УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

Объект авторского права
УДК 512.542

ВОЛКОВА
Екатерина Дмитриевна

КЛАССЫ ФИТТИНГА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ РАЗБИЕНИЯМИ МНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2023

Работа выполнена в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова».

Научный руководитель: **Воробьёв Николай Тимофеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова».

Официальные оппоненты: **Гальмак Александр Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий»;

Васильева Татьяна Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Оппонирующая организация — учреждение образования «Белорусский государственный университет».

Защита состоится — «19» января 2024 года в 14.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246028, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3-1. Телефон ученого секретаря: (+375 232) 51-03-07. E-mail: SovetD021201@yandex.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан — 15 декабря 2023 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций В. И. Мурашко

ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые группы в диссертации предполагаются конечными. В теории групп и их классов в 2014—2015 г. А. Н. Скибой [1, 2, 3] предложен метод изучения подгруппового строения групп и решеток классов групп при помощи разбиений множества всех простых чисел.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей порядка группы G. Пусть $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ — некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группа G называется: *σ-примарной* [4], если G является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; *σ-нильпотентной* [4], если $G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, G_2, ..., G_n$; *σ-разрешимой* [4], если каждый главный фактор G σ-примарен. Примечателен тот факт, что если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ — минимальное разбиение $\mathbb{P}$, то σ-примарная, σ-нильпотентная и σ-разрешимая группы являются примарной, нильпотентной и разрешимой соответственно.

Эффективность указанного метода в настоящее время подтверждена многочисленными яркими результатами по описанию решеток классов групп и характеризациями групп со свойствами обобщенной субнормальности, перестановочности, нильпотентности, сверхразрешимости и разрешимости, что нашло отражение в серии работ А. Н. Скибы [4, 5, 6, 7], Д. Чи и А. Н. Скибы [8], А. Баллестера-Болинше, С. Ф. Каморникова и Х. Йи [9], Д. Чи, В. Г. Сафонова

---

[1] Skiba, A. N. On σ-properties of Finite groups I / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. — 2014. — № 4 (21). — P. 89—96.

[2] Skiba, A. N. On σ-properties of Finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. — 2015. — № 3 (24). — P. 70–83.

[3] Skiba, A. N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. — 2015. — Vol. 15, № 5. — P. 21–36.

[4] Skiba, A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. — 2015. — Vol. 436. — P. 1–16.

[5] Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. — 2018. — Vol. 495. — P. 114–129.

[6] Skiba, A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. — 2020. — Vol. 550. — P. 69–85.

[7] Skiba, A. N. On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. — 2018. — № 1 (34). — P. 79–82.

[8] Чи, Д. О Σ_t^σ-замкнутых классах конечных групп / Д. Чи, А.Н. Скиба // Укр. матем. журн. — 2018. — Т. 70, № 12. — С. 1707–1716.

[9] Ballester-Bolinches, A. Finite Groups with σ-Subnormal Schmidt Subgroups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, X. Yi // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2022. — Vol. 45. — P. 2431–2440.

и А. Н. Скибы [10], В. И. Мурашко и А. Ф. Васильева [11], И. Н. Сафоновой [12, 13], М. Феррара и М. Тромбетти [14], И. Н. Сафоновой и В. Г. Сафонова [15], С. Ф. Каморникова и В. Н. Тютянова [16], Б. Ху и Дж. Хуан [17], М. М. Аль-Шомрани, А. А. Хелиэль и А. Баллестера-Болинше [18] и др. Крупным достижением в этом направлении является теорема А. Н. Скибы [3], обобщающая классические теоремы Холла и Чунихина о холловых подгруппах разрешимых и π-разрешимых групп.

В 2020 году дуализация σ-метода была впервые предложена В. Го, Ли Чжан и Н. Т. Воробьевым в работе [19], где определены σ-локальные классы Фиттинга и описаны их локальные задания. Однако, хотя классы Фиттинга, т.е. классы замкнутые относительно взятия нормальных подгрупп и нормальных произведений подгрупп, являются в некотором смысле объектами, дуальными формациям, этот метод и его приложения в теории классов Фиттинга и множеств Фиттинга мало исследованы.

Центральное место в теории классов Фиттинга занимает задача описания общей структуры класса Фиттинга в терминах заданных свойств радикалов. В 1974 г. Ф. П. Локеттом [20] была сформулирована следующая проблема, известная в теории классов групп как гипотеза Локетта: *Верно ли, что для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ существует нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}$?* При этом, $\mathfrak{F}^*$ — наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для любых групп G и H $\mathfrak{F}^*$-радикал прямого произведения $G \times H$ равен прямому произведению $\mathfrak{F}^*$-радикалов этих групп.

Р. А. Брайс и Дж. Косси [21] доказали справедливость гипотезы Локетта

[10] Chi, Z. On n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Comm. in Algebra. — 2019. — Vol. 47, № 3. — P. 957–968.

[11] Murashka, V. On the σ-nilpotent hypercenter of finite groups / V. Murashka, A. F. Vasil'ev // Journal of Group Theory. — 2022. — Vol. 25, № 6. — P. 1083—1098.

[12] Safonova, I. N. Some properties of n-multiply σ-local formations of finite groups / I. N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 15, № 7. — P. 1—12.

[13] Safonova, I. N. On properties of the lattice of all τ-closed n-multiply σ-local formations / I. N. Safonova // Communications in Algebra. — 2023. — Vol. 51, № 10. — P. 4454—4461.

[14] Ferrara, M. σ-Subnormality in locally finite groups / M. Ferrara, M. Trombetti // J. Algebra. — 2023. — Vol. 614, № 15. — P. 867–897.

[15] Сафонова, И. Н. О некоторых свойствах решетки тотально σ-локальных формаций конечных групп / И. Н. Сафонова, В. Г. Сафонов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Матем. Инф. — 2020. — Т. 3. — С. 6—16.

[16] Каморников, С. Ф. Об одном критерии σ-нильпотентности конечной группы / С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов // Сиб. матем. журн. — 2022. — Т. 63, № 1. — С. 116—122.

[17] Hu, B. On finite groups with generalized σ-subnormal Schmidt subgroups / B. Hu, J. Huang // Comm. Algebra. — 2017. — Vol. 46, № 2. — P. 1–8.

