УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
Белорусского государственного
университета

_______________________ А.В.Блохин
«___10___»_________________ 2024 г.

# ОТЗЫВ ОППОНИРУЮЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертации Волковой Екатерины Дмитриевны
«Классы Фиттинга, определяемые разбиениями множества простых чисел»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

***Соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки со ссылкой на область исследования паспорта специальности***

Содержание диссертации полностью соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел, и относится к области исследований «Теории алгебраических структур; линейная и полилинейная алгебра, теория представлений, гомологическая алгебра и алгебраическая K-теория; алгебраическая геометрия, топологическая алгебра; теории категорий и универсальной алгебры» согласно паспорту специальности.

В диссертации диссертантом разработаны новые локальные методы исследования классов Фиттинга, определяемых разбиениями множества простых чисел, и их приложение для изучения структурных свойств конечных групп и их классов. Эффективность применения этих методов установлена автором диссертации подтверждением известной в теории классов гипотезы Локетта (см. проблему на с. 135 в работе: Lockett, F. P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F. P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Vol. 137, № 2. – P. 131–136) об общей структуре класса Фиттинга для обобщенно локального класса Фиттинга, а также результатами о существовании, сопряженности и характеризациями инъекторов в конечных обобщенно разрешимых группах, признаками дистрибутивности и модулярности семейств классов Фиттинга.

Ориентиром для развития данного направления исследований явилась долгосрочная программа структурного анализа конечных групп, предложенная Х. Фиттингом (Fitting, H. Beiträge zur Theorie der endlichen Gruppen // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. – 1938. – Bd. 48. – P. 77–141), в которой была сформулирована задача изучения конечных групп при помощи заданных свойств нильпотентных подгрупп и определен классический объект современной теории групп – нильпотентный радикал группы (подгруппа Фиттинга). Актуальность и перспективность идей Фиттинга была подтверждена в работе В. Гашюца, Б. Фишера и Б. Хартли (1967), в которой определены радикальные классы конечных групп (классы Фиттинга), т.е. классы групп, замкнутые относительно взятия нормальных подгрупп и нормальных произведений подгрупп, и получено в терминах радикальных классов изящное обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла.

Конструктивное описание подгруппового строения конечных групп и решеток формаций при помощи разбиений множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ было предложено в 2014–2015 гг. А. Н. Скибой. Пусть $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т.е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Тогда если $\pi(n)$ – множество всех простых делителей числа $n$ и $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$, то группу $G$ называют: $\sigma$-примарной, если $G$ является $\sigma_i$-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; $\sigma$-нильпотентной, если $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ для некоторых $\sigma$-примарных групп $G_1, \ldots, G_n$; $\sigma$-разрешимой, если каждый главный фактор $G$ $\sigma$-примарен. Заметим, что если $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$ – минимальное разбиение $\mathbb{P}$, то $\sigma$-примарная, $\sigma$-нильпотентная и $\sigma$-разрешимая группы являются примарной, нильпотентной и разрешимой соответственно. Это обстоятельство привело к многочисленным приложениям $\sigma$-метода Скибы в теории конечных групп и формаций групп, что подтверждают яркие новые результаты по характеризации групп со свойствами обобщенной субнормальности, перестановочности, нильпотентности, сверхразрешимости и разрешимости, описанию решеток формаций групп, что нашло отражение в серии работ А. Н. Скибы, Д. Чи и А. Н. Скибы, А. Баллестера-Болинше, С. Ф. Каморникова и Х. Йи, Д. Чи, В. Г. Сафонова и А. Н. Скибы, В. И. Мурашко и А. Ф. Васильева, М. Феррара и М. Тромбетти, Б. Ху и Дж. Хуан и др.

Развитие и применение $\sigma$-метода для объектов, дуальным формациям, была впервые предложена в работе В. Го, Ли Чжан и Н. Т. Воробьева (Guo, W. On $\sigma$-local Fitting classes / W. Guo, Li Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129), где определены $\sigma$-локальные классы Фиттинга и описаны их локальные задания. Вместе с тем, $\sigma$-метод и его приложения в теории классов Фиттинга для описания структуры $\sigma$-локальных классов Фиттинга, изучения вопросов существования, сопряженности и строения инъекторов (аналогов подгрупп Силова и Холла) в $\sigma$-разрешимых группах, нахождения семейств $\sigma$-локальных классов Фиттинга со свойствами дистрибутивности и модулярности оставались мало исследованными.

