ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Колебаниями называются движения или процессы, которые обладают определённой повторяемостью *во времени*.

Колебания сопровождаются попеременным *превращением энергии* одного вида в энергию другого вида.

Колебания называются ***свободными*** (или ***собственными***), если они совершаются за счёт первоначально сообщённой энергии, *без* дальнейшего внешнего воздействия на колебательную систему (систему, совершающую колебания). Колебания называются ***вынужденными***, если они происходят под действием периодически изменяющейся *внешней* силы.

Гармоническими колебаниями называются колебания, при которых колеблющаяся физическая величина изменяется по закону синуса (или косинуса).

Различные ***периодические процессы*** (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) могут быть представлены в виде *суммы* (суперпозиции) гармонических колебаний.

Гармоническое колебание величины s описывается уравнением типа

$$\boxed{s = A \cdot \cos(\omega t + \varphi),}$$

где: A – *амплитуда колебания* – максимальное значение колеблющейся величины;

ω – *круговая* (*циклическая*) *частота*;

φ – *начальная фаза колебания* в момент времени $t = 0$;

$(\omega t + \varphi)$ – *фаза колебания* в момент времени t.

ПЕРИОД И ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ

Периодом колебаний T называется *наименьший* промежуток времени, по истечении которого *повторяются* состояния колеблющейся системы (совершается одно полное колебание) и фаза колебания получает приращение 2π

$$\omega(t+T)+\varphi=(\omega t+\varphi)+2\pi.$$

Откуда следует

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Частотой колебаний n называется величина обратная периоду колебаний – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$n=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}.$$

Единица частоты – герц (Гц) – частота периодического процесса, при котором за 1 секунду совершается один цикл колебаний.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Первая (скорость) и вторая (ускорение) производные по времени от гармонически колеблющейся величины s также совершают гармонические колебания с той же циклической частотой:

$$\dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

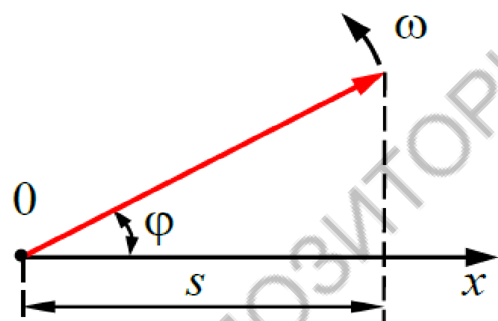
$$\ddot{s} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi).$$

Из последнего уравнения видно, что s удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 s = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{s} + \omega^2 s = 0.$$

Это уравнение называется ***дифференциальным уравнением гармонических колебаний***. Его решение

$$s = A\cdot\cos(\omega t + \varphi).$$

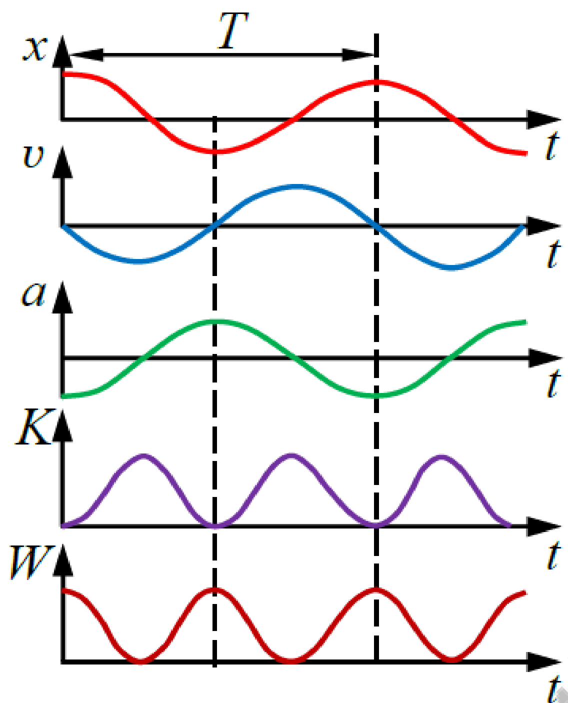


Гармонические колебания изображаются графически ***методом вращающегося вектора амплитуды*** или ***методом векторных диаграмм***.

