гомельском и Витебском государственных университетах, в Белорусском государственном университете. Отдельные результаты диссертации могут найти применения в исследованиях по теории конечных групп, в том числе при написании курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

**Конкретные научные результаты (с указанием их новизны и практической значимости), за которые соискателю может быть присуждена искомая ученая степень**

Диссертация В.С. Закревской «Конечные группы с обобщенным условием Ore, определяемым заданной решеткой подгрупп» является квалификационной научной работой, содержание которой соответствует специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел. Закревская Виктория Сергеевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук за:

- установление  $\sigma$ -разрешимости конечных групп, в которых каждая максимальная цепь длины 3 содержит частично  $\sigma$ -субнормальную подгруппу;
- достаточные условия сверхразрешимости конечных групп с частично  $\sigma$ -перестановочными 2-максимальными подгруппами;
- признаки  $\sigma$ -разрешимости конечных групп, у которых некоторые максимальные подгруппы являются  $(\mathcal{U}, \sigma)$ -вложенными;
- установление связи между  $u\mathcal{V}sp$ -вложенностью подгрупп конечной группы и ее  $p$ -разрешимостью;
- новые критерии мета- $\sigma$ -нильпотентности конечных групп.

Все содержащиеся в диссертации результаты, в том числе, выносимые на защиту, являются новыми и впервые получены соискателем. Исследования, проведенные Закревской С.В., являются актуальными, представляют несомненный интерес и делают важный вклад в развитие теории обобщенно субнормальных и обобщенно перестановочных подгрупп.

Отдельные результаты диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», что подтверждается актами о внедрении от 20.01.2021 и 16.12.2021.

## Замечания по диссертации

Диссертация оформлена в соответствии со всеми требованиями, предъявляемыми ВАК Республики Беларусь к диссертационным работам. Стиль изложения материала логически продуман, что способствует целостному восприятию проведенного автором исследования. Все утверждения (теоремы, леммы, следствия), сформулированные в диссертации, приведены с полными развернутыми доказательствами. Рассуждения, опирающиеся на известные теоремы и факты теории конечных групп и их классов, имеют точные ссылки на литературу, в которой они приведены с доказательствами. Перечисленные факты гарантируют достоверность и полную обоснованность всех результатов диссертационной работы.

Диссертация содержит небольшие неточности и опiski:

1) в диссертации одновременно используются несколько понятий или обозначений, отражающих один и тот же объект или свойство объекта. Например,

— по тексту диссертации используется понятие производной подгруппы  $G'$  группы  $G$ , однако в перечне условных обозначений через  $G'$  обозначен коммутант группы  $G$ ;

— по тексту диссертации для подгруппы Фраттини используется общепринятое обозначение  $\Phi(G)$ , однако на странице 15 подгруппа Фраттини группы  $G$  обозначена через  $\phi(G)$ ;

по тексту диссертации используется понятие дисперсивной группы, однако на странице 16 фигурирует понятие силовой башни;

2) в оглавлении в названии раздела 2.3 вместо «Цимерман» следует писать «Циммерманн»;

3) в тексте диссертации (стр. 6, 22, 63) используются два различных написания фамилии: «Балдистер-Болинчес» и «Баллестер-Болиншес»;

4) на с. 12 во втором абзаце вместо  $H_G/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$  следует писать  $H^G/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$ ;

5) в теореме 1.1.13 условие (i) стоит кратко записать:  $G$  дисперсивна по Оре;

6) на с. 16 в первом абзаце вместо фразы «правильную нетривиальную submodule-ную подгруппу» следует писать «собственную нетривиальную submodule-ную подгруппу»;

7) на с. 23 в определении  $c_p$ -нормальной подгруппы вместо « $H$  имеет нормальное дополнение» следует писать « $H$  имеет нормальное добавление»;

8) на с. 27 в конце второго абзаца вместо « $\phi$ -диперсной» следует писать « $\phi$ -дисперсивной»;

9) на с. 64 в первом снизу абзаце вместо подгруппы  $M$  следует писать подгруппу  $H$ ;

10) в списке использованных источников следует убрать кавычки в источниках 41, 54, 102.

Указанные недочеты носят технический характер и являются легко

устраняемыми. Они не влияют на результаты и не снижают общего положительного впечатления о диссертации.

**Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени, на которую он претендует**

На основании проведенной экспертизы содержания диссертации, используемых методов исследования, опубликованности результатов диссертационной работы в рецензируемых научных журналах и их апробации можно сделать вывод о том, что научная квалификация соискателя В.С. Закревской соответствует ученой степени кандидата физико-математических наук.

В.С. Закревская выступила на собрании с докладом и дала исчерпывающие ответы на заданные вопросы.

Отзыв о диссертации В.С. Закревской «Конечные группы с обобщенным условием Оре, определяемым заданной решеткой подгрупп» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел составлен на основании анализа содержания диссертации и устного доклада соискателя, обсужден на расширенном научном собрании кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования (протокол № 14 от 27.04.2023 г.), организованном в соответствии с приказом ректора учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина» от 19.04.2023 г. № 288.

В работе расширенного собрания приняли участие 7 человек, включая 1 доктора физико-математических наук (А.А. Трофимук) и 6 кандидатов физико-математических наук (Ал.Н. Сендер, Д.В. Грицук, Е.В. Зубей, И.Л. Сохор, З.Н. Серая, О.В. Матгысик).

Отзыв принят открытым голосованием: «за» 7; «против» нет; «воздержались» — нет.


Председатель расширенного научного собрания  
заведующий кафедрой алгебры, геометрии и  
математического моделирования,  
кандидат физико-математических наук, доцент

 Ал.Н. Сендер

Эксперт оппонировавшей организации  
профессор кафедры алгебры, геометрии и  
математического моделирования,  
доктор физико-математических наук, доцент

 А.А. Трофимук

Секретарь расширенного научного собрания  
доцент кафедры алгебры, геометрии и  
математического моделирования,  
кандидат физико-математических наук, доцент

 Е.В. Зубей