УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

Объект авторского права
УДК 512.542

**ЗАКРЕВСКАЯ
Виктория Сергеевна**

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОБОБЩЕННЫМ УСЛОВИЕМ ОРЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫМ ЗАДАННОЙ РЕШЕТКОЙ ПОДГРУПП

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2023

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Научный руководитель:	**Скиба Александр Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Официальные оппоненты:	**Воробьев Николай Тимофеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова»;
	Васильева Татьяна Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика» учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Оппонирующая организация — учреждение образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина».

Защита состоится 5 мая 2023 года в 14.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246028, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3-1. Телефон ученого секретаря: (+375 232) 51-03-07. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 5 апреля 2023 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д. А. Ходанович

ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы являются конечными, $\mathcal{L}(G)$ — решетка всех подгрупп группы G и $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих число n; $\sigma(n) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группа G называется *σ-полной*, если G имеет холлову σ_i-подгруппу для всех $i \in I$.

Подгруппа A группы G называется: *$\mathfrak{U}$-нормальной* [1] или *строго $\mathfrak{U}$-субнормальной* [2] в G, если каждый главный фактор группы G между A_G и A^G является циклическим; *σ-субнормальной* [3] в G, если в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G,$$

где либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является σ_k-группой для некоторого $k = k(i)$ для всех $i = 1, \ldots, t$; *σ-перестановочной* [3] в G, если группа G σ-полна и A перестановочна со всеми холловыми σ_i-подгруппами группы G для всех $i \in I$. В частности, подгруппа называется *S-перестановочной* или *силовски перестановочной* в G, если A перестановочна со всеми силовскими подгруппами P этой группы, т.е. $AP = PA$.

Будем говорить, следуя [4], что подгруппа H группы G удовлетворяет *условию Оре* [5], если G имеет такие нормальные подгруппы T и S, что $G = HT$, $S \leq H$ и $H \cap T \leq S$. Ясно, что H удовлетворяет условию Оре тогда и только тогда, когда H/H_G имеет нормальное дополнение в G/H_G. В работе Ванга [6] подгруппы, удовлетворяющие условию Оре, были названы *c-нормальными.*

Было доказано, что многие классы групп, важные для приложений (например, классы всех разрешимых, сверхразрешимых, нильпотентных, p-нильпотентных, метанильпотентных, дисперсивных в смысле Оре [5] групп), можно охарактеризовать в терминах условия Оре. Это послужило основным мотивом для дальнейшего изучения этого условия, а также для введения,

---

[1] Hu, B. Finite groups with only $\mathfrak{F}$-normal and $\mathfrak{F}$-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. — 2019. — Vol. 22, № 5. — P. 915-926.

[2] Skiba, A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A. N. Skiba // J. Algebra. — 2020. — Vol. 550. — P. 69–85.

[3] Skiba, A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. — 2015. — Vol. 436. — P. 1–16.

[4] Guo, W. Finite groups with generalized Ore supplement conditions for primary subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. — 2015. — Vol. 432. — P. 205–227.

[5] Ore, O. Contributions to the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. — 1939. — Vol. 5. — P. 431–460.

[6] Wang, Y. C-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Agebra. — 1996. — Vol. 180. — P. 954–965.

изучения и применения различных типов обобщенных условий Оре (см., в частности, главу 3 книги [7]).

Многие недавние результаты в этом направлении исследований фактически основаны на идеях статей Баллистера-Болинчес, Я. Ванга и Я. Го [8], А.Н. Скибы [9], Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [10] и статьи А.Н. Скибы и В. Го [4], в которых авторы ввели и рассмотрели приложения некоторых наиболее фундаментальных обобщений условия Оре. Но наиболее полезными оказались методы работы [9], на что указывает большое число ее цитирований в (более чем 400) публикациях многих других авторов и, в частности, в публикациях Я. Го и Айзекса [11], Асаада [12], Б. Ли [13], Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [10] и В. Го и А.Н. Скибы [14].

Главная идея работы А.Н. Скибы [9] состоит в замене в условии Оре для подгруппы H ее ядра H_G в группе G на S-ядро H_{sG}, являющееся порождением всех тех силовски перестановочных подгрупп группы G, которые содержатся в H. Это позволило автору обобщить с единой точки зрения многие доказанные независимо результаты о c-нормальных и силовски перестановочных подгруппах. Эфективность этой работы основывается на том замечательном результате Кегеля [15], что совокупность всех силовски перестановочных подгрупп группы формирует в ней подрешетку решетки всех подгрупп этой группы $\mathcal{L}(G)$. В дальнейшем, наряду с S-ядром H_{sG}, в обобщенных условиях Оре стали рассматриваться подгруппы S, принадлежащие некоторым другим подрешеткам и частичным подрешеткам решетки $\mathcal{L}(G)$. И это, в свою очередь, привело к необходимости нахождения и изучения новых подрешеток и частичных подрешеток в $\mathcal{L}(G)$.

В последние годы на этом пути были найдены и получили интересные приложения в теории групп с (обобщенным) условием Оре для подгрупп мно-

[7] Guo, W. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo. — Heidelberg-New York-Dordrecht-London: Springer, 2015. — 359 p.

[8] Ballester-Bolinches, A. c-Supplemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Y. Wang, X. Guo // Glasgow Math. J. — 2000. — Vol. 42. — P. 383–389.

[9] Skiba, A.N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. — 2007. — Vol. 315. — P. 192–209.

[10] Shemetkov, L.A. On the $\mathfrak{X}\Phi$-hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // J. Algebra. — 2009. — Vol. 322. — P. 2106–2117.

[11] Guo, Y. Conditions on p-subgroups implying p-nilpotence or p-supersolvability / Y. Guo, I.M. Isaacs // Arch. Math. — 2015. — Vol. 105. — P. 215–222.

[12] Asaad, M. Finite groups with certain subgroups of Sylow subgroups complemented / M. Asaad // J. Algebra. — 2010. — Vol. 323. — P. 1958–1965.

[13] Li, B. On Π-property and Π-normality of subgroups of finite groups / B. Li // J. Algebra. — 2011. — Vol. 334, № 1. — P. 321–337.

[14] Guo, W. Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. — 2009. — Vol. 321, № 10. — P. 2843–2860.

[15] Kegel, O.H. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. — 1962. — Vol. 78. — P. 205–221.

гие новые (частичные) подрешетки в $\mathcal{L}(G)$ (в этой связи см., в частности, работы [2, 3, 16, 17, 18, 19, 20]).

Таким образом, изучение групп с заданными системами подгрупп, удовлетворяющих (обобщенному) условию Оре, и (частичных) подрешеток решетки $\mathcal{L}(G)$ является интересной и вполне актуальной задачей. Целью диссертации является дальнейший анализ такой задачи.

Для достижения такой цели в диссертации введены следующие понятия.

Подгруппа H группы G называется *частично σ-субнормальной* (соответственно, *частично σ-перестановочной*) в G, если $H = \langle L, T \rangle$, где L является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой и T является σ-субнормальной (соответственно, *σ-перестановочной*) подгруппой в G.

