Практическое занятие 6 **Ряды Тейлора и Лорана**

6.1 Ряд Тейлора
6.2 Ряд Лорана

6.1 Ряд Тейлора

Теорема 1 (Тейлора) Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, единственным образом разлагается в этом круге в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k ,$$

где $c_0=f(z_0)$, $c_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$.

Коэффициенты c_k, учитывая интеграл типа Коши (практическое занятие 5), можно вычислять по формулам

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}} ,\ k=1,2,\ldots,$$

где c_ρ – произвольная окружность с центром в точке z_0.

Говорят, что функция $f(z)$ *голоморфна в точке* z_0, если она в некоторой окрестности этой точки раскладывается в ряд по степеням ($z-z_0$). Функция, голоморфная в каждой точке области D, называется *голоморфной в этой области*.

Особой точкой функции $f(z)$ называется точка, в которой функция не является аналитической.

При $z_0=0$ имеет место ряд Маклорена:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot z^k .$$

Разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций комплексной переменной аналогичны разложениям в ряд Тейлора функций действительной переменной:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots\frac{z^n}{n!}+\ldots,\ z\in\mathbb{C} ,$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ z\in\mathbb{C} ,$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ z\in\mathbb{C} ,$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots,\ |z|<1,$$

$$(1+z)^m=1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\ldots,\ |z|<1.$$

Ряд Тейлора для многозначной функции получается из разложения соответствующей однозначной функции путем прибавления к нему чисел $2\pi ik$, $k\in\mathbb{Z}$.

6.2 Ряд Лорана

Ряд вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k ,$$

называется *рядом Лорана.* Здесь $k\in\mathbb{Z}$, z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости; z – переменная точка; $c_k\in\mathbb{C}$ – *коэффициенты* ряда.

Ряд Лорана представляет собой сумму двух рядов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k=\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-z_0)^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k .$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-z_0)^{-k}$ называется *главной частью*, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ – *правильной частью* ряда Лорана.

Заменой переменной $\xi=\dfrac{1}{z-z_0}$ главная часть ряда Лорана преобразуется в степенной ряд, который сходится к аналитической функции $\varphi(\xi)$ в круге $|\xi|<\rho$. Возвращаясь к переменной z, имеем, что главная часть сходится к функции

$f_1(z)=\varphi\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ в области $|z-z_0|>\frac{1}{\rho}$. Область сходимости представляет собой внешность круга радиуса $R_1=\frac{1}{\rho}$ с центром в точке z_0.

Правильная часть ряда Лорана представляет собой степенной ряд, поэтому его областью сходимости является круг радиуса R_2 с центром в точке z_0. Внутри этого круга ряд сходится к некоторой аналитической функции $f_2(z)$.

Если $R_1<R_2$, то существует общая область сходимости рядов, составляющих ряд Лорана. Внутри кольца $R_1<|z-z_0|<R_2$ ряд Лорана сходится к некоторой аналитической функции $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$. Если $R_1>R_2$, то ряд Лорана расходится.

Областью сходимости ряда Лорана называется общая часть сходимости его главной и правильной частей.

Теорема 2 Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $R_1<|z-z_0|<R_2$, однозначно представляется в этом кольце рядом Лорана $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, где коэффициенты c_k вычисляются по формуле

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz,\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

Γ *– любой замкнутый контур в кольце $R_1<|z-z_0|<R_2$, содержащий точку z_0 внутри.*

Рядом Лорана для аналитической функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$ называется ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

сходящийся в кольце $R<|z|<\infty$.

При преобразовании $z=\frac{1}{w}$ точка $z=\infty$ отображается в точку $w=0$ и окрестность бесконечно удаленной точки – в окрестность точки $w=0$. В окрестности точки $w=0$ функция $g(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$ является аналитической и ее разложение в ряд Лорана есть $g(w)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c'_k w^k$. Возвращаясь к прежней переменной $z=\frac{1}{w}$, получаем ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$:

$$f(z)=g\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

где $c_k=c'_{-k}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему Тейлора.
2 Как определяется ряд Тейлора для многозначных функций?
3 Какой ряд называется рядом Лорана?
4 Что называется областью сходимости ряда Лорана?
5 Какой ряд называется рядом Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки?

