ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Волковой Е.Д. «Классы Фиттинга, определяемые разбиениями множества простых чисел», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Систематическое изучение строения групп и решёток их классов, основанное на использовании различных разбиений множества всех простых чисел, началось в 2014 с работ А.Н. Скибы. В этих работах он для разбиений множества всех простых чисел определил ряд новых понятий, в том числе, σ-примарные, σ-бипримарные, σ-нильпотентные и σ-разрешимые группы, где σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. Новые понятия являются обобщениями соответственно примарных, бипримарных, нильпотентных и разрешимых групп. Частными случаями σ-разрешимых групп являются также π-отделимые и p-разрешимые группы. К настоящему времени усилиями отечественных и зарубежных алгебраистов исследование подгруппового строения групп и решёток их классов с помощью разбиений множества всех простых чисел оформилось в активно развивающееся направление в теории классов групп, прежде всего, формаций групп. В качестве яркого примера, иллюстрирующего важность и многообещающую перспективность данного направления можно указать нетривиальное обобщение А.Н. Скибы фундаментальных теорем Холла и Чунихина о холловых подгруппах разрешимых и π-разрешимых групп.

В современной теории классов групп не менее активно и бурно, чем теория формаций, развивается и постоянно обогащается новыми интересными и глубокими результатами теория классов Фиттинга, то есть классов конечных групп, замкнутых относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп. При этом некоторые понятия и результаты в одной теории имеют соответствующие (дуальные) аналоги в другой теории. Например, радикалу группы, играющему важнейшую роль в теории классов Фиттинга, соответствует корадикал группы, являющийся основополагающим понятием в теории формаций. Следствием указанного дуализма является то, что идеи, методы и результаты одной теории стимулируют появление соответствующих дуальных аналогов в другой теории, что приводит к взаимообогащению и развитию как теории формаций, так и теории классов Фиттинга.

На плодотворное и эффективное использование σ-метода Скибы в теории формаций обратили внимание исследователи, работающие с классами Фиттинга. Так, Н.Т. Воробьёв, В. Го и Ли Чжан в статье «On σ-lokal Fitting classes», опубликованной в 2020 году, впервые применили этот метод в теории классов Фиттинга, определив σ-локальные классы Фиттинга и описав некоторые их свойства. До последнего времени это было одно из немногих применений σ-метода Скибы в теории классов Фиттинга. Поэтому в настоящее время одной из актуальнейших задач является общая задача *развития и применения σ-метода Скибы в теории классов Фиттинга*. Важным вкладом в решение этой задачи является диссертация Е.Д. Волковой, в которой разработаны новые локальные методы исследования структуры классов Фиттинга, определяемых разбиениями множества простых чисел, и их применение для описания свойств решёток, радикалов и инъекторов конечных групп.

Остановимся вкратце на содержании диссертации, в которой решена задача развития и применения σ-метода Скибы в теории классов Фиттинга, она изложена на 96 страницах и состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырёх глав основной части, заключения и библиографического списка, состоящего из списка использованных источников в количестве 124 наименований и списка публикаций соискателя в количестве 19 наименований.

Во вводной главе 1 «Аналитический обзор литературы по теме диссертации» приведён аналитический обзор литературы по теме диссертации, сформулированы цели и задачи диссертационного исследования и обоснована актуальность их решения.

Следующие главы 2 – 4 являются основными в диссертации, и каждая из них завершается разделом «Краткие выводы».

В главе 2 «Структура обобщённого локального класса Фиттинга», состоящей из четырёх разделов, получены результаты, подтверждающие гипотезу Локетта для σ-локальных классов Фиттинга и для них же положительно решен вопрос Лауша. Основным результатом раздела 2.1 и всей главы 2 можно считать теорему 2.1.8, утверждающую, что *любой σ-локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта*. Это означает, что для любого σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ существует нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{F}^*$ является наименьшим классом Фиттинга, содержащем $\mathfrak{F}$ и удовлетворяющим условию: $\mathfrak{F}^*$-радикал прямого произведения любых двух групп равен прямому произведению их $\mathfrak{F}^*$-радикалов. Из теоремы 2.1.8 вытекают результаты Н.Т. Воробьёва и М.П. Галлего для локальных классов Фиттинга (следствия 2.1.10 и 2.1.11). Подтверждение гипотезы Локетта для σ-локальных классов Фиттинга позволило дать для этих классов положительный ответ (теорема 2.2.3) на вопрос Лауша из «Коуровской тетради». В разделе 2.3 доказана теорема 2.3.2, позволяющая строить пары Локетта $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$, где $\mathfrak{F}$ – σ-локальный класс Фиттинга разрешимых групп, $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга разрешимых групп. Указанная теорема используется для доказательства теорема 2.3.3, являющейся основной в разделе 2.3. Из неё извлекаются многие известные результаты о классах Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта (следствия 2.3.5 – 2.3.8).