Из результатов работ [2, 20] вытекает, что множество всех $\mathfrak{U}$-нормальных подгрупп группы образует подрешетку решетки всех ее подгрупп. Этот весьма нетривиальный факт лежит в основе применений таких подгрупп в данной диссертации и главной целью здесь является построение теорий слабо σ-перестановочных, $(\mathfrak{U},\sigma)$-вложенных и $u{\vee}sp$-вложенных подгрупп в смысле следующих определений.

Определение. Подгруппа H группы G называется:

(i) *слабо σ-перестановочной* в G, если в G имеются σ-перестановочная подгруппа S и σ-субнормальная подгруппа T такие, что $G = HT$ и $H \cap T \leq$ $\leq S \leq H$.

(ii) *$(\mathfrak{U},\sigma)$-вложенной* в G, если в G имеются частично σ-перестановочная подгруппа S и σ-субнормальная подгруппа T такие, что $G = HT$ и $H \cap T \leq$ $\leq S \leq H$.

(iii) *$u{\vee}sp$-вложенной подгруппой группы G*, если в G имеется субнормальная подгруппа K и частично S-перестановочная подгруппа S такие, что $G = HK$, $H_G \leq S \leq H \cap K$ и индекс $| H \cap K : S |$ является p'-числом (p — простое число).

Отметим, что частично σ-субнормальные и частично σ-перестановочные подгруппы формируют частичные подрешетки решетки $\mathcal{L}(G)$, а условия (i), (ii) и (iii) являются обобщенными условиями Оре.

---

[16] Murashka, V.I. On a generalization of the concept of S-permutable subgroup of a finite group / V.I. Murashka // Acta Math. Hung. — 2018. — Vol. 155, № 2. — P. 221–227.

[17] Hu, B. On strongly Π-permutable subgroups of a finite group / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // Сиб. матем. журн. — 2019. — Т. 60, № 4. — С. 922–931.

[18] Chi, Z. On two sublattices of the subgroup lattice of a finite group / Z. Chi, A.N. Skiba // J. Group Theory. — 2019. — Vol. 30. — P. 1035–1047.

[19] Liu, A-M. A generalization of subnormality / A-M. Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // Mediterr. J. Math. — 2022. — Vol. 19, № 3. — P. 826-838.

[20] Skiba, A. N. On some classes of sublattices of the subgroup lattice / A. N. Skiba // Журн. Белорус. гос. ун–та. Матем. Инф. — 2019. — Т. 3. — С. 35–47.

Отметим также, что ввиду теоремы 5.2.5 книги [21], модулярные элементы в смысле Куроша решетки $\mathcal{L}(G)$ являются $\mathfrak{U}$-нормальными подгруппами в G. Понятно также, что всякая $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа и всякая σ-субнормальная подгруппа являются частично σ-субнормальными в группе; всякая частично σ-перестановочная подгруппа является частично σ-субнормальной, а всякая σ-перестановочая подгруппа является частично σ-перестановочной.

Эти наблюдения лежат в основе приложений результатов, полученных в данной диссертации, и следствиями теорем, доказанных в диссертации, являются соответствующие известные результаты многих авторов и, в частности, соответствующие результаты Агравала, Н.М. Адарченко, М. Асаада, И.В. Близнеца, Я. Ванга, Ч. Ву, В. Го, В.Н. Княгиной, Н.С. Косенка, В. Ксианбао, Я. Ли, В.С. Монахова, М. Рамадана, В.Н. Рыжик, В.М. Селькина, В.Н. Семенчука, А.Н. Скибы, Спенсера, Б. Ху, Дж. Хуанг, Хупперта, Циммерманн, Ч. Чжанга, Л. Чжу, К.П. Шама, Р. Шмидта, Л. Юбо и др.

[21] Schmidt, R. Subgroup lattices of groups / R. Schmidt. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1994. — 572 p.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертация выполнена на кафедре алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» в период с 2019 по 2023 год в рамках следующих научных тем и программ:

— Разработка и применение функторных и локальных методов исследования конечных групп к решению общей проблемы классификации групп по свойствам их подгрупп, номер гос. регистрации — 20161015. Тема входила в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем»;

— Решеточные и арифметические методы исследования групп и мультиколец, обладающих композиционными рядами — 20211778. Тема входит в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 годы «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы».

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является описание конечных групп с обобщенным условием Оре, определяемым заданной решеткой подгрупп. Для достижения поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:

— доказать σ-разрешимость конечных групп, в которых каждая максимальная цепь длины 3 содержит частично σ-субнормальную подгруппу;

— получить новые критериии σ-разрешимости конечных групп;

— найти новые характеризации конечных сверхразрешимых групп;

— получить новые критерии мета-σ-нильпотентности конечных групп;

— доказать наличие связи между $u \vee sp$-вложенностью подгрупп конечной группы и ее p-разрешимостью.

Объектом исследования являются конечные группы с обобщенным условием Оре, определяемым заданной решеткой подгрупп. Предметом исследования является влияние такого условия на строение группы.

Научная новизна.

Все результаты диссертации являются новыми и впервые получены соискателем. Доказана σ-разрешимость конечных групп, в которых каждая максимальная цепь длины 3 содержит частично σ-субнормальную подгруппу. Получены новые критериии σ-разрешимости и мета-σ-нильпотентности.

Найдены новые характеризации конечных сверхразрешимых групп. Установлено наличие связи между $u{\vee}sp$-вложенностью подгрупп группы и ее p-разрешимостью.

Положения, выносимые на защиту

1. Теорема о σ-разрешимости конечных групп, все третьи максимальные подгруппы которых являются частично σ-субнормальными.

2. Новые характеризации конечных сверхразрешимых групп.

3. Критерий σ-разрешимости конечных групп.

4. Теорема о связи между $u{\vee}sp$-вложенностью подгрупп конечной группы и ее p-разрешимостью.

5. Новые критерии мета-σ-нильпотентности конечных групп.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Александра Николаевича Скибы. Научным руководителем были поставлены задачи и цель исследования. Работа [3] выполнена и опубликована совместно с кандидатами физико-математических наук, доцентами В. М. Селькиным и И. В. Близнецом, работа [6] выполнена и опубликована совместно с кандидатами физико-математических наук, доцентами В. М. Селькиным и Н. С. Косенком, результаты принадлежат авторам на паритетных условиях. Без соавторства выполнены работы [1, 2, 4, 5].

Апробация результатов диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертации апробированы на:

— Гомельском алгебраическом семинаре и на научном семинаре кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»;

— XXIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 23–25 марта 2020 г.);

— Международной XIII школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова (Екатеринбург, 3–7 августа 2020 г.);

— Юбилейной научно-практической конференции, посвященной 90-летию Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины (Гомель, 19–20 ноября 2020 г.);

— Международной научной конференции «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, 22–25 ноября 2021 г.);

— XXIV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 22–24 марта 2021 г.).

