ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Затуханием колебаний называется постепенное ослабление колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой.

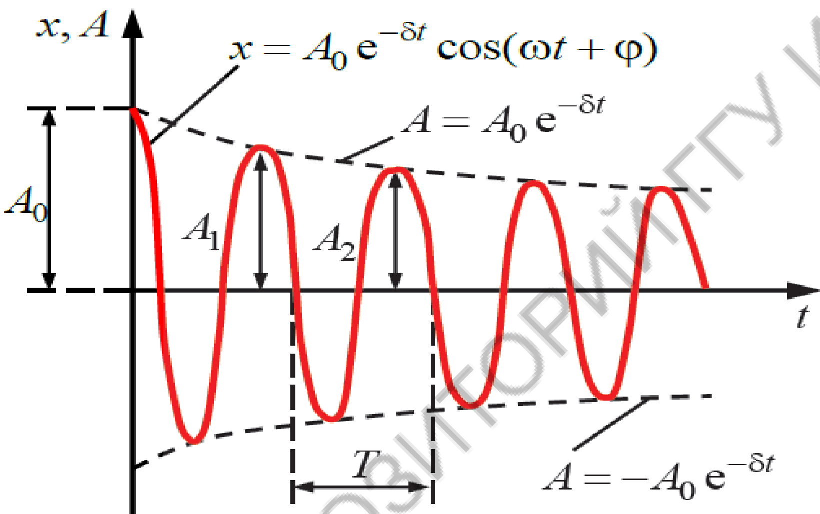
Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы имеет вид:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0,$$

где s – колеблющаяся величина;

$\delta = \text{const}$ – ***коэффициент затухания***;

ω_0 – циклическая частота свободных ***незатухающих*** колебаний той же колебательной системы (при $\delta = 0$).



В случае малых затуханий ($\delta^2 \ll \omega_0^2$) решение этого уравнения:

$$s = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

где:

$A = A_0 e^{-\delta t}$ – ***амплитуда затухающих колебаний***;

A_0 – ***начальная амплитуда***;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – ***циклическая частота затухающих колебаний***.

Промежуток времени $\tau = \frac{1}{\delta}$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в *e* раз, называется ***временем релаксации***.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо *компенсировать потери энергии*. Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора $X(t)$, изменяющегося по гармоническому закону

$$X(t) = X_0 \cos \omega t .$$

В случае механических колебаний таким фактором является ***вынуждающая сила*** $F = F_0 \cos \omega t$. Закон движения для пружинного маятника будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t .$$

В общем виде ***дифференциальное уравнение вынужденных колебаний*** имеет вид

$$\ddot{s} + 2\delta \dot{s} + \omega_0^2 s = x_0 \cos \omega t .$$

Это уравнение – линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Его *решение* равно сумме *общего* решения $s = A_0 \, \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$ однородного уравнения и *частного* решения неоднородного уравнения. Можно показать, частное решение имеет вид

$$s = A \cos(\omega t + \varphi) ,$$

где A и φ задаются формулами:

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС. УПРУГИЕ ВОЛНЫ.

Волновым процессом или ***волной*** называется процесс распространения колебаний в сплошной среде.

При распространении волны, частицы колеблются около своих положений равновесия, а не перемещаются вслед за волной.

Вместе с волной от частицы к частице передаётся только состояние колебательного движения и его энергия.

Основным свойством всех волн ***является перенос энергии без переноса вещества***.

Упругими (или механическими) волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

Продольная волна – это волна, в которой частицы среды колеблются *в направлении распространения волны*.

Поперечная волна – это волна, в которой частицы среды колеблются в плоскостях, *перпендикулярных направлению распространения волны*.

Продольные упругие волны могут распространяться в средах, в которых возникают упругие силы при деформации *сжатия и растяжения* (в твёрдых, жидких и газообразных телах).

Поперечные упругие волны могут распространяться только в среде, в которой возникают упругие силы при деформации *сдвига* (только в твёрдых телах).

