***Практическое занятие 3* Интегрирование функции комплексной переменной**

3.1 Определение и свойства интеграла от функции комплексной переменной
3.2 Основная теорема Коши
3.3 Первообразная и неопределенный интеграл

3.1 Определение и свойства интеграла от функции комплексной переменной

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция комплексной переменной z, определенная на некоторой гладкой кривой Γ с началом в точке z_0 и концом в точке z_1. Кривая Γ может быть как замкнутой, так и незамкнутой. Направление движения по кривой Γ от начальной точки z_0 к конечной точке z_1 называется *положительным* направлением на кривой Γ и обозначается через Γ^+. Противоположное направление на кривой Γ называется *отрицательным* и обозначается Γ^-.

Разобьем кривую Γ на n частичных дуг произвольно выбранными точками ξ_0, ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{n-1}, ξ_n, $\xi_n = z_1$, расположенными последовательно в положительном направлении кривой Γ причем $\xi_0 = z_0$, (рисунок 3. 1). На каждой частичной дуге $\xi_k\xi_{k+1}$, $k = 0,1,\cdots,n-1$, выберем произвольную точку ξ_κ^* и составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_\kappa$, где $\Delta\xi_\kappa = \xi_{\kappa+1} - \xi_\kappa$.

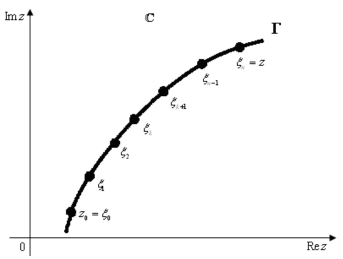

Рисунок 3. 1 – Разбиение кривой Γ

Интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой Γ в выбранном направлении называется предел $\lim\limits_{\max|\Delta\xi_\kappa|\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_k$, не зависящий от способа разбиения кривой Γ на частичные дуги $\xi_\kappa\xi_{\kappa+1}$ и от выбора точек ξ_κ^*, $k = 0,1,\cdots,n-1$:

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \lim_{\max|\Delta\xi_\kappa|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_k .$$

Если для функции $f(z)$, определенной на кривой Γ, данный предел существует, то говорят, что функция $f(z)$ *интегрируема по кривой* Γ. Кривая Γ называется *путем* или *контуром* интегрирования.

Интеграл от функции $f(z)$ в положительном направлении кривой Γ обозначается $\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\,dz$, в отрицательном – $\int\limits_{\Gamma^-} f(z)\,dz$, в случае замкнутого контура Γ – $\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz$.

Т е о р е м а 1 *Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой Γ, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, а начальная и конечная точка дуги соответствуют значениям $t = \alpha$ и $t = \beta$, то интеграл существует $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz$ и справедлива формула*

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f\left(z(t)\right)z'(t)\,dt,\quad z(t) = x(t) + iy(t).$$

Т е о р е м а 2 *(с в я з ь с к р и в о л и н е й н ы м и н т е г р а л о м 2-г о р о д а) Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой Γ, то интеграл $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz$ существует и справедлива формула*

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \int\limits_\Gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int\limits_\Gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy .$$

Интегралы от функций комплексной переменной обладают свойствами:

– *линейность:* если функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой Γ, то для любых c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ имеет место равенство:

$$\int_\Gamma \left[c_1 f(z) \pm c_2 g(z)\right] dz = c_1 \int_\Gamma f(z)\,dz \pm c_2 \int_\Gamma g(z)\,dz\ ;$$

– *ориентированность*: пусть Γ^+ и Γ^- – один и тот же путь интегрирования, проходимый соответственно в положительном или отрицательном направлении кусочно-гладкой кривой Γ, и функция $f(z)$ непрерывна на этой кривой. Тогда

$$\int_{\Gamma^+} f(z)\,dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)\,dz\ ;$$

– *аддитивность*: пусть кривая Γ состоит из кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ и функция $f(z)$ непрерывна на Γ. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\Gamma_n} f(z)\,dz\ ;$$

причем направление на кривых Γ_k, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, совпадает с направлением на кривой Γ;

– если Γ произвольная кусочно-гладкая кривая с началом z_0 и концом z_1, то

$$\int_\Gamma dz = z_1 - z_0\ ;$$

– если Γ гладкая кривая, замкнутая или незамкнутая, имеющая длину L, то

$$\int_\Gamma |dz| = L\ ;$$

– *оценка интеграла*: для любой функции $f(z)$, непрерывной на гладкой кривой Γ, справедливо неравенство:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\Gamma |f(z)||dz|\ ;$$

– если $|f(z)| \le M$, то во всех точках гладкой кривой Γ длины L справедливо неравенство:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le M \cdot L\ .$$

3.2 Основная теорема Коши

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D.

Теорема 3 (Коши) Если функция $f(z)$ аналитическая в области D, ограниченной контуром Γ, и γ – замкнутый контур в D, то $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Если при этом $f(z)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в n-связной области D, внешней границей которой является замкнутый кусочно-гладкий контур γ_0. И пусть $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-1}$ – система замкнутых кусочно-гладких кривых, лежащих в области D и удовлетворяющих следующим условиям:

– кривые γ_k, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, принадлежат внутренности γ_0;

– для любого m, $m = 0, 1, \cdots, n-1$, кривые γ_k при $k \ne m$ лежат во внешности γ_m;

– многосвязная область D получается из односвязной области, ограниченной замкнутой кривой γ_0, если из нее удалить односвязные области, ограниченные замкнутыми кривыми γ_k.

