

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе
Волковой Екатерины Дмитриевны
«Классы Фиттинга, определяемые разбиениями множества простых чисел»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Актуальность темы диссертации

Все рассматриваемые группы конечные. Классы Фиттинга возникли, в некотором роде, как дуальные классы к формациям и классам Шунка при изучении вопросов существования и сопряженности инъекторов, а также их свойств в группах (Фишер, Гашютц, Хартли (1967), Хартли (1969), Л.А. Шеметков (1975, 1999, 2000), Блессеноль, Лауэ (1979), Ли, Го, Н.Т. Воробьев (2008), Янг, Го, Н.Т. Воробьев (2018) и др.). В дальнейшем классы Фиттинга превратились в самостоятельный объект исследования многих алгебраистов и вошли в монографии «Finite soluble groups» К. Doerk, Т. Hawkes, 1992; «Classes of finite groups» А. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerró, 2006. В последние годы широкое распространение получил предложенный А.Н. Скибой σ -метод исследования групп и их классов, σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел на непересекающиеся подмножества. Применение σ -метода позволило рассмотреть и изучить в группах различные обобщения субнормальности, перестановочности, нильпотентности, сверхразрешимости и разрешимости, а также исследовать свойства σ -локальных формаций (А.Н. Скиба (2014-2018), Ху, Хуан (2017), Чи, А.Н. Скиба (2018), Чи, В.Г. Сафонов, А.Н. Скиба (2019), Аль-Шормани, Хелиэль, Баллестер-Болинше (2020), И.Н. Сафонова, В.Г. Сафонов (2020), Го, И.Н. Сафонова, А.Н. Скиба (2021), Баллестер-Болинше, С.Ф. Каморников, Йи (2022), В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев (2022), И.Н. Сафонова (2022, 2023), Феррара, Тромбетти (2023) и др.). Однако в теории классов Фиттинга σ -метод и его приложения оставались недостаточно исследованными. Таким образом, изучение классов Фиттинга, определяемых разбиениями σ множества всех простых чисел, относится к содержательному направлению современной алгебры и тема диссертации Е.Д. Волковой является актуальной.

Степень новизны результатов и научных положений, выносимых на защиту

Диссертация содержит перечень определений и условных обозначений, введение, общую характеристику работы, четыре главы основной части, заключение и библиографический список.

Во введении и в общей характеристике работы указаны цель и задачи исследования, отмечены особенности данной диссертации. В первой главе дан исторический обзор научных результатов по теме диссертации, раскрыта актуальность темы и приведены обоснования важности исследований определяемых разбиениями множества простых чисел классов Фиттинга.

Основные результаты диссертации представлены в главах 2-4. В них σ -метод, разработанный А.Н. Скибой, применяется и развивается при исследовании структурных свойств классов Фиттинга, а также при описании радикалов, инъекторов, решеток групп.

В 2020 году Го, Ли Чжан и Н.Т. Воробьев определили σ -локальные классы Фиттинга и описали их локальные задания. В главе 2 диссертации для ряда семейств σ -локальных классов Фиттинга (не обязательно разрешимых) групп решается вопрос о справедливости гипотезы Локетта, состоящей в следующем: верно ли, что для каждого класса Фиттинга \mathfrak{F} существует нормальный класс Фиттинга \mathfrak{X} такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}$, где \mathfrak{F}^* – наименьший

из классов Фиттинга, содержащий \mathfrak{F} , для которого \mathfrak{F}^* -радикал прямого произведения $G \times H$ любых групп G и H равен прямому произведению \mathfrak{F}^* -радикалов этих групп? Применение известных и доказательство новых свойств σ -локальных классов Фиттинга позволило диссертанту установить, что каждый σ -локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта (теорема 2.1.8). Этот результат является одним из основных во второй главе. Он охватывает известные результаты Н.Т. Воробьева (1988), Галлего (1996) для минимального разбиения $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ множества всех простых чисел и находит приложение в разделе 2.2. В теореме 2.2.3 вопрос 8.30 Лауша из «Коуровской тетради. Нерешенные вопросы теории групп» (Новосибирск, 1999) о пересечении двух классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта в универсуме разрешимых групп, решен положительно для двух σ -локальных классов Фиттинга в универсуме всех групп \mathfrak{E} . Использование теоремы 2.1.8 в теореме 2.2.5 позволило получить простое альтернативное доказательство теоремы X.6.15 (К. Doerk, Т. Hawkes. «Finite soluble groups», 1992) и результата Бергера (1978).

В разделе 2.3 найдены семейства σ -локальных классов Фиттинга разрешимых групп, для которых подтверждена гипотеза Локетта.