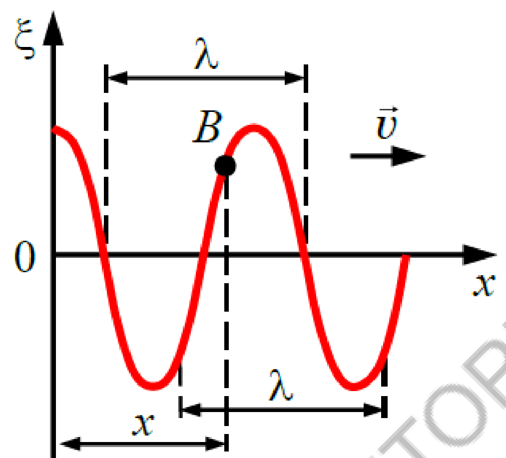
УПРУГАЯ ГАРМОНИЧЕСКАЯ ВОЛНА

Упругая волна называется ***гармонической***, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Пусть гармоническая волна распространяется со скоростью υ вдоль оси OX. Обозначим смещения частиц среды через $\xi = \xi(x, t)$.

Для данного момента времени t зависимость между смещением частиц среды и расстоянием x этих частиц от источника колебаний O можно представить в виде ***графика волны***.

Отличие *графика волны* от *графика гармонического колебания*:



1) график волны представляет зависимость смещения всех частиц среды от ***расстояния*** до источника колебаний *в данный момент времени* $\xi = \xi(x, t = \text{const})$;
2) график гармонического колебания это зависимость смещения *данной частицы* от ***времени*** $\xi = \xi(x = \text{const}, t)$.

Длиной волны λ называется расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе.

Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется гармоническая волна за время, равное периоду колебаний T:

$$\lambda = \upsilon T \quad \text{или} \quad \upsilon = \lambda n,$$

где n – частота колебаний, υ – скорость распространения волны.

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Бегущими волнами называются волны, которые переносят в пространстве энергию.

Перенос энергии количественно характеризуется ***вектором плотности потока энергии*** (*вектор Умова*). Направление этого вектора совпадает с направлением распространения энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно волне.

Волна называется ***плоской***, если её волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу.

Волна называется ***сферической***, если её волновые поверхности имеют вид концентрических сфер. Центры этих сфер называются ***центром волны***.

<u>Уравнение плоской волны</u>

Пусть точки, которые расположены в плоскости $x=0$, колеблются по закону $\xi(0,t)=A\cos\omega t$. И пусть υ – скорость распространения колебаний в данной среде.

Колебания частицы B среды (см. рисунок), расположенной на расстоянии x от источника колебаний O, будут происходить по тому же закону. Но поскольку для прохождения волной расстояния x требуется время $\tau=x/\upsilon$, то её колебания будут отставать по времени от колебания источника на τ.

Уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x, имеет вид

$$\boxed{\xi(x,t)=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{\upsilon}\right).}$$

УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ И ВОЛН

В общем случае ***уравнение плоской волны***, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в среде, не поглощающей энергию, имеет вид:

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right],$$

здесь: $A = \mathrm{const}$ – ***амплитуда волны***; ω – циклическая частота;

φ_0 – ***начальная фаза волны***; $\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0$ – ***фаза плоской волны***.

Если определить ***волновое число:*** $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}$,

то уравнение плоской бегущей волны можно записать в виде:

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

или в экспоненциальной форме: $\xi(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$,

В общем виде уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении $\vec{s}$, имеет вид: $\xi(\vec{r},t) = A\exp[i(\omega t - k\vec{r}\vec{s} + \varphi_0)]$.

<u>Уравнение сферической волны</u> $\xi(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$,

где r – расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.

Амплитуда колебаний в сферической волне убывает с расстоянием по закону $\frac{1}{r}$.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Распространение волн в *однородной изотропной* среде в общем случае описывается ***волновым уравнением*** – дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta \xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

где υ – фазовая скорость;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ – ***оператор Лапласа***.

Решением волнового уравнения является уравнение любой волны (в том числе и плоская, и сферическая волны).

Волновое уравнение для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько волн, ***линейна***, то к этим волнам применим ***принцип суперпозиций (наложения) волн.***

При распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвующие в каждом из слагающих волновых процессов.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ (1)

Две волны называются ***когерентными***, если разность их фаз не зависит от времени.

Гармонические волны, имеющие одинаковую частоту, когерентны всегда.

Интерференцией волн называется *явление наложения волн*, при котором происходит устойчивое во времени их взаимное *усиление* в одних точках пространства и *ослабление* в других в зависимости от соотношения между фазами этих волн.

Особым случаем интерференции являются стоячие волны.