Отдельные результаты диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», что подтверждается актами о внедрении от 20.01.2021 и 16.12.2021.

Опубликованность результатов диссертации

По теме диссертационного исследования опубликованы 6 статей в рецензируемых научных журналах, соответствующих пункту 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, 3 статьи в сборниках материалов научных конференций и 2 тезиса докладов. Общий объем опубликованных материалов составляет 4,11 авторского листа, в том числе статьи в научных журналах — 3,9 авторского листа, материалы и тезисы докладов конференций — 0,21 авторского листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в количестве 108 наименований использованных источников и 11 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 99 страниц, из них 9 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Александру Николаевичу Скибе за постоянное внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Глава 1 содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации. Здесь также сформулирован ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основных результатов диссертации. Основными в диссертации являются главы 2, 3 и 4.

Глава 2 является базисной. Здесь развита техника и методы применения частично σ-субнормальных и частично σ-перестановочных подгрупп. В разделе 2.1 даются основные определения, примеры и исследуются наиболее важные свойства частично σ-субнормальных подгрупп.

Погруппа H группы G называется $\mathfrak{U}$*-нормальной* [1] в G, если каждый главный фактор группы G между H_G и H^G является циклическим.

Группа G называется: *σ-примарной* [3], если G — σ_i-группа (для некоторого i); *σ-разрешимой* [3], если каждый главный фактор группы G является σ-примарным; *σ-нильпотентной* [3], если G — прямое произведение σ-примарных групп.

Напомним, что подгруппа A группы G называется *частично σ-субнормальной* [1] в G, если $A = \langle L, T \rangle$, где L является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой, а T является σ-субнормальной подгруппой группы G.

Ясно, что все $\mathfrak{U}$-нормальные и все σ-субнормальные подгруппы частично σ-субнормальны.

Напомним также, что если

$$M_n < M_{n-1} < \ldots < M_1 < M_0 = G,$$

где M_i — максимальная подгруппа в M_{i-1} для всех $i = 1, \ldots, n$, то такая цепь называется *максимальной цепью группы G длины n* и M_n $(n > 0)$ является *n-максимальной подгруппой* группы G. Отметим, что 2-максимальные подгруппы называются также вторыми максимальными подгруппами.

Одним из главных результатов первого раздела главы 2 является следующая теорема.

Теорема 2.1.15 [1]. *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 частично σ-субнормальна в G, то G σ-разрешима.

Следствие 2.1.16 (В. Го, А.Н. Скиба [22]). *Если в каждой максимальной*

[22] Guo, W. Finite groups whose n-maximal subgroups are σ-subnormal / W. Guo, A. N. Skiba //

цепи

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G *длины 3 хотя бы одна из подгрупп* M_3, M_2 *или* M_1 *является* σ*-субнормальной в* G, *то* G σ*-разрешима.*

Напомним, что главный фактор H/K группы G называется *почти центральным* [23] в G, если $|H/K||G/C_G(H/K)|$ делит pq для некоторых простых чисел p и q; подгруппа H группы G *почти модулярна* [23] в G, если либо $H \trianglelefteq G$, либо $H_G \neq H^G$ и каждый главный фактор группы G между H_G и H^G почти централен в G.

Подгруппа H группы G называется *почти* σ*-субнормальной* [23] (соответственно *почти* σ*-перестановочной*) в G, если $H = \langle L, T\rangle$, где L является почти модулярной подгруппой и T является σ-субнормальной (соответственно σ-перестановочной) подгруппой в G.

Каждая почти σ-субнормальная подгруппа является частично σ-субнормальной. Поэтому получаем из теоремы 2.1.15 следующий известный результат.

Следствие 2.1.17 (Н.М. Адарченко, А.Н. Скиба [23]). *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G *длины 3 хотя бы одна из подгрупп* M_3, M_2 *или* M_1 *почти* σ*-субнормальна в* G, *то* G σ*-разрешима.*

На основе следующих определений мы получим еще несколько применений теоремы 2.1.15.

Подгруппа A группы G называется π,π'*-субнормальной* в G ($\pi \subseteq \mathbb{P}, \pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$) [24], если в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является π-группой, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является π'-группой для всех $i = 1, \ldots, t$.

Мы говорим, что подгруппа A группы G является *частично* π,π'*-субнормальной* в G, если $A = \langle L, T\rangle$, где L является $\mathfrak{U}$*-нормальной* подгруппой, а T является π,π'-субнормальной подгруппой группы G.

В случае, когда $\sigma^\pi = \{\pi, \pi'\}$ из теоремы 2.1.15 мы получаем следующий

Sci. China Math. — 2019. — Vol. 60, № 12. — P. 1355–1372.

[23] Adarchenko, N.M. Finite groups with generalized σ-subnormal and σ-permutable subgroups / N.M. Adarchenko, A.N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. — 2020. — № 1 (42). — С. 65–73.

[24] A Robinson description of finite PσT-groups / X.F. Zhang [et al.] // J. Algebra. — Представлено в журнал.

новый результат.

Теорема 2.1.18 [4]. *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 частично π,π'-субнормальна в G, то G π-отделима.

Подгруппа A группы G называется *1π-субнормальной* в G ($\pi \subseteq \mathbb{P}$) [24], если в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ является π'-группой для всех $i = 1, \ldots, t$.

Мы говорим, что подгруппа A группы G является *частично 1π-субнормальной* в G, если $A = \langle L, T\rangle$, где L является $\mathfrak{U}$-*нормальной* подгруппой, а T является 1π-субнормальной подгруппой группы G.

В случае, когда $\sigma = \sigma^{1\pi} = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \ldots, \{p_n\}, \pi'\}$, мы получаем из теоремы 2.1.15 следующий новый результат.

Теорема 2.1.19 [4]. *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 частично 1π-субнормальна в G, то G π-разрешима.

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$, из теоремы 2.1.19 вытекают следующие известные результаты.

Следствие 2.1.20 (Спенсер [25]). *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 является субнормальной в G, то G разрешима.

Следствие 2.1.21 (Хупперт [26]). *Если каждая 3-максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, то G разрешима.*

Напомним, что подгруппа M группы G называется *модулярной подгруппой* в G, если M является модулярным элементом (в смысле Куроша (см. с. 43

[25] Spencer, A.E. Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J. Math. — 1968. — Vol. 27, № 1. — P. 167–173.

[26] Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. — 1954. — Vol. 60. — P. 409–434.

в книге [21])) решетки $\mathcal{L}(G)$ всех подгрупп группы G, то есть выполняются следующие условия:

(i)

$$\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$$

для всех таких подгрупп X, Z из G, что $X \leq Z$;

(ii)

$$\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$$

для всех таких подгрупп Y, Z из G, что $M \leq Z$.

Как уже было отмечено выше, каждая модулярная подгруппа является $\mathfrak{U}$-нормальной, поэтому мы получаем из теоремы 2.1.19 также следующее

Следствие 2.1.23 (Шмидт [27]). *Если каждая 3-максимальная подгруппа группы G модулярна в G, то G разрешима.*

В разделе 2.2 исследуются группы, заданные системы подгрупп которых являются частично σ-перестановочными.