В диссертации Е.Д. Волковой этот метод получил систематическое развитие и успешно реализован его приложениями для описания общей структуры $\sigma$-локального (в частности, локального) класса Фиттинга в терминах радикалов, новыми результатами о существовании, сопряженности и характеризации инъекторов в $\sigma$-разрешимых группах, нахождением новых семейств классов Фиттинга со свойствами дистрибутивности и модулярности. Развитый локальный метод исследования групп и классов Фиттинга и все полученные соискателем новые научные результаты полностью соответствуют специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки).

**Научный вклад соискателя в решение научной задачи с оценкой его значимости**

В диссертации Е. Д. Волковой решена задача развития новых локальных методов исследования структуры классов Фиттинга, определяемых разбиениями множества простых чисел, и их применения для описания свойств радикалов, инъекторов и решеток конечных групп. Решение данной задачи реализуют следующие взаимосвязанные научные результаты, полученные соискателем:

(1) подтверждение гипотезы Локетта и решение вопроса Лауша об общей структуре класса Фиттинга для класса Фиттинга, определяемого локально разбиениями множества всех простых чисел;

(2) теоремы существования и сопряженности инъекторов в $\sigma$-разрешимой группе;

(3) характеризации инъекторов в терминах радикалов в $\sigma$-разрешимой и П-скованной группах;

(4) признаки дистрибутивности и модулярности для семейств $\sigma$-локальных классов Фиттинга;

(5) описание семейств $\sigma$-локальных множеств Фиттинга со свойством модулярности.

Центральное место в исследовании структуры классов Фиттинга при помощи радикалов занимает проблема Локетта (1974), известная в настоящее время как гипотеза Локетта, о том, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ разрешимых групп можно определить как пересечение некоторого нормального класса Фиттинга и наименьшего класса Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащего $\mathfrak{F}$ такого, что для любых групп $G$ и $H$ $\mathfrak{F}^*$-радикал прямого произведения $G \times H$ равен прямому произведению $\mathfrak{F}^*$-радикалов этих групп. Данная гипотеза нашла подтверждение для некоторых специальных случаев локальных классов Фиттинга Р. А. Брайсом и Дж. Косси (1975), Дж. Бейдлеманом и П. Хауком (1979), К. Дерком и Т. Хоуксом (1992) и в обобщенном случае Н. Т. Воробьевым (1988) для любых локальных классов Фиттинга. Поскольку локальный класс Фиттинга $\sigma$-локален при минимальном разбиении множества $\mathbb{P}$, то несомненной является значимость результата диссертанта (1) о подтверждении гипотезы Локетта для произвольного $\sigma$-локального класса Фиттинга. Здесь важно отметить, что результат (1) доказан в универсуме произвольных конечных групп. Более того, его прикладной аспект – положительное решение проблемы Лауша 8.30 из «Коуровской тетради» о полноте решетки классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, в случае их $\sigma$-локальности. Применение $\sigma$-метода в (1) позволило обобщить и усилить известные результаты Р. А. Брайса и Дж. Косси (1975), Дж. Бейдлемана и П. Хаука (1979), О. Бризона (1979), Н. Т. Воробьева (1988), К. Дерка и Т. Хоукса (1992), М. П. Галлего (1996), относящиеся к гипотезе Локетта.

Результаты (2) соискателя вносят существенный вклад в развитие в терминах классов Фиттинга силовской теории. В этом направлении исследований весьма значительным результатом является развитие и применение $\sigma$-метода для решения задачи существования и сопряженности инъекторов в $\sigma$-разрешимой и П-скованной группах ($\Pi \subseteq \sigma$), что было осуществлено Б. Хартли (1969), В. Го и Н. Т. Воробьевым (2008) ранее лишь для специальных случаев локального класса Фиттинга в предположении разрешимости конечной группы $G$.

Результаты (2) позволили установить в (3) новые характеризации инъекторов при помощи радикалов в $\sigma$-разрешимой и П-скованной группах. Из (3) при минимальном разбиении $\sigma$ следует известный результат в теории конечных групп Б. Фишера (1966) о том, что множество всех нильпотентных инъекторов разрешимой группы $G$ – множество всех максимальных нильпотентных подгрупп этой группы, содержащих подгруппу Фиттинга $G$.