[18] Al-Shomrani, M. M. On σ-subnormal closure / M. M. Al-Shomrani, A. A. Heliel, A. Ballester-Bolinches // Comm. in Algebra. — 2020. — Vol. 48, № 8. — P. 3624–3627.

[19] Guo, W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, Li Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. — 2020. — Vol. 542, № 15. — P. 116–129.

[20] Lockett, F. P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F. P. Lockett // Math. Z. — 1974. — Vol. 137, № 2. — P. 131—136.

[21] Bryce, R. A. A problem in the Theory of normal Fitting classes / R. A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. — 1975. — Bd. 141, №2. — P. 99—110.

для всех локальных наследственных классов Фиттинга. В [22] гипотеза Локетта подтверждена для локальных классов Фиттинга вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ ($\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс Фиттинга). В последующем, Н. Т. Воробьев [23] установил справедливость гипотезы Локетта для любого локального класса Фиттинга.

Дальнейшие исследования в этом направлении обусловлены вопросом Х. Лауша (см. вопрос 8.30 в «Коуровской тетради» [24]): *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга разрешимых групп, удовлетворяющие гипотезе Локетта. Удовлетворяет ли $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ гипотезе Локетта?*

Утвердительный ответ на данный вопрос получил Н. Т. Воробьев [23] для локальных классов Фиттинга.

В связи с этим актуальна задача *о справедливости гипотезы Локетта и решении вопроса Лауша для σ-локальных классов Фиттинга.*

Результаты по изучению структуры классов Фиттинга приводят к задачам их приложений для описания подгруппового строения самих групп. Основополагающими результатами для многих исследований в теории групп и их классов являются классические теоремы Силова [25] и Холла [26]. Обобщение этих теорем в терминах классов Фиттинга получено В. Гашюцем, Б. Фишером и Б. Хартли [27], где доказано существование и сопряженность $\mathfrak{F}$-инъекторов в разрешимой группе для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ разрешимых групп. Напомним, что подгруппа V группы G называется *$\mathfrak{F}$-инъектором* G, если для любой субнормальной подгруппы N группы G подгруппа $V \cap N$ является максимальной из подгрупп N, принадлежащих $\mathfrak{F}$.

Дальнейшее развитие и обобщение теоремы Гашюца-Фишера-Хартли приводит к исследованиям вопросов существования и сопряженности инъекторов в группах (в общем случае неразрешимых), что нашло отражение в

[22]Beidleman, J. C. Über Fittingklassen und die Lockett-Vermuntung / J. C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. — 1979. — Bd. 167, №2. — P. 161—167.

[23]Воробьев, Н. Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н. Т. Воробьев // Матем. заметки. — 1988. — Т. 43, № 2. — С. 161—168.

[24]Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп — 14-е изд. / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. — Новосибирск : изд-во Ин-та математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 1999. — 135 с.

[25]Sylow, M. L. Theoremes sur les groupes de substitutions / M. L. Sylow // Math. Ann. — 1872. — Vol. 5. — P. 584—594.

[26]Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. — 1928. — Vol. 3. — P. 98—105.

[27]Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. — 1967. — Bd. 102. — P. 337—339.

работах Л. А. Шеметкова [28, 29, 30], Б. Фишера [31], Б. Хартли [32], Д. Блессеноля и Х. Лауэ [33], Ю. Ли, В. Го и Н. Т. Воробьева [34], В. Го и Н. Т. Воробьева [35], Н. Янга, В. Го и Н. Т. Воробьева [36] и др. Ориентиром для таких исследований служит также следующая проблема Л. А. Шеметкова (см. вопрос 11.117 в «Коуровской тетради» [24]): *пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс Фиттинга разрешимых групп. Верно ли, что каждая конечная неразрешимая группа обладает $\mathfrak{X}$-инъектором?*

Поскольку предельным случаем σ-разрешимой группы является разрешимая группа при минимальном разбиении $\sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, естественным является *исследование вопросов существования и сопряженности инъекторов в σ-разрешимой группе.*

Задача описания общей структуры классов Фиттинга тесно взаимосвязана с задачей изучения свойств решеток классов групп. В теории формаций известен результат А. Н. Скибы [37] о том, что решетка всех формаций модулярна и не является дистрибутивной. Но, в сравнение с этим, до сих пор остается открытым вопрос модулярности решетки всех классов Фиттинга даже в разрешимом случае (см. вопрос 14.47 в «Коуровской тетради» [24]). В то же время А. Н. Скибой и Н. Н. Воробьевым [38] и независимо С. Рейфершейд [39] была доказана дистрибутивность решетки всех тотально локальных классов Фиттинга разрешимых групп. Кроме того, в теории классов Фиттинга известен результат Х. Лауша [40] о модулярности решетки всех нормальных классов Фиттинга разрешимых групп. В последующем Н. Т. Воробьевым и

[28]Shemetkov, L. A. Injectors in finite groups / L. A. Shemetkov // Izvestija Gomel'skogo gos. un-ta im. F. Skoriny. Voprosy algebry. — 2000. — № 3 (16). — P. 186—187.

[29]Шеметков, Л. А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л. А. Шеметков // В кн.: Конечные группы. — Минск: Наука и техника, 1975. — С. 207—212.

[30]Шеметков, Л.А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л. А. Шеметков // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. — 1999. — № 1 (15). — С. 5–13.

[31]Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer // B. Habilitationschrift, Universitat Frankfurt. — 1966.

[32]Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. — 1969. — Vol. 3, № 2. — P. 193—207.

[33]Blessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen, in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. — 1979. — Bd. 56, № 2. — P. 516—532.

[34]Liu, Y. Description of $\mathfrak{F}$-injectors of Finite Soluble Groups / Y. Liu, W. Guo, N. T. Vorob'ev // Math. Sci. Res. J. — 2008. — Vol. 12, № 1. — P. 17—22.

[35]Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N. T. Vorob'ev // Comm. in Algebra. — 2008. — Vol. 36. — P. 3200—3208.

[36]Yang, N. On $\mathcal{F}$-injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N. T. Vorob'ev // Comm. in Algebra. — 2018. — Vol. 46, № 1. — P. 217–229.