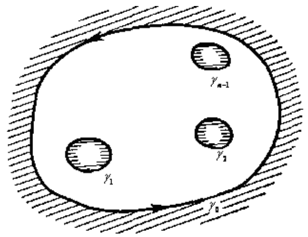

Рисунок 3. 2 – Многосвязная область D

Обозначим через Γ систему контуров, составленную из замкнутой кривой γ_0, проходимой в положительном направлении, и замкнутых кривых γ_k, $k = 0,1,\cdots,n-1$, проходимых в отрицательном направлении (рисунок 3. 2):

$$\Gamma = \gamma_0^+ + \gamma_1^- + \gamma_2^- + \cdots + \gamma_{n-1}^-$$

Теорема 4 Пусть функция $f(z)$ является:

1) аналитической функцией в многосвязной области D, ограниченной системой контуров $\Gamma = \gamma_0^+ + \gamma_1^- + \gamma_2^- + \cdots + \gamma_{n-1}^-$,

2) непрерывной в $\overline{D}$.

Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0 .$$

Из теоремы 4 следует:

$$\oint_{\gamma_0^+} f(z)dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^+} f(z)dz + \cdots + \oint_{\gamma_{n-1}^+} f(z)dz .$$

Теорема 5 Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D. Тогда интеграл от функции $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки z пути интегрирования.

3.3 Первообразная и неопределенный интеграл

Пусть функция $f(z)$ определена в области D (односвязной или многосвязной). *Первообразной* функции $f(z)$ в области D называется такая функция $F(z)$, что в каждой точке $z \in D$ выполняется равенство $F'(z) = f(z)$.

Теорема 6 Если $F(z)$ – первообразная функции $f(z)$ в области D, то совокупность всех первообразных функции $f(z)$ определяется формулой $F(z)+c$, где c – произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных $F(z)$, функции $f(z)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(z)$ и обозначается:

$$\int f(z)dz = F(z) + c .$$

Теорема 7 (формула Ньютона-Лейбница) Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D, то интеграл от $f(z)$ вдоль любого кусочно-гладкого контура, соединяющего две любые точки z_0 и z_1 этой области и лежащего целиком в ней, равен

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_0) .$$

Интегралы от элементарных функций комплексной переменной в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в случае действительной переменной.

Замена переменной в интегралах от функций комплексной переменной производится аналогично случаю функции действительной переменной. Пусть аналитическая функция $z = \varphi(w)$ отображает взаимно однозначно контур γ в плоскости **W** на контур Γ в плоскости □ . Тогда справедлива формула замены переменной:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(\varphi(w))\varphi'(w)dw$$

Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки z_0, или окружностью с центром в точке z_0, то целесообразно использовать замену $z - z_0 = re^{i\varphi}$. В первом случае $\varphi = \mathrm{const}$, а r – действительная переменная интегрирования, во втором случае $r = \mathrm{const}$, а φ – действительная переменная интегрирования.

Вопросы для самоконтроля

1 Какое направление движения по кривой называется: а) положительным, б) отрицательным?

2 Что называется интегралом от функции комплексной переменной?

3 Как связаны интеграл от функции комплексной переменной по кривой и криволинейный интеграл 2-го рода?

4 Перечислите свойства интеграла от функции комплексной переменной.

5 Сформулируйте основную теорему Коши: а) для односвязной области, б) для многосвязной области.

6 Что называется первообразной для функции комплексной переменной?

7 Дайте определение неопределенного интеграла для функции комплексной переменной и запишите формулу Ньютона-Лейбница.

8 По какой формуле осуществляется замена переменной в интеграле от функции комплексной переменной?

9 Для каких путей интегрирования целесообразна замена $z-z_0=re^{i\varphi}$?

Решение типовых примеров

1 Вычислить интегралы

а) $\int\limits_0^i z^2dz$; б) $\oint\limits_{|z-z_0|=R}(z-z_0)^n dz$ при $n\neq 1$; в) $\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{z-z_0}$.

Решение. а) по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int\limits_0^i z^2dz=\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^i=-\frac{i}{3};$$

б) параметрические уравнения окружности с центром в точке z_0 имеют вид:

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos t,\\ y=y_0+R\sin t.\end{cases}$$

Отсюда комплексно-параметрическое уравнение окружности есть

$$z=z_0+R\cdot e^{it},\ 0\le t\le 2\pi .$$

Тогда по теореме 1 получим:

$$\int\limits_{|z-z_0|=R}(z-z_0)^n dz=\left[z=z_0+R\cdot e^{it}\right]=\int\limits_0^{2\pi}\left(R\cdot e^{it}\right)^n R\cdot i\cdot e^{it}dt=$$

$$=i\cdot R^{n+1}\cdot\int\limits_0^{2\pi}e^{i(n+1)t}dt=i\cdot R^{n+1}\cdot\left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{R^{n+1}}{n+1}\cdot\left(\cos 2\pi(n+1)+i\sin 2\pi(n+1)-e^0\right)=\frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1)=0;$$

в) имеем:

$$\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{z-z_0}=\left[z=z_0+R\cdot e^{it}\right]=\int\limits_0^{2\pi}\frac{iR\cdot e^{it}}{R\cdot e^{it}}dt=i\cdot\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi i.$$

2 Вычислить $\int\limits_{\Gamma}\left(\overline{z}+z^2\right)dz$, где Γ – отрезок прямой $y=x$, соединяющий точки $z_0=0$ и $z_1=1+i$.