Решение типовых примеров

1 Разложить функцию $f(z)=\frac{z}{z^2+2z-3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$ и найти область сходимости ряда.

Решение. Найдем нули знаменателя:

$$z^2+2z-3=0;\ z_1=-3;\ z_2=1.$$

Тогда $z^2+2z-3=(z-1)(z+3)$.

Функцию $f(z)$ можно записать в виде:

$$f(z)=\frac{z}{z^2+2z-3}=\frac{z}{(z-1)(z+3)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z+3}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3+z}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}.$$

Используя разложение

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1,$$

получим:

$$f(z)=-\frac{1}{4}\left(1+z+\ldots+z^n+\ldots\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{z}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{3^n}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n}-1\right)z^n.$$

Область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ есть $|z|<1$, а область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}$ есть $|z|<3$. Поэтому областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n}-1\right)z^n$ является круг $|z|<1$.

2 Разложить по степеням $(z+1)$ функцию $f(z)=e^{2z+1}$.

Решение. Преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z)=e^{2(z+1)-1}=e^{2(z+1)}\cdot e^{-1}.$$

Используя основное разложение функции e^z в ряд Маклорена, получим:

$$f(z)=e^{-1}\left(1+2(z+1)+\frac{2^2(z+1)^2}{2!}+\ldots+\frac{2^n(z+1)^2}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(z+1)^n.$$

Область сходимости данного ряда $|z|<\infty$.

3 Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z функции $f(z)=\operatorname{tg}z$.

Решение. Найдем производные функции $f(z)=\operatorname{tg}z$ в точке $z=0$:

$$f'(z)=\frac{1}{\cos^2 z}\ \text{или}\ f'(z)=1+f^2(z),$$

$$f''(z)=2f(z)f'(z),$$

$$f'''(z)=2\left(f'^2(z)+f(z)f''(z)\right),$$

$$f^{(4)}(z)=2\left(3f'(z)f''(z)+f(z)f'''(z)\right),$$

$$f^{(5)}(z)=2\left(3f''^2(z)+4f'(z)f'''(z)+f(z)f^{(4)}(z)\right).$$

Отсюда

$$f'(0)=1;\ f''(0)=0;\ f'''(0)=2;\ f^{(4)}(0)=0;\ f^{(5)}(0)=16,\ \ldots.$$

Подставляя найденные значения производных в ряд Тейлора, получим:

$$\operatorname{tg}z=z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+\ldots.$$

4 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в круге $|z|<1$.

Решение. Преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

Так как

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right),\ |z|<2,$$

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}=-\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right),\ |z|<1,$$

то ряд Лорана есть

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)+\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots+\frac{2^{n-1}-1}{2^{n+1}}z^n+\cdots.$$

Полученный ряд сходится в круге $|z|<1$.

5 Разложить функцию $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$ в ряд Лорана в окрестности особой точки $z_0=0$

Решение. Используя основное разложение функции $\sin z$ в ряд Маклорена, получим

$$f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\dots\right)=$$
$$=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\frac{1}{7!z^5}+\dots.$$

Функция является аналитической в кольце $0<|z|<\infty$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

а) в круге $|z|<1$;

б) в кольце $1<|z|<2$;

в) в области $2<|z|<\infty$.

Решение. Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z_1=-2$, $z_2=1$. Представим функцию в виде

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}$$

а) разложение в круге $|z|<1$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2+z}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-z}{2}\right)}-\frac{1}{1-z}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\dots\right)-\left(1+z+z^2+z^3+\dots\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n.$$

Ряд для первой функции сходится при условии $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, т. е. в области $|z|<2$, для второй – в области $|z|<1$, поэтому ряд для функции $f(z)$ сходится в круге $|z|<1$;

б) разложение в кольце $1<|z|<2$:

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\dots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Ряд для первой функции сходится, если $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, т. е. при $|z|<2$, для второй функции, если $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т. е. если $|z|>1$, а ряд для функции $f(z)$ сходится в кольце $1<|z|<2$;

в) разложение для $|z|>2$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-2}{z}\right)}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$
$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\frac{2^3}{z^3}+\dots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 2^n+1\right)\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Ряд для первой функции сходится в области $\left|\frac{2}{z}\right|<1$, т. е. при $|z|>2$, для второй, если $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т. е. если $|z|>1$, поэтому ряд для функции $f(z)$ сходится в области $|z|>2$.