Из произвольной точки O, выбранной на оси x, под углом φ, равным начальной фазе колебания, откладывается вектор $\vec{A}$, модуль которого равен амплитуде A, рассматриваемого колебания. Если этот вектор будет *вращаться* вокруг точки O с угловой скоростью ω, то проекция вектора на ось x будет совершать колебания по закону $s = A\cdot\cos(\omega t + \varphi)$.

МЕХАНИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Пусть материальная точка совершает *прямолинейные* гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда для колеблющейся точки



смещение: $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$,

скорость: $\upsilon = \dot{x} = -A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

ускорение:

$$a = \dot{\upsilon} = \ddot{s} = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi).$$

Амплитуды скорости и ускорения равны $A\omega$ и $A\omega^2$.

Фаза скорости отличается от фазы смещения на $\dfrac{\pi}{2}$, а фаза ускорения на π.

Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m, равна

$$F = ma = m \cdot A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 x.$$

Таким образом, сила *пропорциональна смещению* материальной точки и *направлена* в сторону, противоположную смещению (*к положению равновесия*). Такая зависимость от смещения характерна для упругих сил и поэтому силы, которые аналогичным образом зависят от смещения, называются ***квазиупругими***.

ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Кинетическая энергия материальной точки

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{mA^2\omega^2}{4}[1 - \cos 2(\omega t + \varphi)].$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием квазиупругой силы:

$$W = -\int_0^x F\,\mathrm{d}x = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{mA^2\omega^2}{4}[1 + \cos 2(\omega t + \varphi)].$$

Полная энергия $$E = K + W = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

остаётся постоянной, с течением времени происходит только превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно.

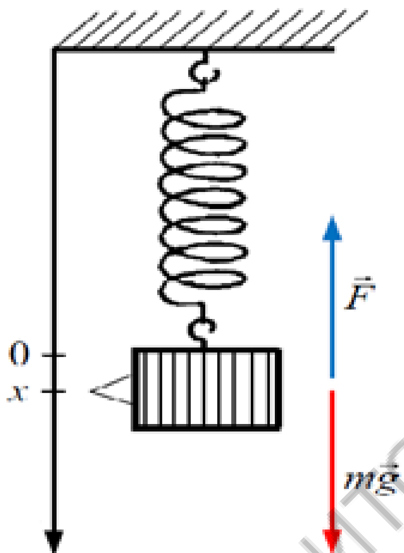
ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЯТОР

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые дифференциальным уравнением:

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0 .$$

Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, математический и физический маятники и электрический колебательный контур.

Пружинный маятник – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы: $F = -kx$, где k – жёсткость пружины.



Уравнение движения маятника:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 .$$

Сравнивая это уравнение с уравнением движения гармонического осциллятора $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$, мы видим, что пружинный маятник совершает колебания по закону $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ с циклической частотой и периодом

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Потенциальная энергия пружинного маятника:

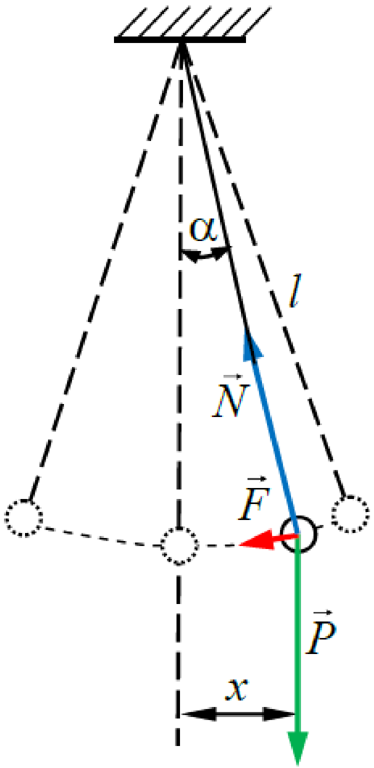
$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{kx^2}{2} .$$

Если на маятник действует сила трения, пропорциональная скорости $F_{\text{тр}} = -r\dot{x}$, где r – коэффициент сопротивления, то колебания маятника будут затухающими, и закон движения маятника будет иметь вид $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$ или

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 .$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Математическим маятником называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длинной l, и колеблющейся под действием силы тяжести без трения.



Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжёлый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити.

При малых углах отклонения α можно считать $x \approx l\alpha$.

Возвращающая сила:

$$F = P\sin\alpha \approx mg\alpha = mg\frac{x}{l}.$$

Уравнение движения:

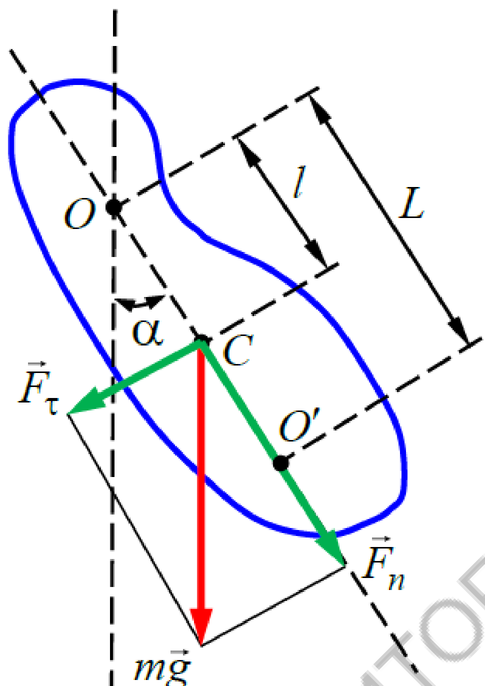
$$m\ddot{x} = -F = -mg\frac{x}{l} \qquad \text{или} \qquad \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0.$$

Следовательно, движение математического маятника описывается дифференциальным уравнением гармонических колебаний, то есть происходит по закону $x = A\cdot\cos(\omega t + \varphi)$ с частотой и периодом, соответственно:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК (1)

Физическим маятником называется твёрдое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела.



Если физический маятник отклонён из положения равновесия на некоторый угол α, то момент возвращающей силы:

$$M = J\beta = J\ddot{\alpha}.$$

С другой стороны, при малых углах:

$$M = F_\tau l = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha,$$

где J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса O;

l – расстояние между точкой подвеса и центром масс C маятника;

$F_\tau = -mg\sin\alpha$ – возвращающая сила (со знаком минус, поскольку она всегда направлена противоположно направлению увеличения α).

Следовательно, $J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0$, или

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК (1)

Таким образом, при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания $\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ с циклической частотой и периодом:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

где длина $L = \dfrac{J}{ml}$ – называется приведённой длиной физического маятника.

Приведённая длина физического маятника – это длина такого математического маятника, который имеет такой же период колебаний, что и данный физический маятник.

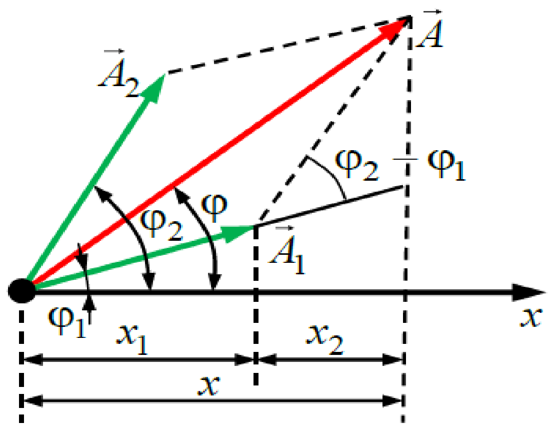
Точка O' на продолжении прямой OC, отстоящая от оси подвеса на расстоянии приведённой длины L, называется ***центром качаний*** физического маятника.

Математический маятник можно представить как *частный* (*предельный*) *случай физического маятника*, вся масса которого сосредоточена в его центре масс. При этом $J = ml^2$, следовательно:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Если система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах, то под сложением колебаний понимают нахождение закона, описывающего результирующий колебательный процесс.



Для сложения колебаний x_1 и x_2:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

используем ***метод вращающегося вектора амплитуды*** (***метод векторных диаграмм***).

Так как векторы A_1 и A_2 вращаются с одинаковой угловой скоростью ω, то разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ между ними остаётся постоянной. Уравнение результирующего колебания будет

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где амплитуда A и начальная фаза φ задаются соотношениями

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Сумма двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты ***есть гармоническое колебание*** в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний:

1) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$, где $(m = 0,1,2,\ldots)$, тогда $A = A_1 + A_2$;

2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$, где $(m = 0,1,2,\ldots)$, тогда $A = |A_1 - A_2|$.

Разложение Фурье

Любое сложное периодическое колебание $s = f(t)$ можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний с циклическими частотами, кратными основной циклической частоте ω_0:

$$s = f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} A_m \cos(m\omega_0 t + \varphi_m).$$

Такое представление периодической функции $f(t)$ называется ***разложением её в ряд Фурье*** или ***гармоническим анализом сложного периодического колебания.***

Члены ряда Фурье, соответствующие гармоническим колебаниям с циклическими частотами ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$ и т. д., называются ***первой*** (или ***основной***), ***второй, третьей*** и т. д., ***гармониками*** сложного периодического колебания $s = f(t)$.

Совокупность этих гармоник образует ***спектр колебания*** $s = f(t)$.

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты

Пусть два гармонических колебания одинаковой частоты ω, происходят во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y. Для простоты выберем начало отсчёта так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю:

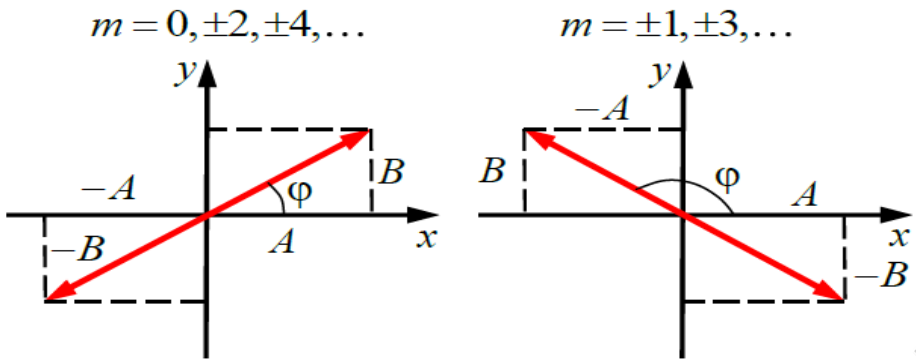
$$x = A\cos\omega t, \qquad y = B\cos(\omega t + \alpha),$$

где α – разность фаз колебаний, а A и B – их амплитуды. Уравнение траектории результирующего колебания (исключая t из уравнений) есть ***уравнение эллипса,*** произвольно расположенного относительно координатных осей:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\alpha,$$

и такие колебания называются ***эллиптически поляризованными***.

<u>Линейно поляризованные колебания</u>



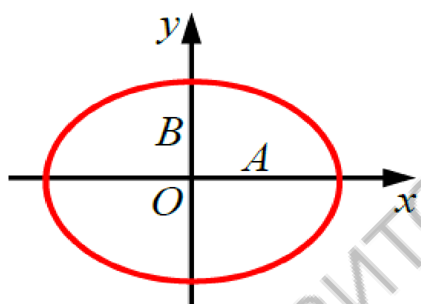
Если разность фаз равна $\alpha = m\pi \; (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то эллипс вырождается в отрезок ***прямой***

$$y = \pm {}^{B}\!/_{A}\, x,$$

где знак плюс соответствует нулю и чётным значениям m, а знак минус – нечётным значениям m.

Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$ и совершается вдоль прямой, составляющей с осью x угол $\varphi = \mathrm{arctg}({}^{B}\!/_{A} \cos m\pi)$. Такие колебания называются **линейно поляризованными колебаниями**.

<u>Циркулярно поляризованные колебания</u>



Если разность фаз $\alpha = (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$, где $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам A и B.

Если $A = B$, то эллипс вырождается в окружность, и такие колебания называются ***циркулярно поляризованными*** или ***колебаниями, поляризованными по кругу***.