Решение. <u>1 способ</u>. Так как контур интегрирования – прямая $y=x$, сделаем замену $z=re^{i\varphi}$. Тогда

$$\overline{z}=re^{-i\varphi},\ z^2=r^2e^{2i\varphi},$$

где φ является постоянным и $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Таким образом,

$$z=re^{i\frac{\pi}{4}},\ \overline{z}=re^{-i\frac{\pi}{4}},\ z^2=r^2e^{i\frac{\pi}{2}};\ dz=e^{i\frac{\pi}{4}}dr.$$

В точке $z_0=0$ имеем $r=0$, а в точке $z_1=1+i$ получим:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}.$$

Тогда по теореме 1 получим:

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\overline{z}+z^2\right)dz=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(re^{-i\frac{\pi}{4}}+r^2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}dr=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(r+r^2e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)dr=$$

$$= \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} e^{i\frac{3}{4}\pi} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\cos\frac{3}{4}\pi + i \sin\frac{3}{4}\pi \right) =$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i .$$

<u>2 способ</u>. Выделим действительную и мнимую части исходной функции:

$$\overline{z} + z^2 = x - iy + x^2 - y^2 + 2xyi = \left(x + x^2 - y^2 \right) + i\left(2xy - y \right).$$

Отсюда

$$u(x,y) = x + x^2 - y;$$

$$v(x,y) = 2xy - y .$$

Тогда по теореме 2 получим

$$\int_{\Gamma} \left(\overline{z} + z^2 \right) dz = \int_{\Gamma} \left(x + x^2 - y^2 \right) dx - \left(2xy - y \right) dy +$$

$$+ i \int_{C} \left(2xy - y \right) dx + \left(x + x^2 - y^2 \right) dy = \left[\begin{matrix} y = x; & x_0 = 0 \\ dy = dx; & x_1 = 1 \end{matrix} \right] =$$

$$= \int_0^1 \left(x + x^2 - x^2 - 2x^2 + x \right) dx + i \int_0^1 \left(2x^2 - x + x + x^2 - x^2 \right) dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(x - x^2 \right) dx + 2i \int_0^1 x^2 dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 + 2i \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3}i = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i .$$

3 Вычислить $\int_{\Gamma} \left(z^2 - z \right) dz$, где Γ – часть окружности $|z| = 1$, расположенная в верхней полуплоскости.

Решение. Положим $z = re^{i\varphi}$. Так как $|z| = 1$, то $r = 1$ и $z = e^{i\varphi}$. Тогда $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$ и $0 \le \varphi \le \pi$ по условию.

Тогда по теореме 1 получим

$$\int_{\Gamma} \left(z^2 - z \right) dz = \int_0^{\pi} \left(e^{2i\varphi} - e^{i\varphi} \right) ie^{i\varphi} d\varphi = i \int_0^{\pi} \left(e^{3i\varphi} - e^{2i\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= i \left(\frac{1}{3i} e^{3i\varphi} - \frac{1}{2i} e^{2i\varphi} \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{3}\left(e^{3\pi i} - 1 \right) - \frac{1}{2}\left(e^{2\pi i} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos 3\pi + i \sin 3\pi - 1 \right) - \frac{1}{2}\left(\cos 2\pi + i \sin 2\pi - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-1 - 1 \right) - \frac{1}{2}\left(1 - 1 \right) = -\frac{2}{3} .$$

4 Вычислить $\int_{\Gamma} e^{\overline{z}} dz$, где Γ – отрезок прямой $y = -x$, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi - i\pi$

Решение. Параметрические уравнения контура Γ есть $x = t$, $y = -t$ или $z = t - it$, где действительное t изменяется от 0 до π. Тогда по теореме 1 получим

$$\int_{\Gamma} e^{\overline{z}} dz = \int_0^{\pi} e^{t+it} \left(1 - i \right) dt = \left(1 - i \right) \int_0^{\pi} e^{t(1+i)} dt = \frac{1-i}{1+i} e^{t(1+i)} \Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1-i}{1+i}\left(e^{\pi(1+i)} - 1 \right) = \frac{\left(1 - i \right)^2}{2} \left(e^{\pi} e^{\pi i} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1 - 2i - 1}{2}\left(e^{\pi}\left(\cos\pi + i \sin\pi \right) - 1 \right) = -i\left(e^{\pi}\left(-1 + i \cdot 0 \right) - 1 \right) =$$

$$= \left(e^{\pi} + 1 \right) i .$$

5 Вычислить $\int_{1-i}^{2+i} \left(2z + 3 \right) dz$.

Решение. Функция $f(z) = 2z + 3$ аналитична всюду на $\mathbb{C}$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_{1-i}^{2+i} \left(2z + 3 \right) dz = \left(z^2 + 3z \right) \Big|_{1-i}^{2+i} = \left(2 + i \right)^2 + 3\left(2 + i \right) - \left(1 - i \right)^2 - 3\left(1 - i \right) =$$

$$= 4 + 4i - 1 + 6 + 3i - 1 + 2i + 1 - 3 + 3i = 6 + 12i .$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить интегралы:

1 $\int_{\Gamma}\left(\left(y+1\right)-xi\right)dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=1$, $z_2=-i$.

2 $\int_{\Gamma}\overline{z}\,\mathrm{Re}\,z dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=-2-i$, $z_2=1+2i$.