Напомним, что подгруппа H группы G называется:

(i) *частично σ-перестановочной* [2] в G, если в группе G имеются $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа A и σ-перестановочная подгруппа B такие, что $H = \langle A, B\rangle$;

(ii) *($\mathfrak{U}$,σ)-вложенной* [2] в G, если в группе G имеются частично σ-перестановочная подгруппа S и σ-субнормальная подгруппа T такие, что $G = HT$ и $H \cap T \leq S \leq H$.

На основе следующих примеров можно получить различные приложения введенных понятий.

Пример 2.2.2.

(i) Подгруппа H группы G называется *слабо σ-перестановочной* [28] или *слабо σ-квазинормальной* [29] в G, если существуют σ-субнормальная подгруппа T и σ-перестановочная подгруппа S группы G такие, что $G = HT$ и $H \cap T \leq S \leq H$. Каждая слабо σ-квазинормальная подгруппа является ($\mathfrak{U}$,σ)-вложенной в группу.

(ii) Подгруппа H группы G называется *слабо S-перестановочной* в G [9], если существуют S-перестановочная подгруппа S и субнормальная подгруппа T группы G такие, что $G = HT$ и $H \cap T \leq S \leq H$. Понятно, что каждая слабо S-перестановочная подгруппа является ($\mathfrak{U}$,σ)-вложенной для каждого

[27] Schmidt, R. Endliche Gruppen mit vielen modularen Untergruppen / R. Schmidt // Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg. — 1969. — Vol. 34, № 12. — P. 115–125.

[28] Zhang, C. On weakly σ-permutable subgroups of finite groups / C. Zhang, Z. Wu, W. Guo // Publ. Math. Debrecen. — 2017. — Vol. 91, № 3-4. — P. 489-502.

[29] Hu, B. On weakly σ-quasinormal subgroups of finite groups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. — 2018. — Vol. 92, № 1-2. — P. 201–216.

разбиения σ-множества $\mathbb{P}$.

(iii) Подгруппа H группы G называется *m-σ-перестановочной* в G [30], если существуют модулярная подгруппа A и σ-перестановочная подгруппа B группы G такие, что $H = \langle A, B\rangle$. Каждая модулярная подгруппа является $\mathfrak{U}$-нормальной в группе. Поэтому каждая m-σ-перестановочная подгруппа частично σ-перестановочна.

(iv) Подгруппа H группы G называется *слабо m-σ-перестановочной* в G [30], если существуют m-σ-перестановочная подгруппа S и σ-субнормальная подгруппа T группы G такие, что $G = HT$ и $H \cap T \leq S \leq H$. Ясно, что каждая слабо m-σ-перестановочная подгруппа является ($\mathfrak{U}$,σ)-вложенной.

(v) Подгруппа H группы G называется *c-нормальной* в G [6], если для некоторой нормальной подгруппы T группы G имеет место $HT = G$ и $H \cap$ $\cap$ $T \leq H_G$. Каждая c-нормальная подгруппа является ($\mathfrak{U}$,σ)-вложенной.

Напомним, что множество $\mathcal{H}$ подгрупп группы G называется *полным холловым σ-множеством* группы G, если каждый элемент $\neq 1$ из $\mathcal{H}$ является холловой σ_i-подгруппой группы G для некоторого $i \in I$ и $\mathcal{H}$ содержит в точности одну холлову σ_i-подгруппу группы G для всех i таких, что $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Напомним также, что группа G называется: *D_π-группой*, если G обладает холловой π-подгруппой E и каждая π-подгруппа группы G содержится в некоторой сопряженной с E подгруппе; *σ-полной группой силовского типа* [3], если каждая подгруппа E из G является D_{σ_i}-группой для каждого $\sigma_i \in \sigma(E)$.

Теорема 2.2.6 [2]. *Пусть G является σ-полной группой силовского типа.*

(i) *Если каждая ненильпотентная максимальная подгруппа группы G является ($\mathfrak{U}$,σ)-вложенной в G, то G является σ-разрешимой.*

(ii) *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G является ($\mathfrak{U}$,σ)-вложенной в G и G обладает полным холловым σ-множеством $\mathcal{H}$, элементы которого являются разрешимыми группами.*

Принимая во внимание пример 2.2.2(iv), мы получаем также из теоремы 2.2.6(i) следующий известный результат.

Следствие 2.2.7 (В. Ксианбао [30]). *Пусть G является σ-полной группой силовского типа. Если каждая ненильпотентная максимальная подгруппа группы G слабо m-σ-перестановочна в G, то G является σ-разрешимой.*

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, из теоремы 2.2.6(ii) вытекает следующий результат.

[30] Xianbiao, W. On weakly m-σ-permutable subgroups of finite groups / W. Xianbiao // Comm. Algebra. — 2019. — Vol. 47, № 3. — P. 1–12.

Следствие 2.2.8 (Я. Ванг [6]). *Если каждая максимальная подгруппа группы G является c-нормальной в G, то G является разрешимой.*

Следующая теорема обобщает хорошо известный результат Агравaля о сверхразрешимости групп с S-перестановочными 2-максимальными подгруппами.

Теорема 2.2.11 [2]. *Пусть G — σ-полная группа силовского типа. Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G частично σ-перестановочна в G и G обладает полным холловым σ-множеством $\mathcal{H}$, элементы которого являются сверхразрешимыми, тогда G является сверхразрешимой.*

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, мы получаем из теоремы 2.2.11 следующий известный результат.

Следствие 2.2.13 (см. Агравал [31] или теорему 6.5 в главе 1 книги [32]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G является S-перестановочной в G, тогда G является сверхразрешимой.*

Следствие 2.2.14 (Шмидт [27]). *Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G является модулярной в G, то G является сверхразрешимой.*

Напомним, что G называется *мета-σ-нильпотентной* [33], если G является расширением σ-нильпотентной группы при помощи σ-нильпотентной группы.

Следующая теорема дает новую характеризацию мета-σ-нильпотентных групп.

Теорема 2.2.18 [2]. (i) *Следующие условия эквивалентны:*

(a) *группа G обладает полным холловым σ-множеством $\mathcal{H}$, элементы которого являются $(\mathfrak{U}, \sigma)$-вложенными в G;*

(b) *группа G является мета-σ-нильпотентной;*

(c) *группа G является σ-разрешимой, и каждая холлова σ-подгруппа H группы G c-нормальна в G.*

(ii) *Если G обладает полным холловым σ-множеством $\mathcal{H}$, элементы которого частично σ-перестановочны в G, то производная подгруппа G' группы G является σ-нильпотентной.*

С учетом примера 2.2.2(i) из теоремы 2.2.18 вытекает следующий результат.

Следствие 2.2.19 (Ч. Чжанг, Ч. Ву, В. Го [28]). *Пусть G является σ-полной группой силовского типа. Если каждая холлова σ_i-подгруппа*

[31] Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 58, № 1. — P. 13–21.