[37]Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. — Минск: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

[38]Воробьев, Н. Н. О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга / Н. Н. Воробьев, А. Н. Скиба // Матем. заметки. — 2000. — Т. 67, № 5. — С. 662—673.

[39]Reifferscheid, S. A note on subgroup-closed Fitting classes of finite soluble groups / S. Reifferscheid // J. Group Theory. — 2003. — Vol. 6, № 3. — P. 331—345.

[40]Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. — 1973. — Bd. 130, № 1. — P. 67—72.

А. В. Марцинкевич [41] доказана модулярность решетки всех нормальных классов Фиттинга в универсуме $\mathfrak{E}$ всех групп. В связи с этим представляет интерес следующий вопрос: *каковы семейства σ-локальных классов Фиттинга, для которых справедливы дистрибутивное и модулярное равенства?*

Таким образом, научное направление *развития и применения σ-метода в теории классов Фиттинга для решения указанных выше задач является актуальным.*

[41] Воробьев, Н. Т. Конечные π-группы с нормальными инъекторами / Н. Т. Воробьев, А. В. Марцинкевич // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 4. — P. 790—797.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертационные исследования выполнялись в рамках следующих научных тем:

– «Методы локализации и теории решеток в исследовании строения конечных групп и их классов», входящей в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016—2020 годы «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем», регистрационный номер БелИСА — 20160350;

– «Развитие методов теории радикальных множеств и их применение к исследованию подгруппового строения конечных групп», входящей в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2021—2025 годы «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», регистрационный номер БелИСА — 20210495.

Диссертационная работа также была поддержана следующими грантами:

– грант БРФФИ «Радикальные классы и множества конечных групп с заданными системами канонических подгрупп», 2021—2023 годы, регистрационный номер БелИСА — 20213279;

– грант Министерства образования Республики Беларусь «Инъекторы конечных групп», 2023 год, регистрационный номер БелИСА — 20230508.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является разработка новых локальных методов исследования структуры классов Фиттинга и множеств Фиттинга, определяемых разбиениями множества простых чисел, и их применение для описания свойств решеток, радикалов и инъекторов конечных групп. Достижение поставленной цели предполагает решение следующих задач:

— подтвердить гипотезу Локетта и решить вопрос Лауша о строении σ-локального класса Фиттинга в терминах заданных свойств радикалов групп;

— доказать существование, сопряженность инъекторов и найти их характеризацию в σ-разрешимой и Π-скованной группах;

— установить признаки дистрибутивности и модулярности для семейств σ-локальных классов Фиттинга;

— определить семейства σ-локальных множеств Фиттинга со свойством модулярности.

Объектом исследования являются классы Фиттинга, определяемые локально разбиениями множества всех простых чисел.

Предмет исследования — структурные свойства алгебры обобщенно локальных классов Фиттинга.

Научная новизна

Все результаты являются новыми и впервые получены автором. Подтверждена гипотеза Локетта и решен вопрос Лауша об общей структуре класса Фиттинга, определяемого локально разбиениями множества всех простых чисел. Доказано существование, сопряженность инъекторов в σ-разрешимой и П-скованной группах и найдены их характеризации в терминах радикалов. Найдены новые признаки дистрибутивности и модулярности семейств σ-локальных классов Фиттинга и множеств Фиттинга.

Полученные результаты исследования могут быть использованы в решении задач описания структуры групп и их классов, а также в образовательном процессе при чтении спецкурсов по современной алгебре для студентов математических специальностей, написании курсовых, дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

Положения, выносимые на защиту

1. Подтверждение гипотезы Локетта и решение вопроса Лауша об общей структуре класса Фиттинга для класса Фиттинга, определяемого локально разбиениями множества всех простых чисел.

2. Теорема о существовании и сопряженности инъекторов в σ-разрешимой группе.

3. Характеризация инъекторов в П-скованной группе.

4. Признаки дистрибутивности и модулярности для семейств σ-локальных классов Фиттинга.

5. Описание семейств σ-локальных множеств Фиттинга со свойством модулярности.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Воробьёва Николая Тимофеевича. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В совместных работах [1, 2, 4, 5, 6] основные идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализация — соискателю. Работы [3, 7] выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертации апробированы на:

— научных семинарах по теории групп и их классов кафедры математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»;

— Гомельском алгебраическом семинаре (учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»);

— Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «X Машеровские чтения» (Витебск, 14 октября 2016 г.);

— 5-ой Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов «Молодость. Интеллект. Инициатива» (Витебск, 21 апреля 2017 г.);

— 12-ой Международной алгебраической конференции в Украине, посвященной 215-летию В. Буняковского (Винница, 2–6 июля 2019 г.);

— 74-ой, 75-ой Региональных научно-практических конференциях преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука — образованию, производству, экономике» (18 февраля 2022 г.; 3 марта 2023 г.);

— Международной алгебраической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения А.И. Старостина (Екатеринбург, 4–9 октября 2021 г.);

— Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «XV Машеровские чтения» (Витебск, 22 октября 2021 г.);

— Международной конференции «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, 22–25 ноября 2021 г.);

— Международной конференции «Алгебра и динамические системы» (Нальчик, 28 июня – 3 июля 2022 г.);

— XIV Международной школе-конференции по теории групп, посвященной памяти В.А. Белоногова, В.А. Ведерникова и Л.А. Шеметкова (Брянск, 5–11 сентября 2022 г.);

— Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 14–18 ноября 2022 г.).

Отдельные результаты диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова» при чтении спецкурсов по теории групп и их классов для студентов математических специальностей, при написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций, что подтверждается актами о внедрении от 30.08.2021, 31.08.2022, 20.01.2023.

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 статьях в научных журналах, соответствующих пункту 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоения ученых званий в Республике Беларусь, и в 12 материалах и тезисах докладов конференций. Общий объем опубликованных материалов — 4,91 авторского листа, в том числе статьи в научных журналах — 4,03 авторского листа, тезисы и материалы докладов конференций — 0,88 авторского листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в количестве 124 наименований использованных источников и 19 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 98 страницы, из них 12 страниц занимает библиографический список.

Соискатель выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Николаю Тимофеевичу Воробьёву за консультации, помощь и внимание, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В определениях и обозначениях мы следуем [42].