7 Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ее особых точек $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$.

Решение. Преобразуем функцию:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}.$$

Разложение в окрестности точки $z_1=0$ по степеням z до ближайшей особой точки $z_2=1$ (в кольце $0<|z|<1$) есть:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\ldots=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Разложение в окрестности точки $z_2=1$ по степеням $(z-1)$, справедливо в кольце $0<|z-1|<1$:

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)+1}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1-(-(z-1))}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Задания для аудиторной работы

1 Разложить в окрестности указанных точек в ряд Тейлора и найти его области сходимости функции:

а) $f(z)=\sin(2z+1)$; $z_0=-1$;

б) $f(z)=e^z$ по степеням $2z-1$;

в) $f(z)=\ln(2-z)$; $z_0=0$;

г) $f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z-5}$; $z_0=0$;

д) $f(z)=\frac{z}{z^2+i}$; $z_0=0$;

е) $f(z)=\frac{z-1}{2+z-z^2}$; $z_0=0$;

ж) $f(z)=\frac{1}{z^2+4z-5}$; $z_0=0$;

и) $f(z)=\cos z$; $z_0=-\frac{\pi}{4}$;

к) $f(z)=\frac{1}{3z+1}$; $z_0=-2$;

л) $f(z)=\cos^2\frac{iz}{2}$; $z_0=0$;

м) $f(z)=\operatorname{sh}^2\frac{z}{2}$; $z_0=0$;

н) $f(z)=\frac{2}{z-1}$; $z_0=i$;

о) $f(z)=\frac{z-1}{z^2+2z-3}$; $z_0=0$;

п) $f(z)=e^{z+3}$; $z_0=2$.

2 Разложить в ряд Лорана в окрестности особых точек функции:

а) $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$;

б) $f(z)=z^4\cos\frac{1}{z}$;

в) $f(z)=\frac{\sin z}{z-2}$;

г) $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}$;

д) $f(z)=\frac{z^5}{(z^2-4)^2}$;

е) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$;

и) $f(z)=\frac{e^z}{z}$;

к) $f(z)=\frac{\sin^2 z}{z}$;

л) $f(z)=ze^{\frac{1}{z+i}}$;

м) $f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}$;

н) $f(z)=\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$;

о) $f(z)=\frac{2z}{(z+1)(z-2)}$;

ж) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$; п) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)z}$.

3 Разложить функции в ряд Лорана:

а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}$ в области $1<|z|<4$;

б) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ в области $1<|z|<2$;

в) $f(z)=\dfrac{z^3}{z^2-2z+1}$ в окрестности точек $z_1=0$ и $z_2=1$;

г) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ в окрестности точек $z_1=1$ и $z_2=-2$;

д) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+9)z}$ в окрестности точек $z_1=0$ и $z_2=3i$.

Задания для домашней работы

1 Разложить в окрестности указанных точек в ряд Тейлора и найти его области сходимости функции:

а) $f(z)=\dfrac{z}{z+2}$; $z_0=0$; и) $f(z)=\sin z$; $z_0=\dfrac{\pi}{4}$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{z+1}$; $z_0=i$; к) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}$; $z_0=0$;

в) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$; $z_0=0$; л) $f(z)=\dfrac{z}{3-2z}$; $z_0=3$;

г) $f(z)=e^z$; $z_0=-1$; м) $f(z)=e^{2z}$; $z_0=-i$;

д) $f(z)=\dfrac{z}{z-2}$; $z_0=1$; н) $f(z)=\dfrac{1}{z-3}$; $z_0=-1$;

е) $f(z)=\dfrac{z}{z-3}$; $z_0=-1$; о) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+9}$; $z_0=0$;

ж) $f(z)=\ln z$; $z_0=1$; п) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4z-5}$; $z_0=0$.

2 Разложить в ряд Лорана в окрестности особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^4}$; и) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$; к) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$;

в) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2}$; л) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+3)}$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)(z-1)}$; м) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}$;

д) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-3}$, н) $f(z)=\dfrac{z^2}{z^2+5z+4}$;

е) $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{x^4}$; о) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}$;

ж) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$; п) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)(z+4)}$.

3 Разложить функции в ряд Лорана:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$ в областях $0<|z|<1$ и $1<|z|<\infty$;

б) $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$ в области $1<|z|<2$;

в) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$ в окрестности точки $z_1=1$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)^2}$ в окрестности точек $z_1=0$ и $z_2=3$;

д) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ в окрестности точек $z_1=2$ и $z_2=-1$.

Практическое занятие 7 Классификация изолированных особых точек аналитической функции

7.1 Нули аналитической функции
7.2 Изолированные особые точки аналитической функции

7.3 Нули аналитической функции

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0. Точка z_0 называется *нулем* функции $f(z)$ порядка m, если выполняются условия

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ \ldots,\ f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

При $m=1$ точка z_0 называется *простым* нулем.

Теорема 1 Точка z_0 является нулем порядка m функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки z_0 имеет место равенство

$$f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z)\neq 0$.

7.2 Изолированные особые точки

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z=z_0$.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

– *устранимой особой* точкой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a$, $a\neq\infty$;

– *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

– *существенно особой*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Точка z_0 является *полюсом порядка* m, если для функции $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ точка z_0 является нулем порядка m. Полюс порядка $m=1$ называется *простым полюсом*.

Теорема 2 Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка m функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Аналитическая функция $f(z)$ называется *мероморфной* в области $\bar{D}\subset\mathbb{C}$, если $f(z)$ не имеет в ней других особых точек, кроме полюсов.

Пусть аналитическая функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 разлагается в ряд Лорана:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-z_0)^{-k},\ c_k\in\mathbb{C}.$$

Теорема 3 Для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана функции $f(z)$ не содержал членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$ (ряд Лорана не содержит главной части).

Теорема 4 Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана функции $f(z)$ содержал конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$ (в главной части ряда содержится конечное число членов).

Теорема 5 Для того чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана содержал бесконечно много членов с отрица-

тельными степенями разности $(z-z_0)$ (в главной части ряда содержится бесконечно много членов с отрицательными показателями).

Исследование характера бесконечно удаленной особой точки $z=\infty$ удобнее проводить путем замены $z=\dfrac{1}{w}$, при которой точка $z=\infty$ переходит в точку $w=0$. Тогда:

– если в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ нет членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка называется устранимой особой точкой функции $f(z)$;

– если в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ есть лишь конечное число членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка называется полюсом функции $f(z)$;

– если в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ есть бесконечно много членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка называется существенно особой точкой функции $f(z)$.

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ в бесконечно удаленной точке имеют существенную особенность, так как их разложения в ряд Лорана содержат бесконечное множество положительных степеней z.

Вопросы для самоконтроля

1 Какая точка называется нулем функции? Что называется кратностью нуля?

2 Как представима функция, имеющая нуль кратности m?

3 Какая точка называется изолированной особой точкой?

4 Какая изолированная особая точка называется: а) устранимой, б) полюсом, в) существенно особой?

5 Как влияет характер изолированной особой точки на вид ряда Лорана?

6 Как определяется особенность в бесконечно удаленной точке?

Решение типовых примеров

1 Найти нули и определить их порядок функции

$$f(z)=1+\cos z.$$

Решение. Приравнивая $f(z)$ к нулю, получим $\cos z=-1$. Отсюда точки $z_n=(2n+1)\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, есть нули данной функции.

Далее

$$f'(z)=-\sin z,\ f'((2n+1)\pi)=-\sin(2n+1)\pi=0,$$

$$f''(z)=-\cos z,\ f''((2n+1)\pi)=-\cos(2n+1)\pi=1\neq 0.$$

Следовательно, точки $z_n=(2n+1)\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, являются нулями 2-го порядка данной функции.

2 Найти порядок нуля $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{z^8}{z-\sin z}$.

Решение. Используя разложение функции $\sin z$ в окрестности точки $z_0=0$, получим:

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}=\frac{z^8}{z-\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\ldots\right)}=\frac{z^8}{\dfrac{z^3}{3!}-\dfrac{z^5}{5!}+\ldots}=$$

$$=\frac{z^5}{\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z^2}{5!}+\ldots}=z^5\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z^2}{5!}+\ldots}.$$

Положим $\varphi(z)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z^2}{5!}+\ldots}$.