3 $\int_{\Gamma}\left(1+i-2\overline{z}\right)dz$, где Γ – парабола $y=x^2$, соединяющая точки $z_1=0$, $z_2=1+i$.

4 $\int_{\Gamma}\left(z^2+z\overline{z}\right)dz$, где Γ – дуга окружности $|z|=1$, $0\le\arg z\le\pi$.

5 $\int\limits_{1+i}^{2-i}\left(3z^2+2z\right)dz$.

6 $\int\limits_{0}^{i}z\cos z dz$.

7 $\int_{\Gamma}\mathrm{Re}\,z dz$, где Γ есть кривая $z=\left(2+i\right)t$, $0\le t\le 1$.

8 $\int_{\Gamma}\left(iz^2-2ze^{z^2}\right)dz$, где Γ – произвольная линия, соединяющая точки $z_1=e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_2=i$.

9 $\int_{\Gamma}\left(1+2i-2\overline{z}\right)dz$, где Γ – ломаная $z_1z_2z_3$, где $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=1$.

10 $\int_{c}z\,\mathrm{Im}\,z^2dz$, где Γ есть $|z|=1$ $\left(-\pi\le\arg z\le 0\right)$.

11 $\int\limits_{1+i}^{-1-i}\left(2z+1\right)dz$.

12 $\int_{\Gamma}\ln z dz$, где Γ есть $|z|=1$, обход против часовой стрелки.

13 $\int\limits_{0}^{i+1}z^3dz$.

14 $\int_{\Gamma}\mathrm{Im}\,z dz$, где Γ есть $z=\left(2+3i\right)t$ $\left(0\le t\le 1\right)$.

Задания для домашней работы

Вычислить интегралы:

1 $\int_{\Gamma}\left(x^2+y^2i\right)dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=1+i$, $z_2=2+3i$.

2 $\int_{\Gamma}\left(1+i-2\overline{z}\right)dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=0$, $z_2=1+i$.

3 $\int_{\Gamma}e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,z dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=0$, $z_2=1+i$.

4 $\int_{\Gamma}z\,\mathrm{Re}\,z dz$, где Γ есть $|z|=1$, обход против часовой стрелки.

5 $\int\limits_{1}^{i}ze^{z}dz$.

6 $\int_{\Gamma}\cos z dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=\dfrac{\pi}{2}$, $z_2=\pi+i$.

7 $\int\limits_{1+i}^{2i}\left(z^3-z\right)e^{\frac{z^2}{2}}dz$.

8 $\int\limits_{1}^{i}\dfrac{\ln\left(z+1\right)}{z+1}dz$ по дуге окружности $|z|=1$, $\mathrm{Im}\,z\ge 0$, $\mathrm{Re}\,z\ge 0$.

9 $\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Re} z dz$, где Γ – ломаная, состоящая из отрезка $[0;2]$ действительной оси и отрезка, соединяющего точки $z_1 = 2$, $z_2 = 2 + i$.

10 $\int\limits_{\Gamma} e^{z} dz$, где Γ а) дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$; б) отрезок прямой, соединяющий эти же точки.

11 $\int\limits_{0}^{i} \left(3z^4 - 2z^3\right) dz$.

12 $\int\limits_{\Gamma} z \cdot \overline{z} dz$, где Γ есть $|z| = 1$, обход против часовой стрелки.

13 $\int\limits_{0}^{1+i} \left(z^2 - 2z\right) dz$.

Практическое занятие 4 Интегральная формула Коши

4.1 Интегральная формула Коши

Теорема 1 (интегральная формула Коши) Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D. Тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедливо равенство

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

где Γ – кусочно-гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в области D и охватывающий точку z_0.

Интеграл $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$, стоящий в правой части равенства теоремы 1, называется *интегралом Коши* функции $f(z)$.

Если в условиях теоремы точка z_0 расположена вне области, ограниченной контуром Γ, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

Теорема 2 (о среднем) Значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0 области D, в которой функция $f(z)$ является аналитической, равно среднему арифметическому ее значений на любой окружности с центром в точке z_0, целиком лежащей в области D.

Пусть функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитическая в односвязной области D. Если в области D постоянна действительная часть $u(x,y)$ функции $f(z)$ или постоянен модуль функции $f(z)$, то функция $f(z)$ постоянна в области D.

Теорема 3 (о максимуме модуля) Пусть функция $f(z)$, не равная тождественно постоянной, является аналити-

ческой в области D и непрерывна в $\bar{D}$. Тогда максимальное (минимальное) значение модуля $|f(z)|$ достигается только на границе области $\bar{D}$.

Другими словами, модуль $|f(z)|$ не может достигать максимума (минимума) внутри области D кроме случая, когда $f(z) = \text{const}$.

4.2 Интеграл типа Коши

Пусть в плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$ задана произвольная кусочно-гладкая кривая Γ (замкнутая или незамкнутая) и на ней – произвольная непрерывная функция $f(z)$.

Интеграл

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz,$$

где ζ – произвольная точка комплексной плоскости, не лежащая на кривой Γ, называется *интегралом типа Коши*. Интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши.

Т е о р е м а 4 Пусть Γ – кусочно-гладкая кривая, расположенная в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $f(z)$ – непрерывная функция на этой кривой. Тогда функция $\Phi(\zeta)$ является: а) аналитической в любой области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащей точек кривой Γ, б) бесконечно дифференцируемой в области D, причем ее производная любого порядка n может быть получена по формуле

$$\Phi^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}} dz.$$

С л е д с т в и е 1 Производные любого порядка от функции $\Phi(\zeta)$, аналитической в области D, также являются аналитическими в этой области.