Глава 1 содержит аналитический обзор основных литературных источников по теме диссертации. В этой главе дается описание объектов исследования диссертационной работы, формулируются вопросы и задачи. Основными в диссертации являются главы 2, 3 и 4.

Глава 2 «Структура обобщенно локального класса Фиттинга» диссертации посвящена нахождению семейств классов Фиттинга групп, в общем случае неразрешимых, для которых справедливы гипотеза Локетта и обобщенная гипотеза Локетта. *Классом Фиттинга* $\mathfrak{F}$ называют класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Напомним, что $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей порядка группы G. Пусть $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ — некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Всякое отображение вида $f : \sigma \to \{$классы Фиттинга$\}$ называется *σ-функцией Хартли* или просто *H_σ-функцией* [19]. Через $Supp(f)$ обозначают носитель H_σ-функции f, т.е. множество всех $\sigma_i \in \sigma$ таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$.

Пусть $LR_\sigma(f) = (G : G = 1$ или $G \neq 1$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ — классы всех σ_i-групп и σ_i'-групп соответственно. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *σ-локальным* [19], если $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f. В частности, если разбиение $\sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, ...\}$, то $\mathfrak{F}$ называют *локальным* классом Фиттинга.

В разделе 2.1 подтверждается гипотеза Локетта для σ-локальных классов Фиттинга. Основной результат главы 2 следующая

Теорема 2.1.8 [5]. *Каждый σ-локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта.*

В случае, когда $\sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, ...\}$ — минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, получаем

Следствие 2.1.10 (Н. Т. Воробьев [23]). *Каждый локальный класс Фиттинга разрешимых групп удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Следствие 2.1.11 (М. П. Галлего [43]). *Каждый локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта в универсуме $\mathfrak{E}$ всех групп.*

Важные приложения теоремы 2.1.8 представлены в разделе 2.2.

[42] Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

[43] Gallego, M. P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M. P. Gallego // Comm. Algebra. — 1996. — Bd. 24, № 6. — P. 2011—2023.

Положительное решение вопроса Х. Лауша (см. вопрос 8.30 в «Коуровской тетради» [24]) в универсуме $\mathfrak{E}$ всех групп для σ-локальных классов Фиттинга дает

Теорема 2.2.3 [5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — σ-локальные классы Фиттинга, удовлетворяющие гипотезе Локетта. Тогда $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ удовлетворяет гипотезе Локетта и $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{E}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$.*

Из теоремы 2.1.8 следует альтернативное доказательство теоремы X.6.15 Дерка-Хоукса [42] и результата Т. Р. Бергера [44] для пары классов $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{E}$, которое представляет

Теорема 2.2.5 [5]. *Для пары классов Фиттинга $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{E}$ справедлива гипотеза Локетта и гипотеза Лауэ, т.е. $\mathfrak{S}_* = \mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{E}_* = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{E}_*$.*

В разделе 2.3 подтверждается обобщенная гипотеза Локетта для σ-локальных классов Фиттинга разрешимых групп. Будем использовать следующую классификацию H_σ-функций. Пусть $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ — σ-локальный класс Фиттинга и $\Pi = Supp(f)$. Тогда H_σ-функция f называется: (1) *приведенной*, если $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$; (2) *полной* в случае, когда $f(\sigma_i) = f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$; (3) *полной приведенной*, если f является одновременно полной и приведенной H_σ-функцией. Основной результат раздела — следующая

Теорема 2.3.3 [3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга разрешимых групп, $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ — σ-локальный класс Фиттинга, определяемый полной приведенной H_σ-функцией f. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.*

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *наследственным*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия подгрупп.

Следствие 2.3.6 (Р. А. Брайс, Дж. Косси [21]). *Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ — локальные наследственные классы Фиттинга разрешимых групп. Тогда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.*

Следствие 2.3.7 (О. Бризон [45]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга разрешимых групп и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Если $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{S}_\pi$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{F}$.*

Следствие 2.3.8 (К. Дерк, Т. Хоукс [42]). *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга разрешимых групп и $\mathfrak{H}$ наследственен. Тогда $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$.*

Глава 3 «Инъекторы и их характеризация» диссертации посвящена применению σ-метода и, в частности, развитию локального метода Хартли для решения задачи существования, сопряженности и характеризации инъ-

[44]Berger, T. R. Normal Fitting pairs and Lockett's conjecture / T. R. Berger // Math. Z. — 1978. — Bd. 163. — P. 125—132.

[45]Brison, O.J. Hall operators for Fitting classes / O. J. Brison // Arch. Math. (Basel). — 1979. — Vol. 33, № 1. — P. 1—9.

екторов. Раздел 3.1 является вспомогательным для получения основных результатов главы. В нем описаны новые локальные задания для σ-классов Хартли и изучены их свойства.

Пусть $LH_\sigma(h) = (G : G = 1$ или $G \neq 1$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем *σ-классом Хартли*, если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ для некоторой H_σ-функции h. В частности, если σ — минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, то $\mathfrak{H}$ называют *классом Хартли* [26].

Пусть h — H_σ-функция σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$. Тогда h назовем: (1) *приведенной*, если $h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $i \in I$; (2) *устойчивой* [46], если $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для всех $i \neq j$; (3) *устойчивой приведенной*, если h является одновременно устойчивой и приведенной H_σ-функцией.

Ключевым моментом в решении задачи исследования инъекторов групп является следующая

Лемма 3.1.5 [6]. *Каждый σ-класс Хартли $\mathfrak{H}$ определяется устойчивой приведенной H_σ-функцией.*

Если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$, то подгруппу $G_h = \prod_{\sigma_i \in Supp(h)} G_{h(\sigma_i)}$ назовем *h_σ-радикалом G*.

Основной результат главы 3 — следующая

Теорема 3.2.8 [6]. *Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ и $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ — σ-класс Хартли с устойчивой приведенной H_σ-функцией h. Тогда для любой σ-разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:*

(1) *подгруппа V группы G является $\mathfrak{H}$-инъектором G в том и только том случае, если V/G_h является σ-нильпотентным инъектором G/G_h;*

(2) *в G существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены;*

(3) *множество всех $\mathfrak{H}$-инъекторов группы G — это в точности множество всех $\mathfrak{H}$-максимальных подгрупп G, содержащих $\mathfrak{H}$-радикал G.*

Применению теоремы 3.2.8 для описания инъекторов для некоторых известных классов групп посвящен раздел 3.3. В частности, специальными случаями теоремы 3.2.8 являются результаты Б. Хартли и Б. Фишера.