Стоячие волны – это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Пусть две плоские бегущие волны с одинаковыми амплитудами и частотами распространяются навстречу друг другу вдоль оси x:

$$\boxed{\xi_1 = A\cos(\omega t - kx), \qquad \xi_2 = A\cos(\omega t + kx).}$$

Сложив эти уравнения, с учётом $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ и $k = 2\pi/\lambda$, получим ***уравнение стоячей волны***:

$$\boxed{\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos kx \cos\omega t = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t.}$$

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ (2)

В точках среды, где

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$$

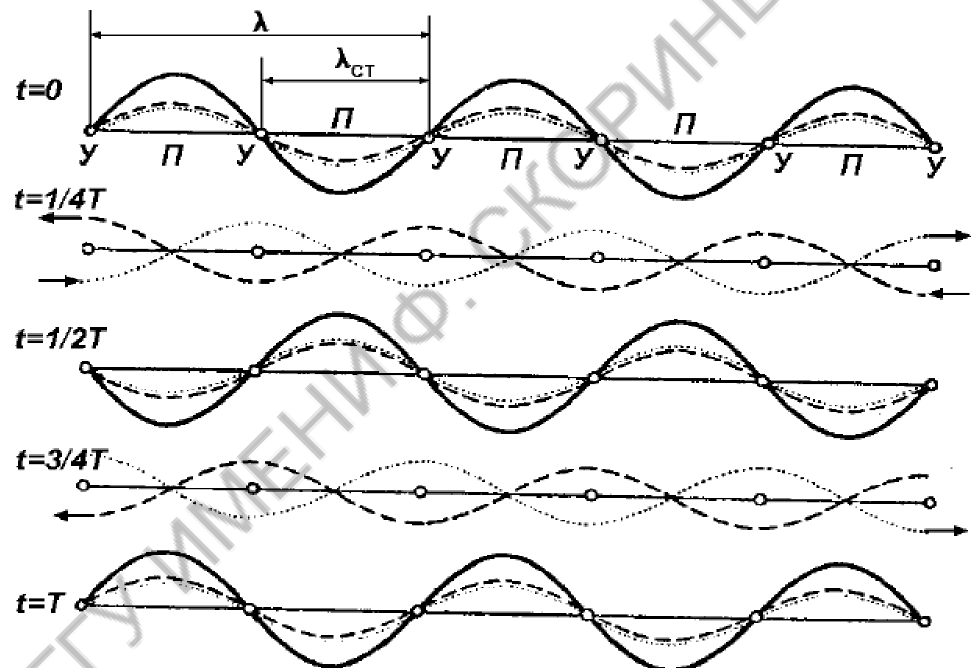
$$(m = 0, 1, 2, \ldots)$$

амплитуда стоячей волны достигает максимального значения $A_{CT} = 2A$.

Такие точки называются ***пучностями стоячей волны***.

Координаты пучностей

$$x_{\Pi} = \pm m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, \ldots).$$



В точках среды, где

$\dfrac{2\pi x}{\lambda} = \pm\left(m + \dfrac{1}{2}\right)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$, амплитуда стоячей обращается в нуль $A_{CT} = 0$. Такие точки называются ***узлами стоячей волны***.

Координаты узлов:
$$x_{У} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Расстояния между двумя соседними узлами и между двумя соседними пучностями одинаковы и равны половине длины волны λ бегущих волн. Эту величину называют ***длиной стоячей волны***: $\lambda_{CT} = \dfrac{\lambda}{2}$.

ХАРАКТЕРНЫЕ ОТЛИЧИЯ В ПОВЕДЕНИИ БЕГУЩЕЙ И СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ

<table>
<tr><th>В бегущей волне</th><th>В стоячей волне</th></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Амплитуда колебаний</td></tr>
<tr><td>все точки волны совершают колебания с одинаковой амплитудой</td><td>все точки между двумя узлами колеблются с разными амплитудами</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Фаза колебаний</td></tr>
<tr><td>фаза колебаний зависит от координаты x рассматриваемой точки</td><td>все точки между двумя узлами колеблются с одинаковыми фазами</td></tr>
<tr><td></td><td>при переходе через узел фаза колебаний изменяется на π;
точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Перенос энергии</td></tr>
<tr><td>энергия колебательного движения переносится в направлении распространения бегущей волны</td><td>переноса энергии нет, лишь в пределах $\lambda/2$ происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно</td></tr>
</table>