С л е д с т в и е 2 Пусть $f(z)$ аналитическая в области D функция и на ее границе Γ. Тогда функция $f(z)$ бесконечно

дифференцируема в этой области и ее производная n-го порядка в точке $z_0 \in D$ находится по формуле

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

С л е д с т в и е 3 В любой точке z области D, в которой функция $f(z)$ является аналитической, справедливы неравенства Коши

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n! \cdot M(\rho)}{\rho^n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где ρ — радиус произвольной окружности c_ρ с центром в точке z_0, целиком лежащей в области D; $M(\rho)$ – наибольшее значение модуля функции $f(z)$ на окружности c_ρ.

Т е о р е м а 5 (К о ш и - Л и у в и л л я) Если функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ограничена по модулю, то она постоянна.

Т е о р е м а 6 (М о р е р а) Если функция $f(z)$ непрерывна в области D и интеграл $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ, лежащему в области D, то $f(z)$ является аналитической функцией в области D.

Из условия теоремы следует, что в области D интеграл $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ не зависит от пути Γ интегрирования, соединяющего фиксированную точку z_0 с произвольной точкой z (z_0 и z лежат в области D) и определяет аналитическую функцию z

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,$$

для которой $F'(z) = f(z)$, $z \in D$.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему об интегральной формуле Коши.
2 В чем суть теоремы о среднем для функции комплексной переменной?
3 В чем состоит принцип максимума модуля аналитической функции?
4 Какой интеграл называется интегралом типа Коши?
5 Какими свойствами обладает интеграл типа Коши?
6 Сформулируйте теорему Коши-Лиувилля.
7 В чем суть теоремы Морера?

Решение типовых примеров

1 Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$, если Γ есть окружность, определяемая уравнением:

а) $|z-2|=1$; б) $|z-2|=3$; в) $|z-2|=5$.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ будут точки, обращающие в нуль знаменатель, т. е. $z^2-6z=0$. Решая уравнение, получим две особые точки $z_1=0$, $z_2=6$.

а) внутри области D, ограниченной окружностью $|z-2|=1$, нет особых точек функции $f(z)$, т. е. $f(z)$ аналитична в области D. В силу теоремы Коши (практическое занятие 3) имеем

$$\oint\limits_{|z-2|=1}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=0;$$

б) внутри области, ограниченной окружностью $|z-2|=3$, лежит точка $z_1=0$. По интегральной формуле Коши имеем:

$$\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz=2\pi i\frac{e^{z^2}}{z-6}\Big|_{z=0}=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{\pi i}{3};$$

в) в области, ограниченной окружностью $|z-2|=5$, лежат обе особые точки: $z_1=0$ и $z_2=6$. Непосредственно применять интегральную формулу Коши нельзя. Вычислить данный интеграл можно двумя способами.

<u>*1 способ*</u> Разложим дробь $\frac{1}{z^2-6z}$ на простейшие:

$$\frac{1}{z^2-6z}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}.$$

Подставляя в интеграл и применяя интегральную формулу Коши, получим:

$$\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z-6}dz-\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z}dz=$$

$$=\frac{1}{6}2\pi ie^{z^2}\Big|_{z=6}-\frac{1}{6}2\pi ie^{z^2}\Big|_{z=0}=\frac{\pi i}{3}\left(e^{36}-1\right).$$

<u>*2 способ*</u> Построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z_1=0$ и $z_2=6$ малых радиусов таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z-2|\le 5$. В трехсвязной области, ограниченной окружностями $|z-2|=5$, γ_1 и γ_2 подынтегральная функция аналитична всюду. По теореме Коши для многосвязной области (практическое занятие 3) имеем

$$\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=$$

$$=2\pi i\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\Big|_{z=0}+2\pi i\frac{e^{z^2}}{z}\Big|_{z=6}=$$

$$=-\frac{\pi i}{3}+\frac{\pi i}{3}e^{36}=\frac{\pi i}{3}\left(e^{36}-1\right).$$

2 Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{z}\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}dz$, где окружность обходится в положительном направлении.

Решение. Внутри области, ограниченной окружностью $|z|=1$, находится точка $z=0$, в которой знаменатель функции $f(z)=\dfrac{e^z\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}$ обращается в нуль.

Перепишем заданный интеграл так

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}d\zeta=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\dfrac{e^z\cdot\cos\pi z}{z+2}}{z}.$$

Функция $f(z)=\dfrac{e^z\cdot\cos\pi z}{z+2}$ является аналитической в круге $|z|\le 1$. Применяя интегральную формулу Коши в точке $z_0=0$ получим

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}dz=2\pi i\cdot f(0)=2\pi i\cdot\frac{1}{2}=\pi i.$$

3 Вычислить интегралы

а) $\oint\limits_{|z-1|=1}\dfrac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$;   б) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\cos z}{z^3}dz$.

Решение. а) особые точки функции $z_1=1$, $z_2=-1$. В области $|z-1|\le 1$ лежит точка $z_1=1$.