В главе 3 «Инъекторы и их характеризация», состоящей из пяти разделов, центральным результатом является теорема 3.2.8, в которой доказывается существование и сопряжённость инъекторов в σ-разрешимых группах для σ-классов Хартли. Доказательство теоремы 3.2.8 опирается на собранные в разделе 3.1 результаты диссертанта о σ-классах Хартли. Существенно используются также результаты Л.А. Шеметкова (леммы 3.2.1 и 3.2.2) и А.Н. Скибы (леммы 3.2.4 и 3.2.5). В разделе 3.3 собраны следствия из теоремы 3.2.8 для σ-нильпотентных и σ-разрешимых групп, включающие в том числе известные результаты Б. Хартли о $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$-инъекторах разрешимой группы и Б. Фишера о нильпотентных инъекторах разрешимой группы. Основным результатом раздела 3.4 является теорема 3.4.5, в которой доказывается существование и сопряжённость инъекторов в группах, которые в отличие от теоремы 3.2.8, не обязаны быть σ-разрешимыми.

В главе 4 «Семейства σ-локальных классов Фиттинга со свойствами дистрибутивности и модулярности» изучаются классы Фиттинга, указанные в названии главы. В разделе 4.1 представляет самостоятельный интерес теорема 4.1.3, применяемая при доказательстве важной теоремы 4.1.8, формулировка которой содержит два признака дистрибутивности σ-локальных классов Фиттинга. Признаки модулярности σ-локальных классов Фиттинга устанавливают теоремы 4.1.12 и 4.1.17. Теорема 4.1.12 позволила сформулировать новые признаки модулярности локальных классов Фиттинга (следствия 4.1.15 и 4.1.16). В разделе 4.2 вначале в теореме 4.2.3 указывается семейство множеств Фиттинга группы G, для которых выполняется равенство дистрибутивности, затем определяются σ-локальные множества Фиттинга группы G, строятся примеры таких множеств и доказывается ряд лемм, которые используются при получении основного результата данного раздела – теоремы 4.2.14, в которой указано семейство σ-локальных классов Фиттинга группы G, удовлетворяющих условию модулярности.

На основании вышесказанного можно утверждать, что диссертация Волковой Е.Д. «Классы Фиттинга, определяемые разбиениями множества простых чисел» является значительным вкладом в развитие теории классов конечных групп, выполнена на весьма актуальную тему и на высоком научном уровне; все результаты диссертации, в том числе и основные положения, выносимые на защиту, являются новыми, снабжены подробными доказательствами, их достоверность и обоснованность не вызывает сомнений.

Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и их классов Фиттинга, в том числе σ-локальных классов Фиттинга, а также при получении аналогичных результатов для полиадических групп произвольной арности и их классов. Результаты диссертации могут быть также использованы при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей университетов.

Результаты диссертации опубликованы в 19 научных работах Волковой Е.Д., среди которых 7 статей в научных журналах, соответствующих пункту 19 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь, и 12 материалов и тезисов докладов конференций. Общий объем публикаций составляет 4,91 авторских листа, из них 4,03 авторских листа – статьи в научных журналах, 0,88 авторских листа – тезисы и материалы докладов конференций. Результаты, включенные в диссертацию, неоднократно докладывались на семинаре по теории групп и их классов кафедры математики Витебского государственного университета имени П.М. Машерова, Гомельском алгебраическом семинаре в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины, а также на международных научных конференциях: Минск, 2021; Винница, 2019; Екатеринбург, 2021; Нальчик, 2022; Брянск, 2022; Новосибирск, 2022; Витебск, 2016, 2017, 2021, 2022, 2023.

Содержание диссертации полностью соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел. Автореферат верно отражает содержание диссертации. Оформление диссертации и автореферата соответствует требованиям, предъявляемым ВАК Беларуси. Имеющиеся в тексте диссертации опечатки не влияют на достоверность полученных результатов. Например, в главе 4 на с. 61 в 4-ой строке сверху вместо *4.1.17* набрано *4.1.9*, а на с. 66 в начале доказательства теоремы 4.1.8 вместо *по теореме 4.1.3* набрано *по лемме 4.1.3*. Кроме того, так как в доказательстве следствия 2.3.9 применяется теорема 2.3.2 и не применяется теорема 2.3.3, то его целесообразнее было бы поместить сразу после теоремы 2.3.2, а не после следствий из теоремы 2.3.3.

Считаю, что диссертация Волковой Е.Д. «Классы Фиттинга, определяемые разбиениями множества простых чисел», подготовленная под научным руководством доктора физико-математических наук, профессора Воробьёва Николая Тимофеевича, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук; ее автор Волкова Екатерина Дмитриевна является квалифицированным специалистом в области теории классов конечных групп и заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел за новые научно обоснованные результаты, решающие важную научную задачу разработки новых локальных методов исследования классов и множеств Фиттинга, определяемых разбиениями множества простых чисел, и их применение для описания свойств решёток, радикалов и инъекторов конечных групп, а именно за:

– подтверждение гипотезы Локетта и решение вопроса Лауша о строении σ-локального класса Фиттинга в терминах свойств радикалов групп;

– доказательство существования и сопряжённости инъекторов и нахождение их характеризации в σ-разрешимой и П-скованной группах;

– установление признаков дистрибутивности и модулярности для семейств σ-локальных классов Фиттинга;

– определение семейств σ-локальных множеств Фиттинга со свойством модулярности.

Доктор физико-математических наук,
профессор А.М. Гальмак

Подпись Гальмака А.М.
удостоверяю
Начальник А.В. Копышева
09.04.2024