Следствие 3.3.3 (Б. Хартли [32]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп и $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}$. Тогда подгруппа V разрешимой группы G является $\mathfrak{H}$-инъектором G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ — нильпотентный инъектор $G/G_{\mathfrak{X}}$.*

Следствие 3.3.4 (Б. Фишер [31]). *Множество всех нильпотентных инъекторов разрешимой группы — это множество всех нильпотентных максимальных подгрупп этой группы, содержащих ее радикал Фиттинга.*

[46]Воробьев, Н. Т. Множества Хартли и инъекторы конечной группы / Н. Т. Воробьев, Т. Б. Караулова // Матем. заметки. — 2019. — Vol. 105, № 2. — С. 214—227.

В разделе 3.4 исследуются вопросы существования, сопряженности и характеризации инъекторов для случая, когда σ-класс Хартли определен постоянной H_σ-функцией и группа G в общем случае не является σ-разрешимой.

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$. Группу G называют Π-*группой*, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$.

Пусть $\mathfrak{N}_\Pi$ — класс всех σ-нильпотентных Π-групп. Группу G назовем Π-*скованной*, если $C_G(G_{\mathfrak{N}_\Pi}) \leq G_{\mathfrak{N}_\Pi}$.

Основной результат раздела

Теорема 3.4.5 [7]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс Фиттинга, h — H_σ-функция такая, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ для любого $\sigma_i \in \Pi = Supp(h)$ и G — группа. Если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ и фактор $G/G_{\mathfrak{X}}$ Π-скован, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *подгруппа V группы G является $\mathfrak{F}$-инъектором G в точности тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ — $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор $G/G_{\mathfrak{X}}$;*

(2) *в G существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Глава 4 «Семейства σ-локальных классов Фиттинга со свойствами дистрибутивности и модулярности» посвящена нахождению признаков дистрибутивности и модулярности для семейств σ-локальных классов Фиттинга и множеств Фиттинга.

Решение проблемы 14.47 из «Коуровской тетради» [24] о модулярности решетки всех классов Фиттинга обусловливает задачу нахождения новых семейств как классов Фиттинга, так и множеств Фиттинга, состоящих из таких классов и множеств, для которых справедливы дистрибутивное и модулярное равенства. Этому исследованию посвящены разделы 4.1 и 4.2, которые существенно используют результаты [1] о признаках дистрибутивности и модулярности семейств классов Фиттинга. В частности, неоднократно используется теорема 4.2.3 [1].

Основные результаты раздела 4.1 посвящены доказательству признаков дистрибутивности и модулярности для семейств σ-локальных классов Фиттинга. Напомним, что *характеристикой* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют множество $Char(\mathfrak{F}) = \{p : p \in \mathbb{P}$ и $Z_p \in \mathfrak{F}\}$. Если классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $Char(\mathfrak{F}) \cap Char(\mathfrak{H}) = \varnothing$, то $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ имеют взаимно простые характеристики. *Произведением* классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$.

Множество всех σ-локальных классов Фиттинга образует решетку по включению $\subseteq$ относительно операций $\wedge_\sigma$ и $\vee_\sigma$, которые определяются для любых σ-локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ следующим образом: $\mathfrak{F} \wedge_\sigma \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H} = l_\sigma Fit(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$, где $l_\sigma Fit(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$ — пересечение всех σ-локальных классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$.

Пусть $\Omega = \{f_i : LR_\sigma(f_i) = \mathfrak{F}, i \in I\}$ – множество всех H_σ-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Для любых двух H_σ-функций f и $\varphi \in \Omega$ введем отношение частичного порядка следующим образом: $f \leq \varphi$ тогда и только тогда, когда $f(\sigma_i) \subseteq \varphi(\sigma_i)$ для всех $i \in I$. Наименьший элемент множества Ω будем называть *наименьшей* H_σ-функцией класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Признаки дистрибутивности для σ-локальных классов Фиттинга представляет

Теорема 4.1.8 [2]. *Если $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$, $\mathfrak{M} = LR_\sigma(m)$ — σ-локальные классы Фиттинга разрешимых групп, определяемые наименьшими H_σ-функциями f, h и m соответственно, то равенство $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H}) = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) \vee_\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ выполняется в каждом из следующих случаев:*

(1) *Существует такое множество простых чисел π, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\pi'}$;*

(2) $\mathfrak{M}$ *— класс Локетта, существует такое множество простых чисел π и такие классы Фиттинга $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{H}_0$ взаимно простых характеристик, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0\mathfrak{N}_\pi$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0\mathfrak{N}_\pi$.*

Напомним, что операция замыкания Sn для класса групп $\mathfrak{X}$ определяется следующим образом: $Sn(\mathfrak{X}) = (G : G \trianglelefteq\trianglelefteq H$ для некоторой $H \in \mathfrak{X})$.

Следующие две теоремы определяют условия, при которых свойство модулярности справедливо для σ-локальных классов Фиттинга.

Теорема 4.1.12 [2]. *Пусть $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$, $\mathfrak{M} = LR_\sigma(m)$ — σ-локальные классы Фиттинга и f, h, m — наименьшие H_σ-функции $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$ соответственно, причем $f \leq m$. Если H_σ-функции f и h таковы, что $f(\sigma_i) \vee_\sigma h(\sigma_i) = Sn(G : G = G_{f(\sigma_i)}G_{h(\sigma_i)})$ для всех $\sigma_i \in Supp(f \vee h)$, то $(\mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \vee_\sigma (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})$.*

Пусть f и h — H_σ-функции. *Произведением* fh H_σ-функций f и h будем называть H_σ-функцию такую, что $(fh)(\sigma_i) = f(\sigma_i)h(\sigma_i)$ для всех i.