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$f(z)=\frac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}=\frac{\sin\pi z}{(z-1)^2(z+1)^2}=\frac{\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}.$$

Тогда по следствию 2 теоремы 4 получим

$$\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}dz=\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\sin\pi z}{\left(z^2+1\right)^2}\right)'\Bigg|_{z=1}=$$

$$=2\pi i\frac{2\pi\cos\pi-2\sin\pi}{2^3}=2\pi i\cdot\frac{(-2\pi)}{8}=-\frac{\pi^2 i}{2};$$

б) подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ является аналитической в области $|z|\le 1$ всюду, кроме точки $z=0$. Функция $f(z)=\cos z$ является всюду аналитической в круге $|z|\le 1$. При $n=2$ по следствию 2 теоремы 4 имеем

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(0).$$

Так как $f''(z)=-\cos z$ и $f''(0)=-1$, то

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=\pi\cdot i\cdot(-1)=-\pi\cdot i.$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить интегралы (обход по контуру в положительном направлении):

1 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^2+2z}dz$.

2 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z}dz$.

3 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\cos z}{z^3}dz$.

4 $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\dfrac{1}{z^3}\cos\dfrac{\pi}{z+1}dz$.

5 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\operatorname{tg} z}{ze^{\frac{1}{z+2}}}dz$.

8 $\oint\limits_{|z-1|=2}\dfrac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$.

9 $\oint\limits_{|z|=5}\dfrac{dz}{z^2+16}$.

10 $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z\operatorname{sh} z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$.

11 $\oint\limits_{|z-2|=1}\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{\left(z^2+4\right)^2}dz$.

12 $\oint\limits_{|z-3|=6}\dfrac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}$.

6 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z\operatorname{sh} z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$.

7 $\oint\limits_{|z-i|=4} \dfrac{e^{z+1}}{\left(z-1\right)^2\cdot\left(z+2\right)}dz$.

13 $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{e^{z^2}}{z-1}dz$.

14 $\oint\limits_{|z+i|=3} \dfrac{\sin\dfrac{i\pi z}{2}}{\left(z-2\right)z^2}dz$.

Задания для домашней работы

Вычислить интегралы (обход по контуру в положительном направлении):

1 $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}dz$.

2 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin z\,\sin\left(z-1\right)}{z^2-z}dz$.

3 $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}dz$.

4 $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \dfrac{1-\sin z}{z^2}dz$.

5 $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{\cos\left(z+\pi i\right)}{z\left(e^z+2\right)}dz$.

6 $\oint\limits_{|z-3|=6} \dfrac{zdz}{\left(z-2\right)^3\cdot\left(z+4\right)}$.

7 $\oint\limits_{|z-i|=4} \dfrac{\sin z}{z-1}dz$.

8 $\oint\limits_{|z+2|=2} \dfrac{\operatorname{th}\pi z}{z+1}dz$.

9 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz$.

10 $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3}dz$.

11 $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \dfrac{e^{iz}}{\left(z^2-1\right)^2}dz$.

12 $\oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}z}{\left(z-1\right)^2\left(z-3\right)}dz$.

13 $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{dz}{\left(z^2+9\right)\cdot\left(z+9\right)}$.

14 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\operatorname{ch} z\,dz}{\left(z+1\right)^3\cdot\left(z-1\right)}$.

15 $\oint\limits_{|z+2|=4} \dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}}{\left(z+3\right)\cdot\left(z-1\right)^2}dz$.

16 $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{\operatorname{ch} i\dfrac{\pi}{2}z}{\left(z-3\right)^2\left(z-2\right)}dz$.

Практическое занятие 5 **Ряды аналитических функций**

5.1 Ряды комплексных чисел
5.2 Функциональные ряды
5.3 Степенные ряды

5.1 Ряды комплексных чисел

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots ,$$

где $a_k \in \mathbb{C}$, называется *числовым рядом с комплексными членами*, a_k – общим членом ряда.

Если положить $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, α_k, $\beta_k \in \mathbb{R}$, то ряд с комплексными членами запишется в виде $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$.

Сумма $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k + i\beta_k$ называется *частичной* суммой ряда, а сумма $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ называется *остатком* ряда.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ называется *сходящимся*, если существует предел последовательности частичных сумм $\left(S_n\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S ,$$

комплексное число S называется *суммой* ряда.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ сходится, то его общий член $\alpha_k + i\beta_k$ стремится к нулю при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\alpha_k + i\beta_k\right) = 0 .$$

В случае сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ его остаток r_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Добавление или отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\beta_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд с действительными положительными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_k + i\beta_k\right|$. В случае абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\beta_k$ имеем абсолютную сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k$.

Очевидно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\beta_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k$. При этом $S = S_1 + iS_2$, где S_1 – сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$, S_2 – сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k$.

Данное утверждение позволяет проводить исследование сходимости рядов с комплексными членами, основываясь на сходимости рядов с действительными членами. Для исследования применяются признаки сравнения рядов, Даламбера, Коши и другие достаточные признаки сходимости рядов.

5.2 Функциональные ряды

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$, членами которого являются функции $u_k(z)$ комплексной переменной z, называется *функциональным* рядом.

Точка z_0 называется *точкой сходимости* ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$, если сходится соответствующий числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ называется *сходящимся в области* D, если он сходится в каждой точке этой области. Совокупность всех точек сходимости называется *областью сходимости* функционального ряда. В общем случае область сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ может быть многосвязной и замкнутой.

Суммой функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ в области D называется функция $f(z)$, которая в каждой точке $z_0 \in D$ равна значению соответствующего числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$:

$$f(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0).$$

Другими словами, функция $f(z)$ является суммой функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ в точке z_0 области D, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что $\left|f(z_0) - \sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)\right| < \varepsilon$ при $n > N$. В общем случае номер N зависит от выбора значений ε и точек z_0.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ называется *равномерно сходящимся* к функции $f(z)$ в области D, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что $\left|f(z_0) - \sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)\right| < \varepsilon$ при $n > N$ и $\forall\ z \in D$. Значение N зависит только от ε и одинаково для любых $z \in D$.

