3 Интервальные оценки неизвестных параметров распределения

1. Доверительные пределы для неизвестного параметра теоретического распределения.
2. Доверительные интервалы для неизвестного параметра теоретического распределения.
3. Построение доверительных интервалов для неизвестных параметров нормального распределения.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка из распределения $F(x|\theta)$, зависящего от неизвестного параметра θ. Статистика $\theta_B = \theta_B(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *односторонним верхним доверительным пределом* для неизвестного параметра θ с надежностью (доверительной вероятностью) P или с уровнем значимости $\alpha = 1 - P$, если

$$P\{\theta < \theta_B\} = P, \quad (0{,}5 < P < 1).$$

Статистика $\theta_H = \theta_H(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *односторонним нижним доверительным пределом* для неизвестного параметра θ с надежностью P или с уровнем значимости $\alpha = 1 - P$, если

$$P\{\theta > \theta_H\} = P.$$

При этом интервалы $(-\infty, \theta_B)$ и $(\theta_H, +\infty)$ называются соответственно *верхним* и *нижним односторонними (левосторонним и правосторонним) доверительными интервалами* для неизвестного параметра θ с надежностью P или с уровнем значимости $\alpha = 1 - P$.

Статистики $\theta_H = \theta_H(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\theta_B = \theta_B(x_1, x_2, ..., x_n)$ называются соответственно *двусторонними нижним и верхним доверительными пределами* для неизвестного параметра θ с надежностью P или с уровнем значимости $\alpha = 1 - P$, если

$$P\{\theta_H < \theta < \theta_B\} = P.$$

При этом интервал (θ_H, θ_B) называется *двусторонним доверительным интервалом* для неизвестного параметра θ с надежностью P или с уровнем значимости $\alpha = 1 - P$.

Оценка параметров нормального распределения. Пусть $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – выборка из нормального распределения $N(a, \sigma^2)$. Требуется построить интервальные оценки для параметров a и σ^2.

Пусть задан некоторый уровень значимости α (надежность $P = 1 - \alpha$). В таблице 5 приводятся доверительные интервалы параметров нормального распределения.

Таблица 5

	Доверительный интервал
Оценка математического ожидания a при известной дисперсии σ^2.	$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha$, u_α – корень уравнения $\Phi(u_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.
Оценка математического ожидания a при неизвестной дисперсии σ^2.	$\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} < a < \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$, $S = \sqrt{S^2}$, $t_{\alpha,n} = t\ \ 100\alpha\%; n$ – 100α-процентная точка распределения Стьюдента с n степенями свободы.
Оценка дисперсии σ^2 при известном математическом ожидании a.	$\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n}} < \sigma^2 < \frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n}}$, $S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$; $\chi^2_{\alpha,n} = \chi^2\ \ 100\alpha\%; n$ – 100α-процентная точка распределения χ^2 с n степенями свободы.
Оценка дисперсии σ^2 при неизвестном математическом ожидании a.	$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}$

Пример 3.1 Предполагая, что выборка X из примера 1.1 получена из нормального распределения, построить доверительные интервалы для математического ожидания при неизвестной дисперсии и для дисперсии при неизвестном математическом ожидании. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

1) Построим доверительный интервал для математического ожидания a при неизвестной дисперсии σ^2. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ (надежность $P = 0{,}95$).

Для математического ожидания доверительный интервал имеет вид:

$$\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2},n-1}<a<\bar{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2},n-1}.$$

Находим значение $100\frac{\alpha}{2}$-процентной точки распределения Стьюдента с $n-1=29$ степенями свободы:

$$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}=t(2{,}5\,\%;\,29)\approx 2{,}045;$$

$\bar{x}\approx 0{,}05$; $\quad S^2=\frac{n}{n-1}\tilde{S}^2\approx 1{,}3$; $S\approx 1{,}14$.

Искомый доверительный интервал имеет вид:

$$0{,}05-\frac{1{,}14}{\sqrt{30}}\cdot 2{,}045<a<0{,}05+\frac{1{,}14}{\sqrt{30}}\cdot 2{,}045;$$

$$-0{,}37<a<0{,}48.$$

Таким образом, математическое ожидание a с вероятностью 0,95 принадлежит интервалу $(-0{,}37;\,0{,}48)$.

2) Построим доверительный интервал для дисперсии при неизвестном математическом ожидании.
Уровень значимости $\alpha=0{,}05$ (надежность $P=0{,}95$).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}.$$

Находим значения $100\frac{\alpha}{2}$-процентной и $100\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-процентной точек распределения χ^2 с $n-1=29$ степенями свободы:

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}=\chi^2(2{,}5\,\%;\,29)\approx 45{,}72;$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}=\chi^2(97{,}5\,\%;\,29)\approx 16{,}05.$$

Следовательно, искомый доверительный интервал имеет вид:

$$\frac{(30-1)1{,}3}{45{,}72}<\sigma^2<\frac{(30-1)1{,}3}{16{,}05};$$

$$0{,}82<\sigma^2<2{,}35.$$

Таким образом, дисперсия σ^2 с вероятностью 0,95 принадлежит интервалу $(0{,}82;\,2{,}35)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение доверительного предела для неизвестного параметра теоретического распределения.
2. Дайте определение доверительного интервала для неизвестного параметра теоретического распределения.
3. Как найти доверительный интервал для математического ожидания в случае нормального теоретического распределения?
4. Как построить доверительный интервал для дисперсии в случае нормального теоретического распределения?