Теорема 4.1.17 [2]. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — σ-локальные классы Фиттинга, определяемые наименьшими H_σ-функциями f, h, x и y соответственно, причем все непустые значения H_σ-функций x и y являются гомоморфами такими, что $x(\sigma_i) \cap y(\sigma_i) = (1)$ и $h \leq fy$. Тогда если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $(\mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{F} \vee_\sigma (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X})$.*

Раздел 4.2 посвящен развитию и применению σ-метода для нахождения семейств σ-локальных множеств Фиттинга, удовлетворяющих модулярному равенству.

Множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называют *множеством Фиттинга* группы G [42], если оно замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их нормальных произведений и сопряжений подгрупп.

Всякое отображение вида $f : \sigma \to \{$множества Фиттинга группы $G\}$ назовем *σ-функцией Хартли* группы G или просто *H_σ-функцией* G. Если f — H_σ-функция, то символом $Supp(f)$ обозначают носитель f, т.е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$.

Пусть $LFS_\sigma(f) = \{S \leq G : S = 1$ или $S \neq 1$ и $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}} \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(S)\}$. Множество Фиттинга группы G назовем *σ-локальным*, если $\mathcal{F} = LFS_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, то $\mathcal{F}$ назовем *локальным* множеством Фиттинга G.

Пусть Ω — совокупность всех H_σ-функций множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G. Определим на Ω отношение порядка $\leq$ следующим образом: если $f, \varphi \in \Omega$, то $f \leq \varphi$ тогда и только тогда, когда $f(\sigma_i) \subseteq \varphi(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Наименьший элемент из Ω назовем *наименьшей H_σ-функцией* множества Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G.

Если $\mathcal{X}$ — совокупность подгрупп группы G, то операцию замыкания Sn на $\mathcal{X}$ определяют следующим образом: $Sn(\mathcal{X}) = \{S \leq G : S \trianglelefteq\trianglelefteq H$ для некоторой подгруппы $H \in \mathcal{X}\}$.

Свойство модулярности для семейств σ-локальных множеств Фиттинга группы G представляет следующий аналог теоремы 4.1.14, которая справедлива и для множеств Фиттинга.

Теорема 4.2.14 [4]. *Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$ — σ-локальные множества Фиттинга группы G и f, h, m — наименьшие H_σ-функции множеств Фиттинга $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$ группы G соответственно, причем $f \leq m$. Если H_σ-функции f и h таковы, что $f(\sigma_i) \vee h(\sigma_i) = Sn\{S \leq G : S = S_{f(\sigma_i)}S_{h(\sigma_i)}\}$ для всех σ_i таких, что $f(\sigma_i)$ и $h(\sigma_i)$ — непустые множества Фиттинга группы G, то $(\mathcal{F} \vee_\sigma \mathcal{H}) \cap \mathcal{M} = \mathcal{F} \vee_\sigma (\mathcal{H} \cap \mathcal{M})$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертационной работе разработаны новые локальные методы исследования классов Фиттинга и множеств Фиттинга, определяемых разбиениями множества всех простых чисел, на основе которых описаны общие закономерности построения классов Фиттинга и множеств Фиттинга. При этом выявлены новые свойства решеток и характеризации инъекторов конечных групп.

Подтверждена гипотеза Локетта о строении класса Фиттинга в терминах радикалов для σ-локальных классов Фиттинга [5, 11], что позволило обобщить известные результаты Н. Т. Воробьева (1988) и М. П. Галлего (1996). На основе этого решен вопрос Лауша о решеточной структуре класса Фиттинга для случая его σ-локальности [5, 11]. Описаны общие закономерности построения пар Локетта для σ-локальных классов Фиттинга разрешимых групп [3, 16], что позволило обобщить известные результаты Р. А. Брайса и Дж. Косси (1975), О. Бризона (1979), Н. Т. Воробьева (1988), К. Дерка и Т. Хоукса (1992).

Решена задача существования и сопряженности инъекторов и их характеризации в σ-разрешимой группе [6, 7, 12, 17, 18, 19]: доказано, что в любой σ-разрешимой группе для каждого σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$ существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены, причем подгруппа V группы G является $\mathfrak{H}$-инъектором в точности тогда, когда фактор V по h_σ-радикалу σ-нильпотентный инъектор.

При помощи установленных в [1, 8, 9] решеточных свойств классов Фиттинга описаны семейства σ-локальных классов Фиттинга и множеств со свойствами дистрибутивности и модулярности [2, 4, 10, 13, 14, 15].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут найти применение для решения задач описания структуры конечных групп и их классов, проводимых в Витебском государственном университете имени П. М. Машерова, Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины, Белорусском государственном университете, а также в Институте математики НАН Беларуси.

Тот факт, что полученные результаты исследований позволяют развить результаты известных отечественных и зарубежных математиков (К. Дерка, Б. Фишера (Германия), Т. Хоукса, Б. Хартли, О. Бризона (Великобритания), Р. А. Брайса, Дж. Косси (Австралия), М. П. Галлего (Испания), А. Н. Скибы, Н. Т. Воробьёва, Н. Н. Воробьёва (Беларусь) и др.), а также то, что основные результаты диссертации опубликованы в российских переводных журналах [2, 4, 5], дает возможность их использования не только в научных центрах Беларуси, но и за ее пределами (в Институте математики Сибирского отделения РАН, Московском городском университете, Университете науки и технологий Китая, Наваррском университете (Испания), Тюбингенском университете (Германия) и в Школе науки Цзяннаньского университета (КНР)).

Практическая значимость результатов диссертации подтверждена их применением в учебном процессе Витебского государственного университета имени П. М. Машерова (акты внедрения от 31.08.2021, 31.08.2022, 20.01.2023) при чтении спецкурсов по теории классов групп для студентов математических специальностей, при написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций, а также для научных исследований, проводимых в рамках задания «Развитие методов теории радикальных множеств и их применение к исследованию подгруппового строения конечных групп», входящего в государственную программу научных исследований на 2021—2025 годы «Конвергенция-2025».

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных журналах

1. Воробьёв, Н. Т. О решеточных свойствах классов Фиттинга / Н. Т. Воробьёв, Е. Д. Ланцетова (Волкова) // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. — 2018. — № 1 (98). — С. 5—9.