Т е о р е м а 1 (к р и т е р и й К о ш и) *Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ равномерно сходится в области D тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для любых $k > N$ и $p \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства:*

$$\left|u_{k+1}(z) + u_{k+2}(z) + \ldots + u_{k+p}(z)\right| < \varepsilon, \quad \forall\ z \in D.$$

Т е о р е м а 2 (п р и з н а к В е й е р ш т р а с с а) *Пусть*

1) функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *сходится в области* D*;*

2) члены ряда удовлетворяют неравенствам

$$|u_k(z)| \le a_k, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall z \in D;$$

3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *сходится абсолютно и равномерно в области* D.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *мажорантным* рядом для $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$.

Равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают *свойствами*:

– *непрерывность*: сумма равномерно сходящегося в области D ряда, состоящего из непрерывных функций, есть функция, непрерывная в области D;

– *интегрирование*: равномерно сходящийся в области D ряд непрерывных функций можно интегрировать вдоль любой кусочно-гладкой кривой Γ, целиком лежащей в области D, и справедлива формула

$$\int_{\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Gamma} u_k(z)\,dz;$$

– *дифференцирование* равномерно сходящийся в области D ряд аналитических функций можно дифференцировать любое число раз в области D и справедлива формула

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)}(z).$$

5.3 Степенные ряды

Ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

называется *степенным рядом* по степеням $(z-z_0)$. Здесь $c_k \in \mathbb{C}$ – коэффициенты ряда, $z_0 \in \mathbb{C}$ – фиксированная точка.

Т е о р е м а 3 (А б е л я) *Если степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ *сходится в точке* z_1*, то он сходится во всех точках* z*, удовлетворяющих условию* $|z-z_0| < |z_1-z_0|$*, причем сходимость будет равномерной в любом круге* $|z-z_0| \le R$*,* $R < |z_1-z_0|$*. Если степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ *расходится в точке* z_2*, то он расходится во всех точках* z*, удовлетворяющих условию* $|z-z_0| > |z_2-z_0|$.

Для степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$, имеющего как точки сходимости (кроме z_0, где ряд всегда сходится), так и точки расходимости, всегда существует такое действительное число $R > 0$, что внутри круга $|z-z_0| < R$ ряд сходится, а вне этого круга – расходится.

Область $|z-z_0| < R$ называется *кругом сходимости*, а число R – *радиусом сходимости* степенного ряда.

Радиус сходимости R вычисляется:

– по формуле Коши-Адамара $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}}$,

– по формуле $R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{c_k}{c_{k+1}}\right|$, если этот предел существует.

Если $R=0$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(z-z_0\right)^k$ сходится лишь в точке z_0; если $R=\infty$, то ряд сходится на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Внутри круга сходимости $\left|z-z_0\right|<R$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(z-z_0\right)^k$ сходится к аналитической функции.

Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и почленно дифференцировать любое число раз. При этом радиус сходимости каждого вновь полученного ряда равен радиусу сходимости исходного ряда, а над суммой ряда выполняется то же действие, что и над самим рядом.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте определение ряда комплексных чисел?

2 Как исследовать ряд комплексных чисел на сходимость?

3 Какой ряд с комплексными числами называется абсолютно сходящимся?

4 Какой ряд называется функциональным рядом?

5 Что называется точкой сходимости и областью сходимости функционального ряда?

6 Какой функциональный ряд называется равномерно сходящимся?

7 Какая сходимость функционального ряда сильнее: точечная или равномерная?

8 Перечислите основные свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

9 Какой ряд называется степенным?

10 Что называется: а) радиусом сходимости, б) кругом сходимости степенного ряда?

11 Когда можно почленно дифференцировать и интегрировать степенные ряды?

Решение типовых примеров

1 Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik}}{k^2}$.

Решение. По формуле Эйлера общий член ряда можно записать в виде

$$e^{ik}=\cos k+i\sin k.$$

Рассмотрим два ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k^2} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^2}$$

Так как $\frac{|\cos k|}{k^2}\le\frac{1}{k^2}$ и $\frac{|\sin k|}{k^2}\le\frac{1}{k^2}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, то оба ряда сходятся. Значит, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik}}{k^2}$ сходится.

2 Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(z-z_0\right)^k$.

Решение. Каждый коэффициент ряда равен 1, поэтому радиус сходимости $R=1$. Заданный ряд является рядом геометрической прогрессии, для которого

$$S_n(z)=1+\left(z-z_0\right)+\ldots+\left(z-z_0\right)^n=\frac{1-\left(z-z_0\right)^{n+1}}{1-\left(z-z_0\right)}.$$

Поэтому сумма ряда есть аналитическая функция

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\frac{1}{1-\left(z-z_0\right)}.$$

3 Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(z-i)^k}.$$

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Так как

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)(z-i)^k}{k(z-i)^{k+1}}\right|=\frac{1}{|z-i|},$$

то согласно признаку д'Аламбера ряд сходится абсолютно при условии $\frac{1}{|z-i|}<1$. Отсюда $|z-i|>1$. Значит, ряд сходится абсолютно вне круга с центром в точке $z_0=i$ радиуса 1. При $|z-i|=1$ имеем расходящийся числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} k$.