Тогда $f(z)=z^5\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – функция аналитическая в точке $z_0=0$, причем $\varphi(0)=6\neq 0$.

Согласно теореме 1, точка $z_0=0$ является для данной функции нулем 5-го порядка.

3 Какую особенность в точке $z_0=0$ имеет функция

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}?$$

Решение. <u>1 способ</u> Точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой, так как предел в этой точке равен

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1.$$

<u>2 способ</u> В окрестности точки $z_0=0$ разложение в ряд Лорана имеет вид:

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{z-\dfrac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots}{z}=$$

$$=1-\frac{z^2}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots.$$

Видно, что ряд Лорана в точке $z_0=0$ не содержит членов с отрицательными степенями, т. е. не содержит главной части. Согласно теореме 3 точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$.

4 Какую особенность в точке $z_0=0$ имеет функция

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}?$$

Решение. <u>1 способ</u> Имеем:

– если $z\to 0$ вдоль положительной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$;

– если $z\to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{1}{z}}=\lim\limits_{x\to 0-0}e^{\frac{1}{x}}=0$.

Следовательно, данная функция не имеет предела в точке $z_0=0$.

<u>2 способ</u> Разложение в ряд Лорана функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z_0=0$ имеет вид:

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\cdot z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot z^n}+\cdots.$$

Видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов. Согласно теореме 5 точка $z_0=0$ является существенно особой точкой.

5 Определить какую особенность в бесконечно удаленной точке имеет функция $f(z)=\dfrac{1}{z-4}$.

Решение. Произведем замену переменной z на переменную w по формуле $z=\dfrac{1}{w}$. Тогда данная функция принимает следующий вид $f\left(\dfrac{1}{w}\right)=\dfrac{w}{1-4w}$. При условии $|4w|<1$ имеет место разложение:

$$f\left(\frac{1}{w}\right)=w\left(1+4w+(4w)^2+\cdots\right).$$

Возвращаясь к переменной z, имеем:

$$f(z)=\frac{1}{z-4}=\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{4}{z}+\frac{4^2}{z^2}+\cdots\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{z^{k+1}},\ |z|<4.$$

Видно, что ряд Лорана не содержит правильную часть. Следовательно, точка $z=\infty$ является устранимо особой точкой.

6 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z}.$$

Решение. Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0=0$.

<u>*1 способ*</u>. Вычислим предел

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{1}=1\neq 0$$

Значит, $z_0=0$ является устранимой особой точкой функции.

<u>*2 способ*</u>. Разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$ имеет вид:

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z}=\frac{\left(1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\ldots\right)-1}{z}=$$

$$=\frac{z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots}{z}=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots .$$

Ряд Лорана не содержит главной части, значит по теореме 3 точка $z_0=0$ есть устранимая особая точка данной функции.

7 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3+z^2+z-1}.$$

Решение. Найдем особые точки функции из условия:

$$z^3+z^2+z-1=0.$$

Решая уравнение, получим две особые точки $z_1=-1$; $z_2=1$.

Найдем предел в точке $z_1=-1$:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sin z}{z^3+z^2+z-1}=\lim_{x\to-1}\frac{\sin z}{(z+1)^2(z-1)}=\infty$$

Согласно определению, точка $z_1=-1$ – полюс. Чтобы определить его порядок, представим функцию $f(z)$ в виде:

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{z-1}}{(z+1)^2}=\frac{\varphi(z)}{(z+1)^2},$$

где $\varphi(z)=\frac{\sin z}{z-1}$ – аналитична в точке $z_1=-1$ и $\varphi(-1)=\frac{\sin 1}{2}\neq 0$.

Отсюда по теореме 2 точка $z_1=-1$ – полюс 2-го порядка функции $f(z)$.

Аналогично точка $z_2=1$ – полюс, поскольку

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin z}{z^3+z^2+z-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sin z}{(z+1)^2(z-1)}=\infty.$$

Так как

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{z-1}=\frac{\varphi_1(z)}{z-1},$$

где $\varphi_1(z)$ – аналитична в точке $z_2=1$ и $\varphi(1)=\frac{\sin 1}{4}\neq 0$, то точка $z_2=1$ – простой полюс функции $f(z)$

8 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z)=\frac{1}{z^3}$$

Решение. Особая точка функции $z_0=0$. Так как

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{1}{z^3}=\infty,$$

то точка $z_0=0$ – полюс.