Значимость результатов диссертанта (4) и (5) обусловлена, прежде всего, открытой проблемой 14.47 из «Коуровской тетради» о том, является ли решетка всех классов Фиттинга конечных разрешимых групп модулярной. На пути решения такой задачи важно выявить достаточно широкие семейства классов Фиттинга со свойством модулярности. Это оказалось возможным при использовании $\sigma$-метода: в (4) и (5) соискателем описаны семейства $\sigma$-локальных классов Фиттинга и множеств Фиттинга, для которых справедливо модулярное равенство.

Научный вклад соискателя и значимость его результатов подтверждает их полная опубликованность в 7 статьях, входящих в список изданий, рекомендованных ВАК для публикаций результатов диссертационных работ, в том числе в переводных журналах: «Математические заметки», «Сибирский математический журнал», «Известия высших учебных заведений. Математика», которые входят в базы данных ISI и Scopus, а также их апробированность на 10 международных и 2 региональных научных конференциях, в том числе на крупных международных конференциях (Винница, 2019 г.; Екатеринбург, 2021 г.; Минск, 2021 г.; Нальчик, 2022 г.; Брянск, 2022 г.; Новосибирск, 2022 г.).

**Конкретные научные результаты (с указанием их новизны и практической значимости), за которые соискателю может быть присуждена искомая ученая степень**

Основное содержание диссертации представлено главами 2–4. На наш взгляд, один из главных результатов диссертационного исследования Е. Д. Волковой – теорема 2.1.8, которая подтверждает гипотезу Локетта для $\sigma$-локального класса Фиттинга произвольных конечных групп. Значимость и новизна полученного результата состоит в том, что при любом разбиении $\sigma$ множества простых чисел такой класс можно построить с помощью заданных свойств радикалов групп. Поскольку до настоящего времени это было возможным лишь, когда $\sigma$ – минимальное разбиение, следствиями теоремы 2.1.8 являются известные результаты Н. Т. Воробьева (1988) и М. П. Галлего (1996).

Практическую значимость полученного результата подчеркивают результаты раздела 2 главы 2 – теоремы 2.2.3 и 2.2.5, первая из которых положительно решает проблему Лауша (вопрос 8.30 из «Коуровской тетради») о полноте решетки классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, вторая – для пары классов Фиттинга $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{E}$ ($\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп, $\mathfrak{E}$ – класс всех конечных групп) подтверждает гипотезу Локетта и гипотезу Лауэ.

Последовательное продолжение и развитие результатов из разделов 1 и 2 представлено в разделе 3, где подтвержден обобщенный вариант гипотезы Локетта в универсуме $\mathfrak{S}$. Здесь доказана теорема 2.3.3 о том, что если $\mathfrak{F}$ – $\sigma$-локальный подкласс Фиттинга $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$. Научная новизна и значимость этого результата состоит в том, что следствиями его являются теоремы Р. А. Брайса и Дж. Косси (1975), О. Бризона (1979), К. Дерка и Т. Хоукса (1992), подтверждающие гипотезу Локетта в случае, когда $\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга специального вида.

Глава 3 «Инъекторы и их характеризация» посвящена чисто групповым аспектам применения $\sigma$-метода: в ней решена задача существования, сопряженности и характеризации инъекторов в $\sigma$-разрешимой и П-скованной группах ($\Pi \subseteq \sigma$). Значительный научный интерес представляют теоремы 3.2.8 и 3.4.5. В теореме 3.2.8 соискателем установлено, что в любой $\sigma$-разрешимой группе $G$ существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы для $\sigma$-класса Хартли $\mathfrak{H}$ и любые два из них сопряжены, при этом подгруппа $V$ является $\mathfrak{H}$-инъектором $G$ в точности тогда, когда фактор $V$ по $h$-радикалу $G_h$ группы $G$ является $\sigma$-нильпотентным инъектором группы $G/G_h$. Практическая значимость данной теоремы заключается в том, что она позволяет описать строение $\mathfrak{H}$-инъекторов в терминах радикалов для многих известных классов групп, что подтверждает ее уникальность ряд новых следствий, полученных автором в разделе 3 главы 3, а также обобщение и развитие известных в теории конечных групп результатов Б. Хартли и Б. Фишера. В разделе 4 главы 3 доказана теорема 3.4.5, которая дополняет и расширяет новизну исследования инъекторов на случай, когда группа $G$ в общем случае не является $\sigma$-разрешимой. Доказано, что если $\mathfrak{N}_\Pi$ – класс всех $\sigma$-нильпотентных П-групп, $\mathfrak{H}$ – $\sigma$-класс Хартли, определяемый локально функцией, все значения которой постоянны (равны некоторому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{X}$) и $C_{G/G_\mathfrak{X}}\left((G/G_\mathfrak{X})_{\mathfrak{N}_\Pi}\right) \leq (G/G_\mathfrak{X})_{\mathfrak{N}_\Pi}$, то подгруппа $V$ группы $G$ – $\mathfrak{H}$-инъектор $G$ тогда и только тогда, когда $V/G_\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор $G/G_\mathfrak{X}$.