[32] Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein (ed.), etc. — Passaic N.J.: Polygonal Publishing House, 1982. — 231 p.

[33] Skiba, A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. — 2016. —Vol. 4, № 3. — P. 281–309.

группы G слабо σ-перестановочна в G для всех σ_i, тогда G является σ-разрешимой.

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, мы получаем из теоремы 2.2.18 следующий известный результат.

Следствие 2.2.20 (см. теорему 3.49 раздела I книги [7]). *Группа G является метанильпотентной тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа группы G является c-нормальной в G.*

На основе следующих определений мы получим еще два важных применения теоремы 2.2.18.

Пусть теперь $\sigma^{\pi} = \{\pi, \pi'\}$. Тогда группа G является: *σ^{π}-нильпотентной* в том и только в том случае, когда она π-разложима, то есть $G = O_{\pi}(G) \times \times O_{\pi'}(G)$; *мета-$\pi$-разложимой*, если G является расширением π-разложимой группы при помощи π-разложимой группы.

Подгруппа A группы G является *σ^{π}-перестановочной* в том и только том случае, когда G имеет холлову π-подгруппу и холлову π'-подгруппу, и A перестановочна со всеми такими подгруппами группы G. В этом случае подгруппа A называется π, π'-перестановочной в G [24].

Кроме того, подгруппа H группы G является $(\mathfrak{U}, \sigma^{\pi})$-вложенной в том и только том случае, если в группе G имеются $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа A, π, π'-перестановочная подгруппа B и π, π'-субнормальная подгруппа T такие, что $G = HT$ и $H \cap T \leq \langle A, B \rangle \leq H$. В этом случае мы говорим, что подгруппа H $(\mathfrak{U}, \pi, \pi')$-вложена в G.

В случае, когда $\sigma^{\pi} = \{\pi, \pi'\}$, из теоремы 2.2.18 мы получаем следующие новые результаты.

Теорема 2.2.21. *Следующие условия эквивалентны:*

(a) *группа G имеет холловы π-подгруппу и π'-подгруппу, и все такие подгруппы являются $(\mathfrak{U}, \pi, \pi')$-вложенными в G;*

(b) *группа G является мета-π-разложимой;*

(c) *группа G является π-отделимой, и каждая холлова π-подгруппа и каждая холлова π'-подгруппа группы G являются c-нормальными в G.*

Следствие 2.2.22. *Группа G является мета-π-разложимой в том и только в том случае, когда она π-отделима, и все ее холловы π-подгруппы и π'-подгруппы являются c-нормальными в G.*

Пусть теперь $\sigma = \sigma^{1\pi} = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \ldots, \{p_n\}, \pi'\}$. Тогда группа G является: *$\sigma^{1\pi}$-нильпотентной* в том и только в том случае, когда она π-специальна [34,35], т.е. $G = O_{p_1}(G) \times \ldots O_{p_n}(G) \times O_{\pi'}(G)$; *мета-$\pi$-специальной,*

[34] Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ-soluble PσT-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. — 2018. — Vol. 495. — P. 114–129.

[35] Guo, W. On σ-supersoluble groups and one generalization of CLT-groups / W. Guo, C. Zhang, A.N. Skiba //

если G является расширением π-специальной группы при помощи π-специальной группы.

Подгруппа A группы G является $\sigma^{1\pi}$-*перестановочной* в том и только том случае, когда G имеет холлову π'-подгруппу, и A перестановочна со всеми холловыми π'-подгруппами и со всеми силовскими p-подгруппами группы G для всех $p \in \pi$. В этом случае подгруппа A называется 1π-*перестановочной* в G [24].

Кроме того, подгруппа H группы G является $(\mathfrak{U}, \sigma^{1\pi})$-вложенной в том и только том случае, если в группе G имеются $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа A, 1π-перестановочная подгруппа B и 1π-субнормальная подгруппа T такие, что $G = HT$ и $H \cap T \leq \langle A, B\rangle \leq H$. В этом случае мы говорим, что подгруппа H $(\mathfrak{U}, 1\pi)$-вложена в G.

В случае, когда $\sigma = \sigma^{1\pi} = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \dots, \{p_n\}, \pi'\}$, мы получаем из теоремы 2.2.18 следующие новые результаты.

Теорема 2.2.23. *Следующие условия эквивалентны:*

(a) *группа G имеет холлову π'-подгруппу, и все ее силовские p-подгруппы для всех $p \in \pi$ и холловы π'-подгруппы являются $(\mathfrak{U}, 1\pi)$-вложенными в G;*

(b) *группа G является мета-π-специальной;*

(c) *группа G является π-отделимой, и каждая силовская p-подгруппа для всех $p \in \pi$ и каждая холлова π'-подгруппа группы G являются c-нормальными в G.*

Следствие 2.2.24. *Группа G является мета-π-специальной в том и только в том случае, когда она π-отделима, и все ее силовские p-подгруппы для всех $p \in \pi$ и холловы π'-подгруппы являются c-нормальными в G.*

В разделе 2.3 дано обобщение одной известной теоремы Циммерманн.

Напомним, что подгруппа A группы G называется *субмодулярной* [36] в G, если в G существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots A_{t-1} \leq A_t = G$$

такая, что A_i является модулярной в A_{i+1} для всех $i = 1, \dots, t-1$.

Основным результатом раздела 2.3 является следующая теорема.

Теорема 2.3.2 [3]. *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 является либо

J. Algebra. — 2018. — Vol. 512. — P. 92–108.

[36] Zimmermann, I. Submodular subgroups in finite groups / I. Zimmermann // Math. Z. — 1989. — Vol. 202. — P. 545–557.

субмодулярной, либо слабо σ-перестановочной в G, то G σ-разрешима.

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, из теоремы 2.3.2 получаем следующие известные результаты.

Следствие 2.3.3 (Циммерманн [36]). *Если в каждой максимальной цепи*

$$M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$$

группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3, M_2 или M_1 является субмодулярной, то G разрешима.

Напомним, что подгруппа A группы G называется *частично S-перестановочной* [2] в G, если $A = \langle L, T\rangle$, где L является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой и T является S-перестановочной подгруппой группы G.

В главе 3 рассмотрено следующее новое обобщенное условие Оре для подгрупп.

Определение 3.1.3 [5]. *Будем говорить, что подгруппа H группы G является $u{\vee}sp$-вложенной подгруппой группы G, если в G имеется субнормальная подгруппа K и частично S-перестановочная подгруппа S такие, что*

$$G = HK, H_G \leq S \leq H \cap K$$

и индекс $\mid H \cap K : S \mid$ является p'-числом (p — простое число).

Следующие примеры позволят дать приложения этого понятия.

Пример 3.1.4. (1) Если G — p-разрешимая группа, то каждая ее максимальная подгруппа $u{\vee}sp$-вложена в G (см. теорему 3.1.18 ниже).

(2) Напомним, что подгруппа H группы G называется слабо c-нормальной [37] в G, если в G имеется такая субнормальная подгруппа T, что $G = HT$ и $H \cap T \leq H_G$. Каждая c-нормальная подгруппа и каждая слабо c-нормальная подгруппа являются $u{\vee}sp$-вложенными для всех простых чисел p.