2. Воробьёв, Н. Т. О свойствах дистрибутивности и модулярности решеток классов Фиттинга / Н. Т. Воробьёв, Е. Д. Ланцетова (Волкова) // Матем. заметки. — 2021. — Т. 110, № 5. — С. 658—671. Английская версия: Vorob'ev, N. T. On the Distributivity and Modularity Properties of the Lattice of Fitting Classes / N. T. Vorob'ev, E. D. Lantsetova (Volkova) // Math. Notes. — 2021. — Vol. 110, № 5. — P. 658—671.

3. Ланцетова (Волкова), Е. Д. О парах Локетта и гипотезе Локетта для σ-локальных классов Фиттинга / Е. Д. Ланцетова (Волкова) // Проблемы физики, математики и техники. — 2022. — № 2 (51). — С. 76—82.

4. Воробьёв, Н. Т. О признаках дистрибутивности и модулярности семейств множеств Фиттинга конечной группы / Н. Т. Воробьёв, Е. Д. Волкова // Сиб. матем. журн. — 2022. — Т. 63, № 6. — С. 1229—1239. Английская версия: Vorob'ev, N. T. On the Distributivity and Modularity Signs of a Family of Fitting sets of a Finite Group / N. T. Vorob'ev, E. D. Volkova // Sib. Math. Journal. — 2022. — Vol. 63, № 6. — P. 1060—1068.

5. Воробьёв, Н. Т. О гипотезе Локетта для σ-локальных классов Фиттинга / Н. Т. Воробьёв, Е. Д. Волкова // Изв. вузов. Матем. — 2022. — № 11. — С. 14—20. Английская версия: Vorob'ev, N. T. On Lockett's Conjecture for σ-Local Fitting Classes / N. T. Vorob'ev, E. D. Volkova // Russian Mathematics. — 2022. — № 11. — P. 12—17.

6. Воробьёв, Н. Т. Инъекторы конечных σ-разрешимых групп / Н. Т. Воробьёв, Е. Д. Волкова // Проблемы физики, математики и техники. — 2023. — № 1 (54). — С. 75—84.

7. Волкова, Е. Д. О существовании и сопряженности инъекторов в конечной группе / Е. Д. Волкова // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. — 2023. — № 2 (119) — С. 12—17.

Материалы конференций

8. Ланцетова (Волкова), Е. Д. О признаках дистрибутивности решетки классов Фиттинга / Е. Д. Ланцетова (Волкова) // X Машеровские чтения: материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и

молодых ученых, Витебск, 14 окт. 2016 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2016. — С. 15—16.

9. Ланцетова (Волкова), Е. Д. О признаках дистрибутивности умножения относительно объединения решетки классов Фиттинга / Е. Д. Ланцетова (Волкова) // Молодость. Интеллект. Инициатива : материалы V Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов, Витебск, 21 апреля 2017 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2017. — С. 35.

10. Ланцетова (Волкова), Е. Д. О признаках дистрибутивности семейств множеств Фиттинга конечной группы / Е. Д. Ланцетова (Волкова) // XV Машеровские чтения : материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 22 окт. 2021 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2021. — С. 21—22.

11. Воробьёв, Н. Т. О гипотезе Локетта для σ-локального класса Фиттинга / Н. Т. Воробьёв, Е. Д. Ланцетова (Волкова) // Наука — образованию, производству, экономике : материалы 74-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 18 февр. 2022 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2022. — С. 27—29.

12. Воробьёв, Н. Т. О проблеме существования и сопряженности инъекторов π-разрешимых конечных групп / Н. Т. Воробьёв, Е. Д. Волкова // Наука — образованию, производству, экономике : материалы 75-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 3 марта 2023 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. — Витебск, 2023. — С. 31—33.

Тезисы докладов

13. Vorob'ev, N. T. On σ-local Fitting sets / N. T. Vorob'ev, E. D. Lantsetova (Volkova) // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary V. Bunyakovsky : abstracts, Vinnytsia, July 2—6, 2019 / Vasyl' Stus Donetsk National University. — Vinnytsia, 2019. — P. 128—129.

14. Воробьёв, Н. Т. О признаках дистрибутивности семейств σ-локальных классов Фиттинга / Н. Т. Воробьев, Е. Д. Ланцетова (Волкова) // Международная алгебраическая конференция, посвященная 90-летию со дня рождения А. И. Старостина, Екатеринбург, 4–9 октября 2021 г. / Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УОРАН. — Екатеринбург, 2021. — С. 26.

15. Ланцетова (Волкова), Е. Д. О признаках модулярности семейств множеств Фиттинга конечной группы / Е. Д. Ланцетова (Волкова) // XIII Белорусская математическая конференция : материалы Международной научной конференции, Минск, 22–25 нояб. 2021 г. : в 2 ч. / Национальная академия наук Беларуси, Институт математики, Белорусский государственный университет; сост. В. В. Лепин. — Минск: Беларуская Навука, 2021. — Ч. 1. — С. 110—111.

16. Ланцетова (Волкова), Е. Д. О парах Локетта и гипотезе Локетта для σ-локальных классов Фиттинга / Е. Д. Ланцетова (Волкова), Н. Т. Воробьев // Международная конференция "Алгебра и динамические системы посвященная 110-летию со дня рождения С. Н. Черникова, Нальчик, 28 июня–3 июля 2022 г. / Нальчик: издательство «Принт-центр», 2022. — С. 76—78.

17. Ланцетова (Волкова), Е. Д. О методах построения σ-классов Хартли / Е. Д. Ланцетова (Волкова) // XIV Международная школа-конференция по теории групп, посвященная памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова и Л. А. Шеметкова, Брянск, Россия, 5–11 сентября 2022 г. / Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УОРАН. — Брянск, 2022. — С. 38—39.

18. Воробьёв, Н. Т. О проблеме Шеметкова существования инъекторов в конечной группе / Н. Т. Воробьев, Е. Д. Ланцетова (Волкова) // XIV Международная школа-конференция по теории групп, посвященная памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова и Л. А. Шеметкова, Брянск, Россия, 5–11 сентября 2022 г. / Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УОРАН. — Брянск, 2022. — С. 17—18.

19. Воробьёв, Н. Т. О существовании и сопряженности инъекторов в конечной группе / Н. Т. Воробьев, Е. Д. Волкова // Мальцевские чтения : материалы международной конф., Новосибирск, 14—18 ноября 2022 г. / Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирский национальный исследовательский гос. университет. — Новосибирск, 2022. — С. 91.