В заключительной главе 4 «Семейства $\sigma$-локальных классов Фиттинга со свойствами дистрибутивности и модулярности» описано построение новых семейств $\sigma$-локальных классов Фиттинга и $\sigma$-локальных множеств Фиттинга, которые удовлетворяют дистрибутивному и модулярному равенствам. Значимость таких результатов обусловлена, прежде всего, открытой проблемой о модулярности решетки всех разрешимых классов Фиттинга (см. проблему 14.47 из «Коуровской тетради»). В разделе 4.1 впервые в данном направлении исследований найдены признаки дистрибутивности разрешимых $\sigma$-локальных классов Фиттинга. Доказана теорема 4.1.8 о том, что для $\sigma$-локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ выполняется дистрибутивное равенство в каждом из следующих случаев: (1) существует такое множество простых чисел $\pi$, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{S}_{\pi}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\pi'}$; (2) $\mathfrak{M}$ – класс Локетта, существуют такое множество простых чисел $\pi$ и такие классы Фиттинга $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{H}_0$ взаимно простых характеристик, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0\mathfrak{N}_{\pi}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0\mathfrak{N}_{\pi}$. Достаточные условия модулярности для $\sigma$-локальных (в частности, локальных) классов Фиттинга в универсуме $\mathfrak{E}$ произвольных конечных групп определены соискателем в теоремах 4.1.12 и 4.1.17 и новых полученных следствиях 4.1.14–4.1.16. Важность указанных результатов состоит в том, что разработанные диссертантом новые локальные методы исследования решеточных свойств классов Фиттинга позволяют значительно приблизить решение указанной выше проблемы о модулярности решетки всех классов Фиттинга.

Наиболее оригинальный и принципиально новый результат исследования свойств решеток подгрупп конечной группы реализован автором в разделе 2 главы 4, где локальный $\sigma$-метод нашел применение в теории множеств Фиттинга группы, т.е. множества подгрупп данной группы, замкнутого относительно взятия нормальных подгрупп, нормальных произведений подгрупп и сопряжений. Здесь впервые определено $\sigma$-локальное множество Фиттинга конечной группы и классифицированы его локальные задания, что представлено серией доказанных новых результатов (леммы 4.2.8, 4.2.9, 4.2.11–4.2.13), представляющих самостоятельный интерес. Основной результат раздела – теорема 2.1.14 о том, что для $\sigma$-локальных множеств Фиттинга $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ и $\mathcal{M}$ группы $G$, определяемых локально наименьшими функциями $f$, $h$ и $m$ соответственно, справедливо модулярное равенство, если $f \leq m$ и наименьшее множество Фиттинга группы $G$, содержащее $f(\sigma_i) \cup h(\sigma_i)$, совпадает с множеством $Sn\{S \leq G: S = S_{f(\sigma_i)}S_{h(\sigma_i)}\}$ для всех $\sigma_i$ таких, что $f(\sigma_i)$ и $h(\sigma_i)$ – непустые множества Фиттинга.

Таким образом, диссертационная работа Е.Д. Волковой «Классы Фиттинга, определяемые разбиениями множества простых чисел» соответствует требованиям Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий, а ее автор Волкова Екатерина Дмитриевна заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук за решение важной научной задачи теории конечных групп – развития новых локальных методов исследования классов Фиттинга и канонических подгрупп, определяемых разбиениями множества простых чисел, и их применение для описания структурных свойств решеток, радикалов и инъекторов конечных групп, а именно за:

– подтверждение гипотезы Локетта и решение вопроса Лауша об общей структуре класса Фиттинга для класса Фиттинга, определяемого разбиениями множества всех простых чисел;

– теоремы о существовании, сопряженности и характеризации инъекторов в обобщенно разрешимой и скованной группах;

– описание новых семейств радикальных классов и множеств со свойствами дистрибутивности и модулярности.