(3) Подгруппа H группы G называется c_p-нормальной [38] в G, если в G имеется такая нормальная подгруппа T, что $G = HT$, $H_G \leq T$ и $|H \cap T : H_G|$ является p'-числом (p — простое число). Каждая c_p-нормальная в G подгруппа H является $u{\vee}sp$-вложеной в G.

(4) Напомним, что H называется *слабо S_p-перестановочной* [39] подгруппой группы G, если в G имеется субнормальная подгруппа T такая, что $G = HT$,

[37] Guo, W. Weakly c-normal subgroups of finite groups and their properties / W. Guo, K.P. Shum, L. Zhu // Comm. Algebra. — 2002. — Vol. 30, № 10. — P. 5505-5512.

[38] Lv, Y. On c_p-normal subgroups of finite groups / Y. Lv, Y. Li // Comm. Algebra. — 2021. — Vol. 49. — P. 1405–1414.

[39] Asaad, M. On weakly s_p-permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, M. Ramadan // Comm. Algebra. — 2023. — P. 1–9.

$H_{sG} \leq T$ и индекс $\mid H \cap T : H_{sG} \mid$ является p'-числом (p — простое число), где H_{sG} обозначает подгруппу группы H, порожденную всеми теми ее подгруппами, которые являются S-перестановочными в G. Каждая слабо S_p-перестановочная в G подгруппа H является $u \vee sp$-вложеной в G.

В работе [6] Вангом были введены следующие семейства подгрупп для группы G.

Определение 3.1.10. *Пусть G — группа, а p — простое число. Тогда определены*

$\mathfrak{I}_p(G) = \{M : M$ максимальна в G, $p \nmid |G : M|\}$.

$\mathfrak{I}^p(G) = \{M : M$ максимальна в G и $N_G(P) \leq M$ для некоторой силовской p-подгруппы P группы G $\}$.

Теорема 3.1.17 [5]. *Если каждый элемент $\mathfrak{I}^p(G)$ $u \vee sp$-вложен в G, то группа G является p-разрешимой.*

На основании теоремы 3.1.17 дана следующая новая характеризация p-разрешимых групп.

Теорема 3.1.18 [5]. *Группа G является p-разрешимой (p — простое число) тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа $u \vee sp$-вложена в G.*

Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Тогда нормальным индексом этой подгрупы называют (Дескинс [40]) порядок главного фактора K/M_G группы G. Заметим, что G/M_G — примитивная группа, и поэтому нормальный индекс подгруппы M однозначно определен ввиду (гл. A, теорема 15.2 в книге [41]). Такой нормальный индекс подгруппы M обозначается $\eta(G : M)$.

Замечание 3.1.19. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и пусть $\eta(G : M)$ — ее нормальный индекс в G. Пусть p — простое число. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если $\eta(G : M)$ — p'-число, то M $u \vee sp$-вложена в G.*

(2) *Если $\eta(G : M)$ — степень числа p, то M c-нормальна в G.*

Далее рассмотрены приложения теорем 3.1.17 и 3.1.18.

Ввиду примера 3.1.4(2) и замечания 3.1.19(2) из следствия 3.1.20 вытекают следующие известные результаты.

Следствие 3.1.21 (Я. Ванг [6]). *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа c-нормальна в G.*

Следствие 3.1.22 (Л. Чжу, В. Го, К.П. Шам [37]). *Группа G разрешима*

[40] Deskins, W.E. On maximal subgroups / W.E. Deskins // Proc. Sympos. Pure Math. — 1959. — Vol. 1. — P. 100–104.

[41] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. — 901 p.

тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G, чей нормальный индекс делится на p, слабо c-нормальна в G.

Теперь ввиду примера 3.1.4(3) и замечания 3.1.19 из теоремы 3.1.17 вытекают следующие результаты.

Следствие 3.1.24 (Л. Юбо, Я. Ли [38]). *Группа G является p-разрешимой тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа в G является c_p-нормальной в G.*

Следствие 3.1.25 (Асаад, Рамадан [39]). *Группа G является p-разрешимой тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа в G является слабо S_p-перестановочной в G.*

Если группа 2-разрешима, то по теореме Фейта-Томпсона о разрешимости групп нечетного порядка эта группа разрешима. И поэтому важным частным следствием теоремы 3.1.17 являются также следующее следствие.

Следствие 3.1.27 (Асаад, Рамадан [39]). *Пусть G — группа и $2 \in \pi(G)$. Если каждый элемент $\mathfrak{I}^2(G)$ слабо S_2-перестановочен в G, то G разрешима.*

В разделе 3.2 одним из первых доказан следующий результат.

Теорема 3.2.1 [5]. *Пусть G — группа и $p \in \pi(G)$. Если каждая 2-максимальная подгруппа G $u\vee sp$-вложена в G, то группа G является p-разрешимой.*

Ввиду примера 3.1.4 и замечания 3.1.19 из теоремы 3.2.1 вытекают следующие известные результаты.

Следствие 3.2.2 (Л. Юбо, Я. Ли [38]). *Пусть G — группа, а $p \in \pi(G)$. Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G c_p-нормальна в G, то G является p-разрешимой.*

Следствие 3.2.3 (Асаад, Рамадан [39]). *Пусть G — группа, а $p \in \pi(G)$. Если каждая 2-максимальная подгруппа группы G слабо S_p-перестановочна в G, то G является p-разрешимой.*

В заключение главы 3 был доказан следующий результат.

Теорема 3.2.4 [5]. *Пусть G — группа четного порядка. Если каждая 3-максимальная подгруппа группы G $u\vee s2$-вложена в G, то G разрешима.*

Ввиду примера 3.1.4 и замечания 3.1.19 из теоремы 3.2.4 вытекает следующий результат.

Следствие 3.2.5 (Асаад, Рамадан [39]). *Пусть G — группа четного порядка. Если каждая 3-максимальная подгруппа группы G слабо S_2-перестановочна в G, то G разрешима.*

В главе 4 рассмотрены конечные группы с ограничениями на подгруппы Шмидта.

Определение 4.1.1 [6]. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{U}_p$-нормаль-*

ной или *строго* $\mathfrak{U}_p$*-субнормальной* в G, если каждый главный фактор группы G между H^G и H_G является либо циклическим, либо p'-группой.

Напомним, что G называется *группой Шмидта*, если G не нильпотентна, но каждая собственная подгруппа группы G нильпотентна.

Методы главы 3 позволяют доказать в четвертой главе диссертации следующий результат.