Теорема 2.3.3. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – классы Фиттинга разрешимых групп, $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ – σ -локальный класс Фиттинга, определяемый полной приведенной H_σ -функцией f . Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то \mathfrak{F} удовлетворяет гипотезе Локетта в \mathfrak{H} .

При доказательстве этого факта диссертантом были показаны возможности применения полной приведенной H_σ -функции f и f -инъекторно замкнутости класса Фиттинга. Здесь класс Фиттинга \mathfrak{H} называется f -инъекторно замкнутым, если \mathfrak{H} содержится в классе всех групп, у которых $f(\sigma_i)$ -инъектор принадлежит $\mathfrak{H} = LR_\sigma(f)$ для H_σ -функции f и каждого $\sigma_i \in \text{Supp}(f)$. Рассматривая минимальное разбиение $\sigma = \sigma^1$ множества всех простых чисел и f -инъекторно замкнутые классы Фиттинга из примера 2.3.1, из теоремы 2.3.3 получаются в качестве следствий известные результаты Брайса, Косси (1975), Бризна (1979), Н.Т. Воробьева (1988), Дерка, Хоукса (1992).

Глава 3 посвящена исследованию вопросов существования, сопряженности и нахождению свойств инъекторов в σ -разрешимой и Π -скованных группах для классов Фиттинга, определяемых разбиениями σ множества всех простых чисел. В этом направлении в разделе 3.1 изучены особенности σ -класса Хартли \mathfrak{H} , т.е. класса Фиттинга \mathfrak{H} , для которого $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ для некоторой H_σ -функции h , где класс $LH_\sigma(h)$ содержит единичную группу и все группы G с $\mathfrak{E}_{\sigma_i}, \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ -коррадикалами из $h(\sigma_i)$ для всех σ_i из $\sigma(G)$. В частности, доказано, что любой σ -класс Хартли определяется устойчивой приведенной H_σ -функцией (лемма 3.1.5). Пример 3.1.3 показывает, что среди известных классов групп имеется много σ -классов Хартли.

В разделе 3.2 эффективность полученных выше результатов проиллюстрирована теоремой 3.2.8, в которой для σ -класса Хартли $\mathfrak{H} = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}, \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ с устойчивой приведенной H_σ -функцией h в σ -разрешимой группе G доказаны существование и сопряженность \mathfrak{H} -инъекторов, при этом подгруппа V группы G является \mathfrak{H} -инъектором G тогда и только тогда, когда V/G_h является σ -нильпотентным инъектором G/G_h и, кроме того, множество всех \mathfrak{H} -инъекторов в G совпадает с множеством всех \mathfrak{H} -максимальных подгрупп G , содержащих \mathfrak{H} -радикал G . Эта теорема обобщает результаты Хартли (1969) и Фишера (1966), а также позволяет получить новые (следствия 3.3.1, 3.3.2, 3.3.5).

В разделе 3.4 значение основного результата – теоремы 3.4.5 состоит в том, что использование σ -метода позволило доказать наличие в точности одного класса

сопряженных \mathfrak{H} -инъекторов и их связь с \mathfrak{N}_Π -инъекторами в группе G с Π -скованным фактором $G/G_{\mathfrak{X}}$, где σ -класс Хартли $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ определяется функцией h , для которой $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга для любого $\sigma_i \in \Pi = \text{Supp}(h)$.

В четвертой главе изучаются решеточные свойства σ -локальных классов Фиттинга. Вопрос модулярности решетки всех классов Фиттинга даже в разрешимом случае (вопрос 14.47 в Коуровской тетради. Нерешенные вопросы теории групп» (Новосибирск, 1999)) до сих пор остается открытым. Основными результатами раздела 4.1 являются теоремы 4.1.8, 4.1.12 и 4.1.17. Достаточные условия модулярности σ -локальных классов Фиттинга найдены в теоремах 4.1.12 и 4.1.17. Так как модулярная решетка не всегда является дистрибутивной, важность исследований в этом направлении подтверждает теорема 4.1.8, в которой установлены два достаточных признака дистрибутивности для σ -локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$, $\mathfrak{M} = LR_\sigma(m)$ с наименьшими H_σ -функциями f , h и m : (1) существует такое множество простых чисел π , что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{E}_\pi$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_\pi$; (2) \mathfrak{M} – класс Локетта, существует такое множество простых чисел π и такие классы Фиттинга \mathfrak{F}_0 и \mathfrak{H}_0 взаимно простых характеристик, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0\mathfrak{N}_\pi$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0\mathfrak{N}_\pi$.

В разделе 4.2 вводится понятие σ -локального множества Фиттинга и σ -метод разрабатывается внутри решетки подгрупп одной группы. Важным результатом этого раздела является теорема 4.2.14, устанавливающая серию σ -локальных множеств Фиттинга группы, для которых выполняется модулярное равенство.

Соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки

Из выше сказанного следует, что содержание диссертации в полной мере соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел и отрасли «физико-математические науки».

Степень новизны результатов и научных положений, выносимых на защиту

Вынесенные на защиту диссертации основные результаты и научные положения являются новыми. В диссертации разработаны σ -локальные методы исследования классов Фиттинга и множеств Фиттинга, определяемых разбиениями множества простых чисел. Найдены характеристики инъекторов групп и решеточные свойства классов Фиттинга. Установленные закономерности обобщают многие известные результаты и позволяют получить новые в качестве следствий.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Диссертация является цельной и законченной научно-исследовательской работой. Доказательства всех основных результатов проведены подробно, корректно и строго обоснованы.

Научная, практическая, экономическая и социальная значимость результатов диссертации с указанием рекомендаций по их использованию

Результаты диссертационного исследования имеют теоретический характер. Они показали возможности применения σ -метода для классов Фиттинга и могут быть использованы в дальнейших исследованиях подгруппового строения групп и их классов, определяемых разбиениями множества простых чисел. Отдельные результаты могут быть использованы в учебном процессе в пединститутах и университетах при чтении специальных курсов на математических специальностях, при написании курсовых, дипломных, диссертационных работ.

Опубликованность результатов диссертации в научной печати

Основные положения, выносимые на защиту, опубликованы в 7 научных статьях в журналах «Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта», «Математические заметки»,

«Сибирский математический журнал», «Проблемы физики, математики и техники», «Известия вузов. Математика». Апробация результатов представлена в 12 материалах и тезисах докладов на пяти международных научных конференциях, трех международных и двух региональных научно-практических конференциях, а также одной международной школе-конференции по теории групп. Среди научных публикаций восемь выполнены без соавторов. Содержание диссертации полно и правильно отражено в автореферате.

Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК

Диссертация оформлена аккуратно в соответствии с требованиями ВАК Республики Беларусь. Имеются некоторые опечатки. Например, на с. 5 во 2-ой строке сверху вместо «подгрупп и» нужно «нормальных подгрупп и», а в 11-ой строке сверху вместо « S_n -замкнутым» нужно « S -замкнутым»; на с. 34 в 14-ой строке снизу вместо « $G_{\mathbb{Z}} \leq V$ » нужно « $G_{\mathbb{Z}} \leq V_{\mathbb{Z}}$ »; на с. 46 в 6-ой строке снизу вместо « $\cong G_{h(\sigma_j)} / G_{h(\sigma_i)} \cap G_{h(\sigma_j)}$ » нужно « $\cong G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_i)} \cap G_{h(\sigma_j)}$ »; на с. 56 в 11-ой строке снизу вместо « $\cong G_h / G_h R_{h(\sigma_i)}$ » нужно « $\cong G_h / G_h \cap R_{h(\sigma_i)}$ », а в 9-ой строке снизу вместо « $(R / R_{h(\sigma_i)}) / (R_{h(\sigma_i)} G_h / R_{h(\sigma_i)})$ » нужно « $(R / R_{h(\sigma_i)}) / (R_{h(\sigma_i)} G_h / R_{h(\sigma_i)})$ »; на с. 59 в 5-ой строке сверху вместо « \mathfrak{F} -инъектором» нужно « \mathfrak{F} -инъектором». В списке использованных источников в некоторых случаях приведены разные сокращения названий журналов, например, в ссылках 11, 36, 51 «Communications in Algebra», «Comm. in Algebra», «Comm. Algebra», в ссылках 42, 77 «Сиб. матем. журн.», «Сибирский матем. журн.». Указанные замечания не влияют на понимание результатов и на общую положительную оценку диссертационного исследования.

Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени

Из сказанного выше следует, что диссертация Е.Д. Волковой «Классы Фиттинга, определяемые разбиениями множества простых чисел» является завершенной квалификационной научной работой, соответствует заявленной специальности и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям ВАК Республики Беларусь, а сама Екатерина Дмитриевна Волкова является квалифицированным специалистом в области теории конечных групп и заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел за: подтверждение гипотезы Локетта и решение вопроса Лауша об общей структуре класса Фиттинга, определяемого локально разбиениями множества простых чисел; доказательство существования и сопряженности инъекторов и нахождение их характеристик в σ -разрешимой и П-скованной группах; установление признаков дистрибутивности и модулярности для семейств σ -локальных классов Фиттинга; описание семейств σ -локальных множеств Фиттинга со свойством модулярности.

Официальный оппонент
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики
УО «Белорусский государственный
университет транспорта»

Т.И. Васильева

Личную подпись
удостоверяю:
Начальник ОК
Васильевой Т.И.
Паранин