**Замечания по диссертации.**

Имеется незначительное число стилистических замечаний и обнаруженных опечаток, которые не влияют на научную ценность полученных результатов:

– стр. 25, 2-я строка сверху, правильно будет «… Фраттини …» вместо «… Фратини …»;

– стр. 29, 17-я строка сверху, правильно «… Локетта …» вместо «… Локкета …»;

– стр. 40, 8-я строка снизу, правильно «… удовлетворяющих …» вместо «… удовлетворающих …»;

– стр. 82, 16-я строка сверху, правильно будет «… совокупность …» вместо «… совокупнось …»;

– стр. 15 (в автореферате), 12-я строка сверху правильно «… является $\mathfrak{H}$-инъектором …» вместо «… является $\mathfrak{F}$-инъектором …»;

– стр. 17 (в автореферате), 8-я строка снизу правильно «… теоремы 4.1.12 …» вместо «… теоремы 4.1.14 …»;

– стр. 18 (в автореферате), 14-я строка снизу лучше уточнить «… множеств Фиттинга …» вместо «… множеств …».

**Соответствие научной квалификации соискателя ученой степени, на которую она претендует**

Все выше сказанное позволяет сделать вывод, что научная квалификация Волковой Е.Д. соответствует ученой степени кандидата физико-математических наук.

Диссертация Е. Д. Волковой является цельной завершенной научно-квалификационной работой и содержит новые научно обоснованные результаты, совокупность которых является существенным вкладом в актуальное направление современной теории конечных групп и их классов.

**Конкретные рекомендации по использованию результатов диссертации**

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные научные результаты могут быть использованы при исследовании классов групп и канонических подгрупп, которые проводятся в Витебском государственном университете имени П. М. Машерова, Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины, Брестском государственном университете имени А. С. Пушкина, Белорусском государственном университете, Московском городском университете, Брянском государственном университете имени И. Г. Петровского, а также в Институтах математики НАН Беларуси и Сибирского отделения РАН.

Полученные результаты исследований позволяют развить результаты известных отечественных и зарубежных математиков (В. Гашюца, Б. Фишера, П. Хаука, К. Дерка (Германия), Дж. Бейдлемана (США), Б. Хартли, Ф. Локетта

(Великобритания), В. Го (Китай), А. Н. Скибы, Л. А. Шеметкова, Н. Т. Воробьёва (Беларусь) и др.). Основные результаты диссертации опубликованы в 3 известных переводных журналах, что дает возможность их использования не только в научных центрах Беларуси и России, но и за их пределами (в Сюйчжоуском нормальном университете (КНР), Школе математических наук Университета Науки и Технологий Китая, Наваррском университете (Испания), Тюбингенском университете (Германия) и Школе Науки Цзяннаньского университета (КНР)).

Практическая значимость результатов диссертации подтверждена их применением в учебном процессе Витебского государственного университета имени П. М. Машерова (3 акта о внедрении), при чтении спецкурсов по теории групп и их классов для студентов математических специальностей, при написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций, а также для научных исследований, проводимых в рамках задания «Развитие методов теории радикальных множеств и их применение к исследованию подгруппового строения конечных групп», входящего в государственную программу научных исследований на 2021–2025 годы «Конвергенция-2025».

Отзыв о диссертации Е. Д. Волковой рассмотрен и обсужден на заседании научного семинара кафедры высшей алгебры и защиты информации 8 января 2024 г., протокол № 6, согласно приказу по БГУ № 784-ОД от 29.12.2023 г.

Е.Д. Волкова выступила на семинаре с докладом. На семинаре состоялась дискуссия, соискатель дала исчерпывающие ответы на заданные вопросы.

В работе семинара приняло участие 9 человек, в том числе, 1 доктор физико-математических наук и 5 кандидатов физико-математических наук.

Результаты открытого голосования: за – 6; против – нет; воздержались – нет.

Председатель научного семинара
заведующий кафедрой высшей алгебры
и защиты информации
кандидат физико-математических наук
доцент _______________ С.В.Тихонов

Эксперт
профессор кафедры высшей алгебры
и защиты информации
доктор физико-математических наук
профессор _______________ В.В.Беняш-Кривец

Ученый секретарь
научного семинара
кандидат физико-математических наук
доцент _______________ В.В.Курсов