Теорема 4.1.2 [6]. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G, то производная подгруппа G' группы G является p-нильпотентной.*

Следствие 4.1.3 (В.Н. Семенчук [42]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то $G/F(G)$ нильпотентна.*

Следствие 4.1.4 (В.С. Монахов, В.Н. Князина [43]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то производная подгруппа G' нильпотентна.*

Следствие 4.1.5 (И.В. Близнец, В.М. Селькин [44]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G, то производная подгруппа G' группы G нильпотентна.*

Следствие 4.1.6 (Дж. Хуанг, Б. Ху, А.Н. Скиба [45]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо $\mathfrak{U}$-нормальна, либо субнормальна в G, то производная подгруппа G' нильпотентна.*

[42] Семенчук, В.Н. Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп / В.Н. Семенчук // Подгрупповое строение конечных групп / В.Н. Семенчук. — Наука и Техника, Минск, 1981. — С. 138–149.

[43] Монахов, В.С. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Князина // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т. 45, № 6. — С. 1316–1322.

[44] Близнец, И.В. Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И.В. Близнец, В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. — 2019. — Т. 4, № 41. — С. 36–38.

[45] Хуанг, Дж. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Дж. Хуанг, Б. Ху, А.Н. Скиба // Сиб. матем. журн. — 2021. — Т. 62, № 1. — С. 201–220.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертационной работе построены теории слабо σ-перестановочных, $(\mathfrak{U},\sigma)$-вложенных и $u{\vee}sp$-вложенных подгрупп, позволившие обобщить и усилить многие известные результаты и, в частности, соответствующие результаты Хупперта (1954), Спенсера (1968), Шмидта (1969), Агравaля (1976), В.Н. Семенчука (1981), Циммерманн (1989), Я. Ванг (1996), Н.С. Косенка и В.Н. Рыжик (2001), В.С. Монахова и В.Н. Княгиной (2004), Ч. Чжанг, Ч. Ву и В. Го (2017), В. Го и А.Н. Скибы (2019), В. Ксианбао (2019), И.В. Близнеца и В.М. Селькина (2019), Н.М. Адарченко и А.Н. Скибы (2020), Л. Юбо и Я. Ли (2021), Дж. Хуанг, Б. Ху и А.Н. Скибы (2021), Л. Чжу, В. Го, К.П. Шама (2022), Асаада и Рамадана (2023) и других авторов.

Доказана σ-разрешимость конечных групп, в которых каждая максимальная цепь длины 3 содержит частично σ-субнормальную подгруппу [1]. Получены новые критерии σ-разрешимости конечных групп [1,2,3,9,10]. Доказана π-отделимость конечных групп, в которых каждая максимальная цепь длины 3 содержит частично π, π'-субнормальную подгруппу [4,8]. Найдены новые характеризации конечных сверхразрешимых групп [2]. Получены новые критерии мета-σ-нильпотентности конечных групп [2,11]. Доказано наличие связи между $u{\vee}sp$-вложенностью подруп конечной группы и ее p-разрешимостью [5,7].

Доказано, что если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G, то производная подгруппа G' группы G является p-нильпотентной [6].

Дано обобщение теоремы Циммерманн о субмодулярных подгруппах конечных групп [3].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в современной теории конечных групп и их классов при исследовании строения групп по свойствам их обобщенно субнормальных и обобщенно перестановочных подгрупп.

Материалы диссертации будут также полезны при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей. Практическая значимость результатов диссертации подтверждена их применением в учебном процессе учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», акты о внедрении от 20.01.2021 и 16.12.2021.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных журналах

1. Zakrevskaya, V.S. Finite groups with partially σ-subnormal subgroups in short maximal chains / V.S. Zakrevskaya // Advances in Group Theory and Applications. — 2021. — Vol. 12. — P. 91–106.

2. Zakrevskaya, V.S. Finite groups with given systems of generalized σ-permutable subgroups / V.S. Zakrevskaya // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2021. — Т. 3. — С. 25–33.

3. Селькин, В.М. Критерий σ-разрешимости конечной группы / В.М. Селькин, И.В. Близнец, В.С. Закревская // Проблемы физики, математики и техники. — 2021. — Т. 2, № 47. — С. 84–89.

4. Zakrevskaya, V.S. Finite groups with generalized subnormal and generalized permutable subgroups / V.S. Zakrevskaya // Asian-European Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 15, № 1. — 2250016 (11 pages).

5. Закревская, В.С. Конечные группы с $\mathrm{u}\vee\mathrm{sp}$-вложенными подгруппами / В.С. Закревская // Веснік ВДУ. — 2022. — Т. 3, № 116. — Р. 11–16.

6. Селькин, В.М. Конечные группы с ограничениями на подгруппы Шмидта / В.М. Селькин, Н.С. Косенок, В.С. Закревская // Проблемы физики, математики и техники. — 2022. — Т. 1, № 50. — С. 84–88.

Материалы конференций

7. Закревская, В.С. О слабо $u\vee sp$-вложенных подгруппах конечных групп / В.С. Закревская // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XXIV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 22–24 марта 2021 г.: в 3 ч. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: С.П. Жогаль (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2021. — Ч. 3. — С. 30.

8. Закревская, В.С. Finite groups with partially π-subnormal subgroups / В.С. Закревская // Международная юбилейная научно-практическая конференция, посвященная 90-летию Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины: материалы, Гомель, 19–20 нояб. 2020 г.: в 3 ч. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: С.А. Хахомов (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2020. — Ч. 3. — С. 24.

9. Закревская, В.С. Finite groups with given systems of generalized σ-permutable subgroups / В.С. Закревская // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Международной научной конференции, Минск, 22–25 нояб. 2021 г.: в 2 ч. / Национальная академия наук Беларуси, Институт математики, Белорусский государственный университет; сост. В.В. Лепин. — Минск: Беларуская навука, 2021. — Ч. 1. — С. 128.

Тезисы докладов

10. Закревская, В.С. Finite groups with partially σ-subnormal and σ-permutable subgroups / В.С. Закревская // Теория групп и ее приложения: XIII школа-конференция по теории групп, посвященная 85-летию В.А. Белоногова, Екатеринбург, 3–7 августа 2020 г. : тез. докл. / Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УОРАН. — Екатеринбург, 2020. — С. 131–132.

11. Закревская, В.С. Criteria of the meta-σ-nilpotence of a finite group / В.С. Закревская // Международная алгебраическая конференция, посвященная 90-летию со дня рождения А.И.Старостина, Екатеринбург, 4–9 октября 2021 г.: тез. докл. / Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УОРАН. — Екатеринбург, 2021. — С. 111–112.

РЭЗЮМЭ

Закрэўская Вікторыя Сяргееўна

Канечныя групы з абагульненай умовай Оре, вызначаемай зададзенай рашоткай падгруп

Ключавыя словы: канечная група, слаба σ-перастановачная падгрупа, $(\mathfrak{U},\sigma)$-укладзеная падгрупа, $u{\vee}sp$-укладзеная падгрупа, σ-разрашымая група, рашотка падгруп, максімальная падгрупа, мета-σ-нільпатэнтная група.

Мэта працы: даследаванне будовы канечных груп з абагульненай умовай Орэ, вызначаемай зададзенай рашоткай падгруп.