4 Найти область точечной и равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^k-z^{k+1}\right).$$

Решение. Составим частичные суммы ряда

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\left(z^k-z^{k+1}\right)=1-z^{n+1}.$$

Предел $\lim_{n\to\infty} S_n(z)=\lim_{n\to\infty}\left(1-z^{n+1}\right)$ существует только при $|z|<1$ и в точке $z=1$. Поэтому областью точечной сходимости ряда является область $D=\{z \mid |z|<1 \text{ и } z=1\}$ и сумма ряда в каждой точке этой области равна

$$S(z)=\begin{cases}1 & \text{при } |z|<1,\\ 0 & \text{при } z=1.\end{cases}$$

Рассмотрим остаток ряда

$$r_n(z)=S(z)-S_n(z)=\begin{cases}z^{n+1} & \text{при } |z|<1,\\ 0 & \text{при } z=1.\end{cases}$$

В силу произвольности ε_0, положим $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$. Возьмем последовательность точек $z_n=2^{-\frac{1}{n+1}}e^{-i\varphi_n}$ таких, что $z_n\in D$ и $\forall\ \varphi_n\in\mathbb{R}$. Так как

$$|r_n(z_n)|=\frac{1}{2}>\frac{1}{4},$$

то по определению равномерной сходимости неравенство $|r_n(z)|<\varepsilon$ выполняется не для любого $z\in D$.

Значит, в области D функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^k-z^{k+1}\right)$ сходится неравномерно.

5 Найти область сходимости и область равномерной сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{(k+1)^2 2^k}$.

Решение. Радиус сходимости есть

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}(k+2)^2}{(k+1)^2 2^k}\right|=2.$$

Следовательно, ряд сходится в круге $|z-i|<2$. На границе круга при $|z-i|=2$ получим ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}$, который является сходящимся. Поэтому исходный ряд сходится в замкнутом круге $|z-i|\le 2$.

Для всех z из круга сходимости $|z-i|\le 2$ имеем:

$$\left|\frac{(z-i)^k}{(k+1)^2 2^k}\right|\le\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{(k+1)^2 2^k}$ сходится абсолютно и равномерно в круге $|z-i|\le 2$.

6 Найти радиус сходимости и область равномерной сходимости рядов:

а) $\sum_{k=0}^{\infty}\cos ik\, z^k$; б) $\sum_{k=0}^{\infty}(1+i)^k z^k$.

Решение. а) преобразуем коэффициенты ряда

$$c_k=\cos ik=\frac{e^k+e^{-k}}{2}=\operatorname{ch} k.$$

Тогда радиус сходимости равен

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{|c_k|}{|c_{k+1}|}=\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{ch}k}{\operatorname{ch}(k+1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{ch}k}{\operatorname{ch}k\operatorname{ch}1+\operatorname{sh}k\operatorname{sh}1}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\operatorname{ch}1+\operatorname{th}k\operatorname{sh}1}=\frac{1}{\operatorname{sh}1+\operatorname{ch}1}=e^{-1}.$$

Здесь учитывалось, что

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{th}k=\lim_{k\to\infty}\frac{e^k-e^{-k}}{e^k+e^{-k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1-e^{-2k}}{1+e^{-2k}}=1.$$

Следовательно, $R=e^{-1}$ и область равномерной сходимости ряда есть $|z|<e^{-1}$;

б) коэффициенты ряда $c_k=(1+i)^k$. Тогда

$$|c_k|=\left|(1+i)^k\right|=|1+i|^k=\left(\sqrt{2}\right)^k=2^{\frac{k}{2}}.$$

Отсюда

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{2^{\frac{k}{2}}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, радиус $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и область равномерной сходимости ряда есть $|z|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Задания для аудиторной работы

1 Исследовать сходимость рядов:

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos ik}{2^k}$; г) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos ik^2}{5^{k^2}}$; ж) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}i\sqrt{k}}{\sin ik}$;

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{k}}}{\sqrt{k}}$; д) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}i\frac{\pi}{k}}{k^{\ln k}}$; и) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin ik}{2^k}$;

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik^2}}{k^3}$; е) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2+i}{3}\right)^k$; к) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k}$.

2 Найти области сходимости и область равномерной сходимости функциональных рядов:

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{k^2}$; г) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^k$; ж) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(1+i)^k}$;

б) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+i)z^k$; д) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{i}{k}z^k$; и) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}e^{ik}z^k$;

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\cos^k\left(\frac{\pi i}{\sqrt{k}}\right)z^k$; е) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{i^k}$; к) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k^{-z}$.

Задания для домашней работы

1 Исследовать сходимость рядов:

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin ik}{3^k}$; г) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{2ik}}{k\sqrt{k}}$; ж) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{\operatorname{sh}ik}$;

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+i)^k}{2^{\frac{k}{2}}\cos ik}$; д) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}ik}{k^2}$; и) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+i)^k}{2^{\frac{k}{2}}}$;

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5-i}{6}\right)^k$; е) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\pi ik}{2^k}$; к) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k}$.

2 Найти области сходимости и область равномерной сходимости функциональных рядов:

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{k}}z^k$; г) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{ik}\right)^k$; ж) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln ik}\right)^k$;

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\pi i}{k}z^k$; д) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}i^kz^k$; и) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\cos ik\cdot z^k$;

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\sin^k(1+ik)}$; е) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z+k}$; к) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(z+2)^k}$.