РЭЗЮМЭ

Воўкава Кацярына Дзмітрыеўна

Класы Фітынга, якія вызначаюцца разбіццямі мноства простых лікаў

Ключавыя словы: канечная група, клас Фітынга, рашотка класаў Фітынга, мноства Фітынга групы G, $\mathfrak{F}$-ін'ектар.

Мэта працы: распрацоўка новых лакальных метадаў даследавання структуры класаў Фітынга и мностваў Фітынга, якія вызначаюцца разбіццямі мноства простых лікаў, і іх прымяненне для апісання уласцівасцяў рашотак, радыкалаў і ін'ектараў канечных груп.

Метады даследавання: метады тэорыі канечных груп і іх класаў, у прыватнасці, метады лакалізацыі ў тэорыі класаў Фітынга.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Пацверджана гіпотэза Локета для σ-лакальных класаў Фітынга, што дазволіла абагульніць вядомыя вынікі М. Ц. Вараб'ёва і М. П. Галега. Вырашана пытанне Лауша аб рашотачнай структуры радыкальнага класа для σ-лакальных класаў Фітынга. Акрамя таго, апісаны метады пабудовы пар Локета для выпадку, калі $\mathfrak{F}$ — абагульнена лакальны клас Фітынга, і, у прыватнасці, пацверджана абагульненая гіпотэза Локета, што дазволіла абагульніць вядомыя вынікі Р. А. Брайса і Дж. Косі, О. Брызона, М. Ц. Вараб'ёва, К. Дёрка і Т. Хоукса. Вырашана задача існавання і спалучанасці ін'ектараў у любой σ-вырашальнай групе, а таксама іх апісанне ў тэрмінах радыкалаў. Апісаны сямейства класаў Фітынга і мностваў Фітынга з уласцівасцямі дыстрыбутыўнасці і мадулярнасці.

Усе атрыманыя вынікі з'яўляюцца новымі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Атрыманыя вынікі даследаванняў маюць тэарэтычны характар. Яны могуць быць выкарыстаны для вырашэння задач апісання падгрупавой структуры груп і іх класаў, таксама, матэрыялы даследаванняў могуць быць выкарыстаны ў навучальным працэсе пры чытанні спецкурсаў па сучаснай алгебры для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцей, напісанні курсавых і дыпломных праектаў, магістарскіх і кандыдацкіх дысертацый.

Галіна прымянення: сучасная тэорыя груп і іх класаў.

РЕЗЮМЕ

Волкова Екатерина Дмитриевна

Классы Фиттинга, определяемые разбиениями множества простых чисел

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, решетка классов Фиттинга, множество Фиттинга группы G, $\mathfrak{F}$-инъектор.

Цель работы: разработка новых локальных методов исследования структуры классов Фиттинга и множеств Фиттинга, определяемых разбиениями множества простых чисел, и их применение для описания свойств решеток, радикалов и инъекторов конечных групп.

Методы исследования: методы теории конечных групп и их классов, в частности, методы локализации в теории классов Фиттинга.

Полученные результаты и их новизна. Подтверждена гипотеза Локетта для σ-локальных классов Фиттинга, что позволило обобщить известные результаты Н. Т. Воробьева и М. П. Галлего. Решен вопрос Лауша о решеточной структуре радикального класса для σ-локальных классов Фиттинга. Кроме того, описаны методы построения пар Локетта для случая, когда $\mathfrak{F}$ — обобщенно локальный класс Фиттинга, и, в частности, подтверждена обобщенная гипотеза Локетта, что позволило обобщить известные результаты Р. А. Брайса и Дж. Косси, О. Бризона, Н. Т. Воробьева, К. Дерка и Т. Хоукса. Решена задача существования и сопряженности инъекторов в любой σ-разрешимой группе, а также их описание в терминах радикалов. Описаны семейства классов Фиттинга и множеств Фиттинга со свойствами дистрибутивности и модулярности.

Все полученные результаты являются новыми.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты исследований имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в решении задач описания подгрупповой структуры групп и их классов. Также, материалы исследований могут быть использованы в образовательном процессе при чтении спецкурсов по современной алгебре для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

Область применения: современная теория групп и их классов.

SUMMARY

Volkova Ekaterina Dmitrievna

Fitting classes defined by partitions of the set of prime numbers

Keywords: finite group, Fitting class, lattice of Fitting classes, Fitting set of a group G, $\mathfrak{F}$-injector.

Research aim: the development of new local methods for research the structure of Fitting classes and Fitting sets defined by partitions of a set of prime numbers, and their application to describe the properties of lattices, radicals and injectors of finite groups.

Research methods: the methods of the theory of finite groups and their classes, in particular, localization methods in the theory of Fitting classes.

The obtained results and their novelty. Lockett's hypothesis confirmed for σ-local Fitting classes, which made it possible to generalize the well-known ruseltats of N. T. Vorob'ev and M. P. Gallego. The Lausch question on the lattice structure of the radical class for σ-local Fitting classes is solved. In addition, methods for constructing Lockett pairs are described for the case when $\mathfrak{F}$ – is a generalized local Fitting class, and, in particular, the generalized Lockett conjecture is confirmed, which makes it possible to generalize the well-known results of R. A. Bryce and J. Cossey, O. Brison, N . T. Vorob'ev, K. Doerk and T. Hawkes. The problem of the existence and conjuracy of injectors in any σ-solvable group and their description in terms of radicals are solved. Families of Fitting classes and Fitting sets with the properties of distributivity and modularity are described.

All the obtained results are new.

Recommendation for use. The obtained results are of theoretical nature. They can be used in solving problems of describing the subgroup structure of groups and their classes. Also, research materials can be used in the educational process while delivering special courses on modern algebra for students of mathematical specialties, while writing terms papers and graduation projects, master of philosophy and doctor of philosophy theses.

Application field: the modern theory of groups and their classes.

Научное издание

ВОЛКОВА Екатерина Дмитриевна

КЛАССЫ ФИТТИНГА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ РАЗБИЕНИЯМИ МНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 14.12.2023. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,4.
Уч.-изд. л. 1,53. Тираж 60 экз. Заказ 673.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) №02330/450 от 18.12.2013.
ул. Советская, 104, 246028, г. Гомель