Для функции $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=z^3$ точка $z_0=0$ – нуль третьего порядка, значит, для функции $f(z)$ – полюс 3-го порядка.

9 Определить характер особой точки $z=0$ для функции

$$f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}.$$

Решение. <u>1 способ</u> Рассмотрим поведение функции на действительной и мнимой осях.

Пусть $z=x$ и $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\to\infty$ при $x\to0$.

Пусть $z=iy$ и $f(iy)=e^{-\frac{1}{y^2}}\to0$ при $y\to0$.

Отсюда следует, что функция $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела в точке $z_0=0$ и $z_0=0$ – существенно особая точка функции $f(z)$

<u>2 способ</u> Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$, т. е. в области $0<|z|<\infty$:

$$e^{\frac{1}{z^2}}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\frac{1}{3!z^6}+\ldots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, поэтому точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти нули и определить их порядок для функций:

а) $f(z) = z^4 + 4z$; в) $f(z) = \cos z + \operatorname{ch} iz$;

б) $f(z) = z^2 \sin z$; г) $f(z) = (z + \pi i)\operatorname{sh} z$.

2 Найти порядок нуля $z_0 = 0$ для функций:

а) $f(z) = 4\sin z^3 + z^2\left(z^2 - 2\right)$; в) $f(z) = \dfrac{z^4}{z - \sin z}$;

б) $f(z) = 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2$; г) $f(z) = z^2\left(e^{\;^{2}} - 1\right)$.

3 Определить характер особой точки $z_0 = 0$ для функций:

а) $f(z) = \dfrac{1}{z - \sin z}$; в) $f(z) = \dfrac{1}{e^{-z} + z - 1}$;

б) $f(z) = \dfrac{1}{2 + z^2 - \operatorname{ch} z}$; г) $f(z) = \dfrac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}$.

4 Найти особые точки и определить их характер для функций:

а) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$; д) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$;

б) $f(z) = \sin\dfrac{\pi}{z + 1}$; е) $f(z) = \dfrac{1 - e^{-z}}{z}$;

в) $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$; ж) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2 - 2z + 1}$;

г) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z^2}$; и) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 2z + 1}$.

5 Определить характер указанных особых точек для функций:

а) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}$, $z_0 = -1$;

б) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z + \pi}$, $z_0 = -\pi$.

Задания для домашней работы

1 Найти нули и определить их порядок для функций:

а) $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$; в) $f(z) = \sin z + \operatorname{sh} iz$;

б) $f(z) = \cos z - 1$; г) $f(z) = \dfrac{z^3}{1 + z - e^z}$.

2 Найти порядок нуля $z_0 = 0$ для функций:

а) $f(z) = \dfrac{z^3}{1 + z - e^z}$; б) $f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

3 Определить характер особой точки $z_0 = 0$ для функций:

а) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z - 1 + \dfrac{z^2}{2}}$; г) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z - z + \dfrac{z^3}{6}}$;

б) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z - \operatorname{sh} z}$; д) $f(z) = \dfrac{\ln\left(1 + z^3\right)}{z^2}$;

в) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z} + \sin\dfrac{2 - \pi z}{2z}$; е) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}$.

4 Найти особые точки и определить их характер для функций:

а) $f(z) = \dfrac{1}{1 - \sin z}$; д) $f(z) = e^{\frac{1}{z+2}}$;

б) $f(z) = \dfrac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}$; е) $f(z) = \dfrac{z^2}{\cos z - 1}$;

в) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z + 1}$; ж) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2 - 1}$;

г) $f(z) = e^{\frac{1}{z-3}}$; и) $f(z) = \dfrac{z}{(z + 1)^2 (z - 2)}$.

5 Определить характер указанных особых точек для функций:

а) $f(z) = (z - 1)e^{\frac{1}{z-1}}$; $z_0 = 1$;

б) $f(z) = \dfrac{e^{z+e}}{z + e}$, $z_0 = -e$.