Метады даследавання: метады абстрактнай тэорыі груп і метады тэорыі рашотак, метады тэорыі класаў груп, метады тэорыі σ-уласцівасцяў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыйнай рабоце пабудаваны тэорыі слаба σ-перастановочных, $(\mathfrak{U},\sigma)$-укладзеных і $u{\vee}sp$-укладзеных падгруп, якія дазволілі абагульніць і ўзмацніць многія вядомыя вынікі і, у прыватнасці, адпаведныя вынікі Аграваля, М.М. Адарчанка, Асаада, І.В. Блізняца, Я. Ванга, Ч. Ву, В. Го, М.С. Касенка, В. Ксіанбао, Я. Лі, В.С. Манахава, В.М. Рыжык, В.М. Селькіна, В.М. Семянчука, А.М. Скібы, Спенсера, Б. Ху, Дж. Хуанг, Хуперта, Цымерман, Ч. Чжанга, Л. Чжу, К.П. Шама, Р. Шміта, Л. Юбо і інш. Даказана σ-разрашымасць канечных груп, у якіх кожны максімальны ланцуг даўжыні 3 утрымлівае часткова σ-субнармальную падгрупу. Атрыманы новыя крытэрыі σ-разрашымасці канечных груп. Знойдзены новыя характэрызацыі канечных сверхразрашымых груп. Атрыманы новыя крытэрыі мета-σ-нільпатэнтнасці канечных груп. Даказана наяўнасць сувязі паміж $u{\vee}sp$-укладзенасцю падгруп канечнай групы і яе p-разрашымасцю. Дадзена абагульненне тэарэмы Цімерман аб субмадулярных падгрупах канечных груп.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Дысертацыйная работа мае тэарэтычны характар. Атрыманыя ў дысертацыі вынікі могуць быць скарыстаны ў даследаваннях па тэорыі канечных груп, у прыватнасці, у далейшых даследаваннях структуры груп з зададзенымі сістэмамі субнармальных, перастановачных, абагульнена перастановачных і абагульнена субнармальных падгруп, а таксама ў навучальным працэсе пры чытанні спецкурсаў для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцей, напісанні курсавых і дыпломных работ і дысертацый.

Галіна прымянення: сучасная тэорыя канечных груп і іх класаў.

РЕЗЮМЕ

Закревская Виктория Сергеевна

Конечные группы с обобщенным условием Оре, определяемым заданной решеткой подгрупп

Ключевые слова: конечная группа, слабо σ-перестановочная подгруппа, $(\mathfrak{U},\sigma)$-вложенная подгруппа, $u{\vee}sp$-вложенная подгруппа, σ-разрешимая группа, решетка подгрупп, максимальная подгруппа, мета-σ-нильпотентная группа.

Цель работы: исследование строения конечных групп с обобщенным условием Оре, определяемым заданной решеткой подгрупп.

Методы исследования: методы абстрактной теории групп и методы теории решеток, методы теории классов групп, методы теории σ-свойств.

Полученные результаты и их новизна. В диссертационной работе построены теории слабо σ-перестановочных, $(\mathfrak{U},\sigma)$-вложенных и $u{\vee}sp$-вложенных подгрупп, позволившие обобщить и усилить многие известные результаты и, в частности, соответствующие результаты Аграваля, Н.М. Адарченко, М. Асаада, И.В. Близнеца, Я. Ванга, Ч. Ву, В. Го, Н.С. Косенка, В. Ксианбао, Я. Ли, В.С. Монахова, М. Рамадана, В.Н. Рыжик, В.М. Селькина, В.Н. Семенчука, А.Н. Скибы, Спенсера, Б. Ху, Дж. Хуанг, Хупперта, Циммерманн, Ч. Чжанга, Л. Чжу, К.П. Шама, Р. Шмидта, Л. Юбо и др. Доказана σ-разрешимость конечных групп, в которых каждая максимальная цепь длины 3 содержит частично σ-субнормальную подгруппу. Получены новые критерии σ-разрешимости конечных групп. Найдены новые характеризации конечных сверхразрешимых групп. Получены новые критерии мета-σ-нильпотентности конечных групп. Доказано наличие связи между $u{\vee}sp$-вложенностью подруп конечной группы и её p-разрешимостью. Дано обобщение теоремы Циммерманн о субмодулярных подгруппах конечных групп.

Рекомендации по использованию. Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп, в частности, в дальнейших исследованиях структуры групп с заданными системами субнормальных, перестановочных, обобщенно перестановочных и обобщенно субнормальных подгрупп, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ и диссертаций.

Область применения: современная теория конечных групп и их классов.

SUMMARY

Zakrevskaya Victoria Sergeevna

Finite groups with a generalized Ore condition defined by a given lattice of subgroups

Keywords: finite group, weakly σ-permutable subgroup, $(\mathfrak{U},\sigma)$-embedded subgroup, $u\vee sp$-embedded subgroup, σ-soluble group, lattice of subgroups, maximal subgroup, meta-σ-nilpotent group.

Research aim: the study of the structure of finite groups with a generalized Ore condition defined by a given lattice of subgroups.

Research methods: methods of the abstract group theory and methods of the lattice theory, methods of the theory of classes of groups, methods of the theory of σ-properties.

Obtained results and their novelty. In the dissertation the theories of weakly σ-permutable, $(\mathfrak{U},\sigma)$-embedded and $u\vee sp$-embedded subgroups were constructed, which made it possible to generalize and strengthen many well-known results and, in particular, the corresponding results of Agraval, N.M. Adarchenko, M. Asaad, I.V. Bliznets, Y. Wang, Zh. Wu, W. Guo, N.S. Kosenok, W. Xianbao, Y. Li, V.S. Monakhov, M. Ramadan, V.N. Ryzhik, V.M. Selkin, V.N. Semenchuk, A.N. Skiba, Spencer, B. Hu, J. Huang, Huppert, Zimmerman, Z. Zhang, L. Zhu, K.P. Shum, R. Schmidt, L. Yubo, etc. The σ-solubility of finite groups in which each maximal chain of length 3 contains a partially σ-subnormal subgroup is proved. New criteria for σ-solubility of finite groups are obtained. New characterizations of finite supersoluble groups are found. New criteria for meta-σ-nilpotency of finite groups are obtained. It is proved that there is a connection between $u\vee sp$-embeddedness of subgroups of a finite group and its p-solubility. A generalization of the Zimmerman's theorem on submodular subgroups of finite groups is given.

Recommendations for use. The dissertation work has a theoretical character. The results obtained in the dissertation can be used in research on the theory of finite groups, in particular, in further studies of the structure of groups with given systems of subnormal, permutable, and generalized permutable subgroups, as well as in the educational process when reading special courses for students of mathematical specialties, writing term papers and theses and dissertations.

Application field: the modern theory of groups and their clasess.

Научное издание

Закревская Виктория Сергеевна

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОБОБЩЕННЫМ УСЛОВИЕМ ОРЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫМ ЗАДАННОЙ РЕШЕТКОЙ ПОДГРУПП

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 03.04.2023. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,63.
Уч.-изд. л. 1,78. Тираж 60 экз. Заказ 169.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель