# МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
# МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

***Моментом инерции материальной точки*** относительно оси вращения называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния от оси.

$$J_i = m_i r_i^2 .$$

***Моментом инерции системы*** (тела) *относительно оси вращения* называется физическая величина, равная сумме произведений масс $n$ материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси.

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Момент инерции тела зависит от того, относительно какой оси оно вращается и как распределена масса тела по объёму.

**Моменты инерции однородных тел массой $m$, имеющих правильную геометрическую форму и равномерное распределение массы по объёму.**

| Тело | Положение оси вращения | Момент инерции |
|---|---|---|
| Полый тонкостенный цилиндр радиуса $R$ | Ось симметрии | $mR^2$ |
| Сплошной цилиндр или диск радиуса $R$ | Ось симметрии | $\frac{1}{2}mR^2$ |
| Прямой тонкий стержень длиной $l$ | Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину | $\frac{1}{12}ml^2$ |
| Шар радиусом $R$ | Ось проходит через центр шара | $\frac{2}{5}mR^2$ |

## ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера:**

момент инерции тела $J$ относительно произвольной оси $z$ равен сумме момента его инерции $J_C$ относительно параллельной оси, проходящей через центр масс $C$ тела, и произведения массы $m$ тела на квадрат расстояния $a$ между осями.

$$\boxed{J_z = J_C + ma^2}$$

Например, момент инерции прямого тонкого стержня длиной $l$ относительно оси, которая перпендикулярна стержню и проходит через его конец (эта ось отстоит на $l/2$ от оси, проходящей через центр стержня):

$$\boxed{J_z = \boxed{J_C} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{12}ml^2} + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2}.$$

Таким образом, величина момента инерции зависит от выбора оси вращения.

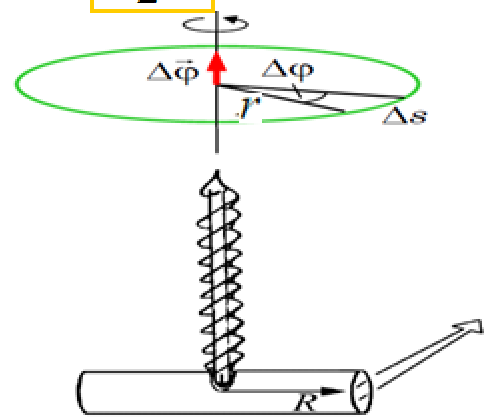
## ЭНЕРГИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Абсолютно твёрдое тело вращается около неподвижной оси $z$, проходящей через него. Все точки тела движутся с одинаковой угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Кинетическая энергия тела:

$$\boxed{K_{\text{вр}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \boxed{\frac{J_z \omega^2}{2}},$$

т.к. линейная скорость $v$ связана с угловой скоростью $\omega$ и радиусом траектории $r$ (см. рис.) соотношением:

$$\boxed{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \boxed{\omega r}$$




где $J_z$ – момент инерции тела относительно оси $z$.

Если тело совершает поступательное и вращательное движения одновременно, то его полная кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий.

$$\boxed{K = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_z \omega^2}{2}}.$$

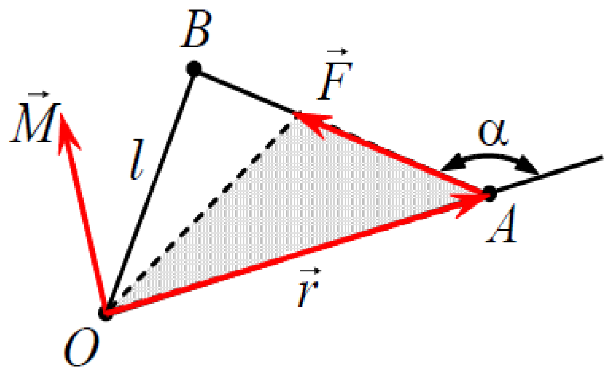
Из сопоставления формул кинетической энергии для поступательного и вращательного движений видно, что ***мерой инертности при вращательном движении служит момент инерции тела.***

# МОМЕНТ СИЛЫ

***Моментом силы*** $\vec{F}$ **относительно неподвижной точки** $O$ называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки $O$ в точку $A$ приложения силы, на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Модуль момента силы: $\boxed{M = Fr\sin\alpha = Fl}$, где $l = r\sin\alpha$ – ***плечо силы*** – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой $O$; $\alpha$ – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$.




***Моментом силы относительно неподвижной оси*** $z$ – называется *скалярная* величина $\boxed{M_z}$, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определённого относительно произвольной точки $O$ данной оси $z$. Значение момента не зависит от выбора положения точки $O$ на оси $z$.

# ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ. МОМЕНТ ВРАЩЕНИЯ (СИЛЫ).

При повороте тела под действием силы $\vec{F}$ на бесконечно малый угол $\mathrm{d}\varphi$ точка приложения силы $A$ проходит путь $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi$, и работа равна:

$$\mathrm{d}A = F\sin\alpha\, r\,\mathrm{d}\varphi = \boxed{M_z\,\mathrm{d}\varphi}.$$

Работа вращения тела идёт на увеличение его кинетической энергии:

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}K = \mathrm{d}\left((J_z\omega^2)/2\right) = \boxed{J_z\omega\,\mathrm{d}\omega}.$$

Тогда $\boxed{M_z\,\mathrm{d}\varphi = J_z\omega\,\mathrm{d}\omega}$, или $\boxed{M_z\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = J_z\omega\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}$, откуда следует ***уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела***: $\boxed{M_z = J_z\cdot\beta}$.

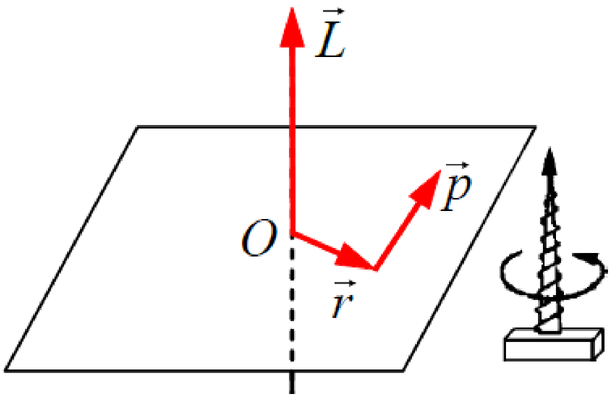
т.е. момент силы $M_z$ относительно неподвижной оси z равен произведению момента инерции $J_z$ на угловое ускорение $\beta$ *(это при вращении!!!)*

*Если ось вращения совпадает с главной осью инерции*, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство $\vec{M} = J\cdot\vec{\beta}$, где $J$ – ***главный момент инерции тела*** (момент инерции относительно главной оси).

$$M_z = J_z\cdot\beta.$$

$$\vec{M} = J\cdot\vec{\beta}.$$

# МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И ЗАКОН ЕГО СОХРАНЕНИЯ




$$\vec{L}=[\vec{r},\vec{p}]=[\vec{r},m\vec{\upsilon}].$$

***Моментом импульса относительно неподвижной оси** $z$* называется скалярная величина $L_z$, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определённого относительно произвольной точки $O$ данной оси. Значение момента импульса $L_z$ не зависит от положения точки $O$ на оси $z$.

***Момент импульса твёрдого тела*** относительно оси есть *сумма моментов* импульса отдельных частиц:

$$L_z=\sum_{i=1}^{n}m_i\upsilon_i r_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\omega r_i^2=J_z\omega$$

Продифференцируем по времени:

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J_z\beta=M_z.$$

В векторной форме: $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{L}}$ – **ещё одна форма *уравнения динамики вращательного движения* твёрдого тела**.

В замкнутой системе момент внешних сил $\vec{M}=0$, следовательно, и $\dot{\vec{L}}=0$.

**Закон сохранения момента импульса:** *момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени*:

$$\vec{L}=\mathrm{const}$$
$$J_z\omega=\mathrm{const}$$

Это – фундаментальный закон природы.

## ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА И ЕГО ВРАЩЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

| Поступательное движение | | Вращательное движение | |
|---|---|---|---|
| Масса | $m$ | Момент инерции | $J = m \cdot r^2$ |
| Перемещение | $\mathrm{d}\vec{r}$ | Угловое перемещение | $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ |
| Скорость | $\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}}$ | Угловая скорость | $\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$ |
| Ускорение | $\vec{a} = \dot{\vec{\upsilon}}$ | Угловое ускорение | $\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}}$ |
| Сила | $\vec{F}$ | Момент силы | $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ |
| Импульс | $\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$ | Момент импульса | $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = J \cdot \vec{\omega}$ |
| Работа | $\mathrm{d}A = F_s \, \mathrm{d}s$ | Работа | $\mathrm{d}A = M_z \, \mathrm{d}\varphi$ |
| Кинетическая энергия | $m\upsilon^2 / 2$ | Кинетическая энергия | $J_z \omega^2 / 2$ |
| Основное уравнение динамики | $\vec{F} = m\vec{a}$<br>$\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ | Основное уравнение динамики | $\vec{M} = J \cdot \vec{\beta}$<br>$\vec{M} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ |

***Последняя строка таблицы - это сходство законов (основных уравнений) поступательного и вращательного движения***

# ДЕФОРМАЦИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

***Деформация*** – это изменение формы и размеров твёрдых тел под действием внешних сил.

***Пластическая деформация*** – это деформация, которая сохраняется в теле после прекращения действия внешних сил.

*Деформация называется* ***упругой***, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму.

***Напряжение*** $\sigma$ – это физическая величина, численно равная упругой силе $\mathrm{d}\vec{F}_{\text{elastic}}$, приходящейся на единицу площади $\mathrm{d}S$ сечения тела:

$$\vec{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_{\text{el}}}{\mathrm{d}S}$$

Если сила направлена по нормали к поверхности, *то напряжение* ***нормальное***, если – по касательной, то *напряжение* ***тангенциальное***.

***Относительная деформация*** – количественная мера, характеризующая степень деформации и определяемая отношением абсолютной деформации $\Delta x$ к первоначальному значению величины $x$, характеризующей форму или размеры тела:

$$\frac{\Delta x}{x}$$

– ***относительное изменение длины*** $l$ ***стержня*** (продольная деформация) $\varepsilon$:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

– ***относительное поперечное растяжение (сжатие)*** $\varepsilon'$,

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$$

где $d$ – диаметр стержня.

Деформации $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ всегда имеют разные знаки: $\varepsilon' = -\mu\varepsilon$,

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon$$

где $\mu$ – положительный коэффициент, зависящий от свойств материала и называемый ***коэффициентом Пуассона***.

# ДИАГРАММА НАПРЯЖЕНИЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА. ЗАКОН ГУКА.

Для малых деформаций относительная деформация $\varepsilon$ пропорциональна напряжению $\sigma$: $\boxed{\sigma = E\varepsilon}$

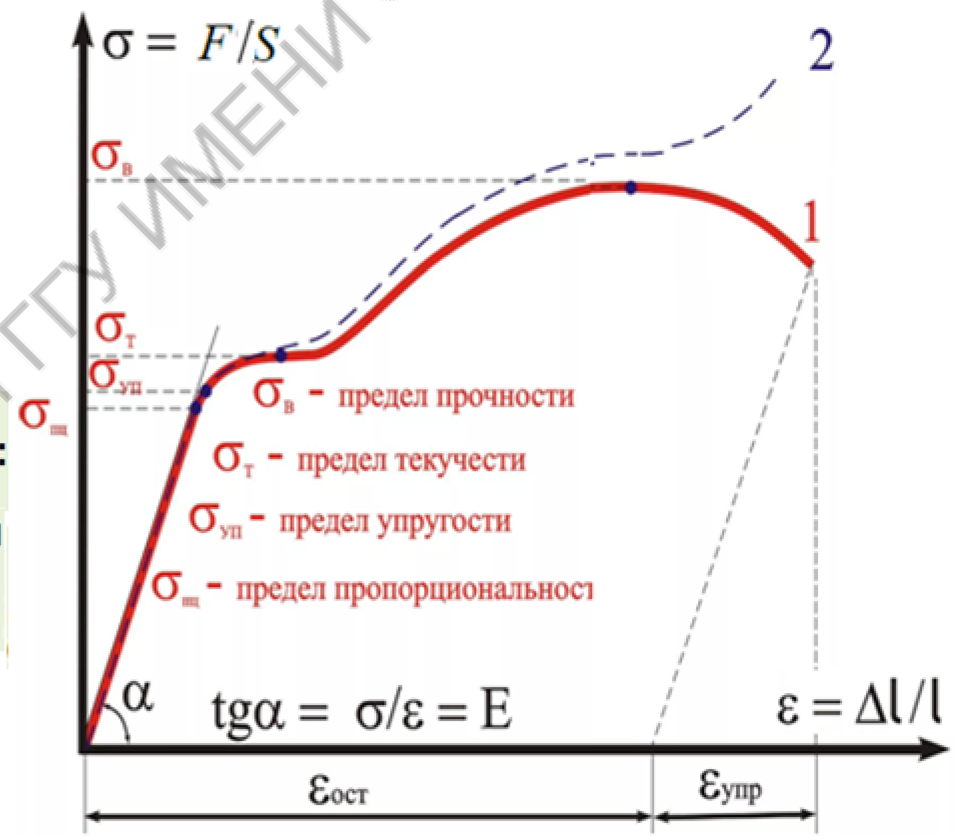
Здесь $E$ – коэффициент пропорциональности (модуль упругости), численно равный напряжению, которое возникает при относительной деформации, равной единице.

Для случая одностороннего растяжения (сжатия) модуль упругости называется ***модулем Юнга***.

Записав $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{F}{ES}$,

получим:

$\boxed{F = \dfrac{ES}{l}\Delta l = k \cdot \Delta l}$ – **закон Гука:** удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе ( $k$ – коэффициент упругости).



# МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ

***Давлением жидкости*** называется физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади: $\Rightarrow$ $p = \dfrac{\Delta F}{\Delta S}$

***Единица давления* – паскаль (Па)**. 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределённой по нормальной к ней поверхности площадью 1 м$^2$ (1 Па= 1 Н/м$^2$).

Давление при равновесии жидкостей или газов подчиняется **закону Паскаля:** Давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причём давление одинаково передаётся по всему объёму, занятому покоящейся жидкостью.

Если жидкость ***несжимаема***, то её плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении $S$ столба жидкости, его высоте $h$ и плотности $\rho$ вес $P = \rho g S h$, а давление на нижнее основание изменяется ***линейно*** с высотой:

$$\boxed{p = \frac{P}{S} = \frac{\rho g S h}{S} = \rho g h}.$$

Давление $\rho g h$ называется ***гидростатическим***.

Сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость действует сила, определяемая **законом Архимеда:** на тело, погруженное в жидкость или газ, действует со стороны этой жидкости (газа) направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):

$$\boxed{F_A = \rho g V},$$

где $\rho$ – плотность жидкости, $V$ – объём погруженного в жидкость тела.

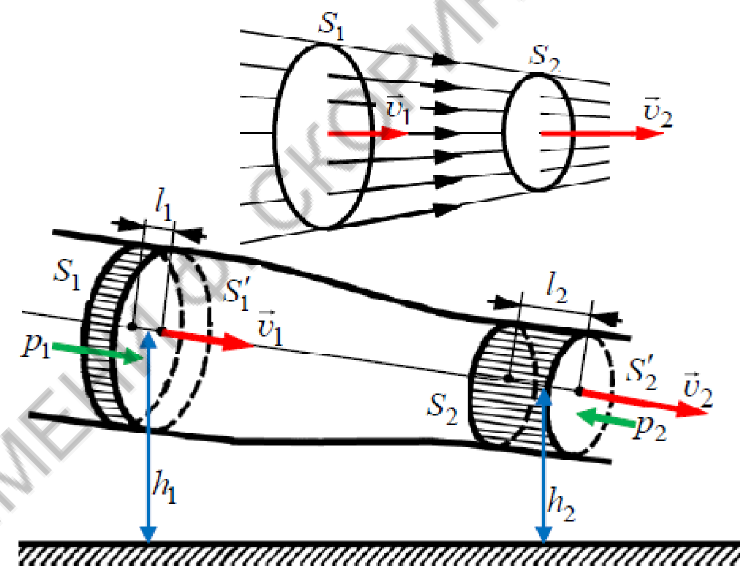
# УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Движение жидкости называется ***течением***, а совокупность частиц движущейся жидкости – ***потоком***.

Графически движение жидкостей изображается с помощью ***линий тока***.

Линии тока проводятся так, чтобы густота их была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течёт медленнее.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется ***трубкой тока***.




Течение жидкости называется ***установившимся*** (или ***стационарным***), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой её точке со временем не изменяются.

Рассмотрим трубку тока, выбрав два сечения $S_1$ и $S_2$, перпендикулярные направлению скорости. За время $\Delta t$ через сечение $S$ проходит объём жидкости $Sv\Delta t$. Если жидкость несжимаема, то через $S_2$ за 1 с пройдёт такой же объём жидкости, что и через $S_1$:

$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2}$ или $\boxed{Sv = \text{const}}$ – ***уравнение неразрывности***.

*Произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.*

# УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО

В стационарно текущей *идеальной жидкости* выбираем трубку тока, ограниченную сечениями $S_1$ и $S_2$. По закону сохранения энергии изменение полной энергии жидкости массой $m$ в местах сечений $S_1$ и $S_2$ равно работе внешних сил по перемещению этой массы жидкости: $\boxed{E_2 - E_1 = A}$

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \quad E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2, \quad \boxed{A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \quad l_1 = v_1 \Delta t, \quad l_2 = v_2 \Delta t,}$$

$$\boxed{F_1 = p_1 S_1, \quad F_2 = -p_2 S_2.}$$

Следовательно: $\boxed{\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t}$.

Согласно уравнению непрерывности, объём, занимаемый жидкостью:

$$\boxed{\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t}.$$

Используя $\boxed{m = \rho \Delta V}$, где $\rho$ – плотность жидкости, получим

$$\boxed{\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \mathrm{const} \text{ – } \textbf{\textit{уравнение Бернулли}},}$$

где $p$ – ***статическое давление*** (давление жидкости на поверхности обтекаемого тела); $\rho g h$ – ***гидростатическое давление***; $\frac{\rho v^2}{2}$ – ***динамическое давление***.

1) Уравнение Бернулли – это выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости.

2) Из уравнения Бернулли и уравнения неразрывности следует, что при течении жидкости по трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах.