## Практическое занятие 5
## ЭКСРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие экстремума функции многих переменных.
2. Необходимые и достаточные условия экстремума.
3. Достаточные условия экстремума.

**Понятие экстремума функции многих переменных.** Пусть дана функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(P)$, определенная в некоторой $\delta$-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Точка $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется точкой ***локального максимума (минимума)*** функции $u = f(P)$, если существует такая $\delta$-окрестность этой точки, что для всех $P(x_1; x_2; ...; x_n) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$ выполняется неравенство

$$f(P_0) > f(P)$$
$$(f(P_0) < f(P)),$$

значение $f(P_0)$ называют ***локальным максимумом (минимумом)*** функции.

*Обозначается*:

$$\max_{P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)} f(P) = f(P_0)$$
$$(\min_{P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)} f(P) = f(P_0)).$$

Точки максимума или минимума функции называют ***точками экстремума*** функции, а максимумы и минимумы функции – ***экстремумами функции***.

**Замечание.** Если функция $u = f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ локальный экстремум, то:
в случае локального максимума – $f(P) - f(P_0) = \Delta u < 0$,
в случае локального минимума – $f(P) - f(P_0) = \Delta u > 0$.

Из сказанного выше следует, что полное приращение функции не меняет знака в окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$. Однако для всех точек $P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$ определить знак приращения $\Delta u$ практически невозможно, поэтому надо искать другие условия, по которым можно судить о наличии и характере экстремума функции в данной точке.

**Теорема 1 (необходимые условия существования локального экстремума).** *Если в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ дифференцируемая функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:*

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_2} = ... = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_n} = 0, \qquad (1)$$

*или, по крайней мере, одна из них не существует.*

**Следствие**. *Если функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ локальный экстремум, то ее дифференциал в этой точке $du(P_0)$ равен нулю или не существует.*

Точка $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, в которой выполняется условие (1), называется ***точкой***

***возможного экстремума*** или ***стационарной (критической).***

Равенство нулю частных производных первого порядка не является достаточным условием существования экстремума функции $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

**Некоторые сведения о квадратичных формах.** Функция вида

$$Q(x_1; x_2; ...; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 +$$
$$+ a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2 == \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

называется ***квадратичной формой*** от переменных $x_1$, $x_2$, $..., x_n$, числа $a_{ij}$, $i, j = 1,2,...,n$, называются ***коэффициентами квадратичной формы***, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей квадратичной формы***.

Если $a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall i; j \quad i \neq j$, то квадратичная форма называется ***симметричной***.

Определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются ***главными*** минорами матрицы $A$.

Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***положительно определенной*** (***отрицательно определенной***), если для любых значений переменных $x_1$, $x_2$, $..., x_n$, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения.

Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***знакоопределенной***, если она является положительно определенной или отрицательно определенной. Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***квазизнакоопределенной***, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значении, при этом обращается в нуль не только при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***знакопеременной***, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

**Теорема 2 (критерий Сильвестра).**

*1) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны:*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

*2) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом:*

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0,\ \ldots.$$

**Теорема 3 (достаточные условия существования локального экстремума).** *Пусть функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(P)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ и дважды дифференцируема в самой точке $P_0$, причем $P_0$ – точка возможного экстремума, т.е. $du(P_0) = 0$. Тогда 1) если второй дифференциал $d^2u(P_0)$ является положительно определенной (отрицательно определенной) формой от переменных $dx_1$, $dx_2$, …, $dx_n$, то функция $u = f(P)$ имеет в точке $P_0$ локальный минимум (максимум); 2) если $d^2u(P_0)$ является знакопеременной квадратичной формой, то функция $u = f(P)$ в точке $P_0$ экстремума не имеет.*

**Замечание.** Если $du(P_0) = 0$, а $d^2u(P_0)$ является квазиопределенной квадратичной формой, то функция $u = f(P)$ может иметь в точке $P_0$ локальный экстремум, а может и не иметь.

**Теорема 4 (достаточные условия существования локального экстремума функции двух переменных).** *Пусть $P_0(x_0; y_0)$ – стационарная точка, дважды дифференцируемой в окрестности $U(\delta; P_0)$ функции $z = f(x; y)$. И пусть*

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \qquad (2)$$

*Тогда стационарная точка $P_0(x_0; y_0)$ является: 1) точкой локального максимума, если $\Delta(P_0) > 0$ и $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$; 2) точкой локального минимума, если $\Delta(P_0) > 0$ и $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$; 3) если $\Delta(P_0) < 0$, то в стационарной точке $P_0$ локального экстремума нет, 4) $\Delta(P_0) = 0$, то локальный экстремум в стационарной точке $P_0$ может быть, а может и не быть.*

**Замечания. 1.** Если $\Delta(P_0) = 0$, то нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке $P_0$. В этом случае необходимо произвести дополнительные исследования знака функции $z = f(x, y)$ в $U(\delta; P_0)$. Действительно, если $B^2 - AC = 0$ и $A = B = C = 0$, то $d^2z = 0$ и $\Delta z \approx \frac{1}{3!} d^3z\big|_{P_0}$, т.е. в этом случае знак $\Delta z$ определяется знаком $d^3z\big|_{P_0}$. Следовательно, требуются дополнительные исследования по определению знака $\Delta z$ в окрестности стационарной точки $P_0$.

**2.** При выводе достаточных условий экстремума предполагалось, что $\Delta y \neq 0$. Если $\Delta y = 0$ для любого $\Delta x \neq 0$, то получаем экстремум функции одной переменной $z = f(x, y)$. Аналогично если $\Delta x = 0$ для любого $\Delta y \neq 0$, то $z = f(x_0, y)$.

Приращения $\Delta x$ и $\Delta y$ не могут равняться нулю одновременно, поскольку в подобном случае точка $P(x + \Delta x; y + \Delta y)$ совпала бы с точкой $P_0(x_0; y_0)$ и функция $z = f(x, y)$ не получила бы никакого приращения.

## *ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ*

1. Дайте определение локального экстремума функции.

2. Сформулируйте теорему о необходимом условии локального экстремума .

3. Какие точки называются точками возможного экстремума функции?

4. Какая функция называется квадратичной формой? Что такое матрица квадратичной формы и ее главные миноры?

5. Какая квадратичная форма называется 1) положительно определенной, 2) отрицательно определенной, 3) знакоопределенной, 4) квазизнакоопределенной, 5) знакопеременной?

6. Сформулируйте критерий Сильвестра.

7. Сформулируйте достаточное условие экстремума функции двух переменных $z = f(x;y)$.

## *РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ*

**1.** Исследовать на экстремум функцию $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

***Решение***. 1. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2 + 2\right),\ z'_y = 2ye^{\frac{x}{2}}.$$

2. Находим точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений:

$$\left.\begin{matrix} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y^2 + 2 = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = -2$, $y_0 = 0$.

Таким образом, существует только одна стационарная точка $P_0(-2;0)$, в которой функция $z$ может достигать экстремума.

3. Исследуем знак приращения $\Delta z$ в окрестности стационарной точки $P_0(-2;0)$. Для этого вычислим частные производные второго порядка функции $z$ в точке $P_0$:

$$A = z''_{xx}(P_0) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2 + 4\right)\Big|_{(-2;1)} = \frac{1}{2e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = ye^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)} = \frac{2}{e}.$$

Так как

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \frac{1}{e^2} > 0$$

и $A > 0$, то точка $P_0(-2;0)$ является точкой локального минимума: $z_{\min} = z(-2,0) = -\frac{2}{e}$.

**2.** Исследовать на экстремум функцию $z = e^{-x}\left(x + y^2\right)$.

***Решение***. 1. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = e^{-x}\left(1 - x - y^2\right),\ z'_y = 2ye^{-x}.$$

2. Для определения точек возможного экстремума решим систему уравнений:

$$\left.\begin{matrix} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 - x - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$.

Таким образом, функция имеет только одну стационарную точку $P_0(1;0)$.

3. Исследуем знак приращения $\Delta z$ в окрестности стационарной точки. Для этого вычислим частные производные второго порядка функции $z$ в точке $P_0$:

$$A = z''_{xx}(P_0) = e^{-x}\left(x + y^2 - 2\right)\Big|_{(1;0)} = -\frac{1}{e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = -2ye^{-x}\Big|_{(1;0)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{-x}\Big|_{(1;0)} = \frac{2}{e}.$$

Так как $\Delta(P_0) = AC - B^2 = -\frac{2}{e^2} < 0$, то в точке $P_0(1;0)$ нет экстремума, т.е. в окрестности $U(\delta; P_0)$ исследуемая функция меняет знак.

**3.** Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4$.

***Решение***. 1. Вычислим частные производные первого порядка функции $z$:

$$z'_x = 4x^3,\ z'_y = 4y^3.$$

2. Решая систему уравнений $\left.\begin{matrix} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{matrix}\right\}$ находим стационарную точку $P_0(0;0)$ данной функции.

3. Исследуем знак приращения $\Delta z$ в окрестности стационарной точки $P_0(0;0)$. Так как

$$A = z''_{xx}(P_0) = 0,\ B = z''_{xy}(P_0) = 0,\ C = z''_{yy}(P_0) = 0,$$

то $\Delta(P_0) = AC - B^2 = 0$. Следовательно, нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке $P_0(0;0)$.

В данном случае стационарная точка $P_0(0;0)$ является точкой локального минимума, поскольку $\Delta z > 0\ \ \forall P \in \dot{U}(\delta; P_0)$; $z_{\min} = z(0,0) = 0$.

## *ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ*

**1.** Найти экстремумы функций двух переменных:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - x - 6y$, 2) $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$,

3) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$, 4) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x > 0$, $y > 0$,

5) $z = e^{-x^2 - y^2}\left(3x^2 + y^2\right)$.

**2.** Найти экстремум функций трех переменных:

1) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 8y - 6z + 40$,

2) $u = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

**3.** Найти экстремум функции, заданной неявно

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 9 = 0.$$

## *ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ*

**1.** Найти экстремумы функций двух переменных:
1) $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$, 2) $z = xy^2(1 - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$,
3) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$, 4) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$,
5) $z = e^{-x^2 - y^2}\left(x^2 + 2y^2\right)$.

**2.** Найти экстремум функций трех переменных:
1) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$,
2) $u = (x + y + z)e^{-x^2 - y^2 - z^2}$.

**3.** Найти экстремум функции, заданной неявно

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0.$$

## Практическое занятие 6
## УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

1. Понятие условного экстремума.
2. Методы отыскания условного экстремума.
3. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.

Рассмотрим функцию $u = f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(P)$ при условии, что ее аргументы являются связанными между собой соотношениями

$$\begin{cases} F_1(x_1; x_2; ... x_n) = 0, \\ F_2(x_1; x_2; ... x_n) = 0, \\ ......................., \\ F_k(x_1; x_2; ... x_n) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

которые называются ***уравнениями связи.*** И пусть координаты точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Говорят, что функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ ***условный минимум (максимум)*** при условиях связи (1), если существует такая $\delta$-окрестность точки $P_0$, что для любой точки $P(x_1; x_2; ...; x_n) \in \delta$, $P \neq P_0$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (1), выполняется неравенство

$$f(P) > f(P_0) \ \ (f(P) < f(P_0)).$$

В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значение функции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой $\delta$-окрестности точки $P_0$, а только в тех ее точках, которые связаны между собой условиями связи.

Существуют следующие методы отыскания условного экстремума.

**Метод исключения части переменных.** Рассмотрим задачу отыскания условного экстремума применительно к функции двух переменных. Пусть требуется найти локальный экстремум функции $z = f(x; y)$ при условии, что переменные $x$ и $y$ удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x, y) = 0$.

Если уравнение связи можно однозначно разрешить относительно переменной $y$, т.е. выразить $y$ как функцию $x$: $y = y(x)$, то, подставив в аналитическое выражение функции $z = f(x, y)$ вместо $y$ функцию $y(x)$, получим функцию одной переменной $z = f(x, y(x))$. Вычислив значения $x$, при которых эта функция достигает экстремума, и, определив затем из уравнения связи соответствующие им значения $y$, найдем искомые точки условного экстремума. Тот же самый результат получится, если уравнение $\varphi(x, y) = 0$ можно однозначно разрешить относительно переменной $x$, т.е. $x$ выразить как функцию $y$.

Если условие связи (линии $\Gamma$) задается параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, то, подставляя $x$ и $y$ в аналитическое выражение функции $z = f(x, y)$, приходим к задаче отыскания экстремума функции одной переменной. Однако если уравнение связи нельзя разрешить относительно какой-либо одной из переменных и представить параметрическими уравнениями, данная задача значительно усложняется.

**Метод множителей Лагранжа.** Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $z = f(x;y)$, не разрешая уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ относительно $x$ или $y$. Для этого используем ***метод множителей Лагранжа***.

Введем вспомогательную функцию, называемую ***функцией Лагранжа***:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),$$

где $f(x;y)$ – заданная функция; $\varphi(x;y)$ – левая часть уравнения связи.

**Теорема 1.** *Пусть 1) функция* $z = f(x;y)$ *определена и дифференцируема в точке* $P_0(x_0;y_0)$ *и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи* $\varphi(x,y)=0$*; 2) уравнение* $\varphi(x,y)=0$ *удовлетворяет в* $\delta$*-окрестности точки* $P_0$ *условиям теоремы 1 (лекция 10)*

*Тогда существует такое число* $\lambda$*, что*

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{P_0(x_0;y_0)} = 0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{P_0(x_0;y_0)} = 0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{P_0(x_0;y_0)} = 0.$$

**Правило нахождения точек условного экстремума.** Для того чтобы определить точки условного экстремума функции $z = f(x;y)$, удовлетворяющие уравнению связи $\varphi(x,y)=0$, необходимо:

1) составить функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$;

2) вычислить частные производные функции Лагранжа по переменным $x$, $y$, $\lambda$;

3) приравняв нулю найденные производные, составить систему уравнений (4); решив ее, можно определить координаты критических точек $P$ возможного условного экстремума;

4) определить знак приращения $\Delta z$ в окрестностях критических точек по тем точкам окрестности, которые удовлетворяют уравнению $\varphi(x,y)=0$, т.е. лежат на линии $L$.

Если $(\forall P \in L) \cap (P \in U(\delta;P_0))$ выполняется условие

$$\Delta z = f(P) - f(P_0) > 0,$$

то $P_0(x_0;y_0)$ – точка условного минимума.

Если $(\forall P \in L) \cap (P \in U(\delta;P_0))$ выполняется условие

$$\Delta z = f(P) - f(P_0) < 0,$$

то $P_0(x_0;y_0)$ – точка условного максимума.

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается также на основании знака второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2,$$

при условии, что $dx$ и $dy$ связаны соотношением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0, \; dx^2 + dy^2 \neq 0.$$

Функция $z = f(x;y)$ имеет условный максимум, если $d^2L < 0$, и условный минимум, если $d^2L > 0$.

Метод множителей Лагранжа имеет место и для функции многих переменных $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$.

**Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.** Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $D$. Тогда в области $D$ она достигает своих наименьшего и наибольшего значений, причем эти значения достигаются либо внутри области $D$, либо на ее границе.

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения в ограниченной замкнутой области, называются ***точками абсолютного*** или ***глобального экстремума***. Если наибольшее или наименьшее значения достигаются во внутренних точках области, то это – точки локального экстремума функции $z = f(x; y)$.Таким образом, точки, в которых функция $z$ принимает наибольшее и наименьшее значения, являются либо точками локального экстремума, либо граничными точками области.

Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ в ограниченной замкнутой области $D$ необходимо:

– вычислить значения функции в точках возможного экстремума, принадлежащих области $D$,

– найти наибольшее и наименьшее значения на ее границе,

– сравнить найденные значения и выбрать наибольшее и наименьшее.

Предположим, что граница области $D$ задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$. Задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на границе области $D$ сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений (абсолютного экстремума) функции одной переменной, так как уравнение границы области $D$ связывает переменные $x$ и $y$ между собой. Значит, если разрешить это уравнение относительно одной из переменных или представить его в параметрическом виде и подставить выражения $x = x(t)$, $y = y(t)$ в уравнение $z = f(x, y)$, то придем к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной. Если же уравнение $\varphi(x, y) = 0$ нельзя разрешить ни относительно $x$, ни относительно $y$, а также невозможно представить его параметрическими уравнениями, то задача сводится к отысканию условного экстремума.

## *ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ*

1. Сформулируйте определение условного экстремума функции.
2. Объясните, в чем состоит метод исключения части переменных.
3. Что такое функция Лагранжа? Сформулируйте теорему о необходимых условиях Лагранжа условного экстремума.
4. Объясните, как исследовать точку возможного условного экстремума, найденную методом Лагранжа.
5. Как найти глобальные экстремумы функции двух переменных?

## *РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ*

**1.** Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что точки $(x; y)$ лежат на прямой $l$, уравнение которой $x+y-1=0$.

***Решение***. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1).$$

Находим частные производные функции Лагранжа по переменным $x$, $y$ и $\lambda$:

$$L'_x=2x+\lambda,\ L'_y=2y+\lambda,\ L'_\lambda=x+y-1.$$

Составляем и решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}L'_x(x,y,\lambda)=0\\ L'_y(x,y,\lambda)=0\\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}2x+\lambda=0\\ 2y+\lambda=0\\ x+y-1=0\end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0=0{,}5$, $y_0=0{,}5$, $\lambda=-1$.

Таким образом, мы нашли единственную критическую точку $P_0(0{,}5;0{,}5)\in l$. Для любой точки $P\in l$ выполняется условие $f(P_0)>f(P)$. Следовательно, точка $P_0(0{,}5;0{,}5)$ является точкой условного минимума.

2. Найти экстремум функции $z=9-8x-6y$, при условии что $x$ и $y$ удовлетворяют условию $x^2+y^2=25$.

***Решение***. Геометрически задача сводится к нахождению экстремальных значений аппликаты $z$ плоскости $z=9-8x-6y$ для точек ее пересечения с цилиндром $x^2+y^2=25$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x;y;\lambda)=9-8x-6y+\lambda(x^2+y^2-25).$$

Находим е частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-8+2\lambda x,\ \frac{\partial L}{\partial y}=-6+2\lambda y,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-25.$$

Составляем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}-8+2\lambda x=0,\\ -6+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2-25=0.\end{aligned}\right\}.$$

Решая данную систему, получим

$$x_1=4,\ y_1=3,\ \lambda_1=1;$$

$$x_2=-4,\ y_2=-3,\ \lambda_2=-1.$$

Частные производные второго порядка имеют вид

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda.$$

Тогда выражение для второго дифференциала есть

$$d^2L=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2=2\lambda(dx^2+dy^2).$$

Поскольку $d^2L>0$ при $x_1=4$, $y_1=3$, $\lambda_1=1$, то функция $z=9-8x-6y$ в этой точке имеет условный минимум. Если $x_2=-4$, $y_2=-3$, $\lambda_2=-1$, то $d^2L<0$. Поэтому в данном случае функция $z=9-8x-6y$ имеет условный максимум.

Следовательно,

$$z_{\max}=z(-4;-3)=59,$$

$$z_{\min} = z(4;3) = -41.$$

**3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области $D$, ограниченной осью $Oy$, прямой $y = 2$ и параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ при $x \geq 0$ (рис.2).

***Решение***. Определим критические точки, лежащие внутри области $D$ (на рис.1. она заштрихована). Для этого вычислим частные производные: $z'_x = 6x^2 - 6y$, $z'_y = -6x + 6y$. Приравняв их нулю, составим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0. \end{aligned}\right\}$$

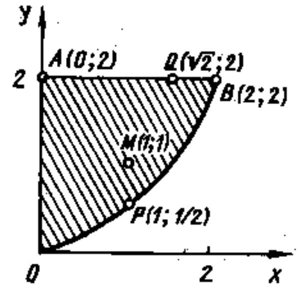


Рис.1.

Решив ее, найдем две критические точки: $O(0;0)$ и $M(1;1)$, в которых обе частные производные равны нулю. Точка $O(0;0)$ принадлежит границе области $D$. Следовательно, если функция $z$ принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то этой точкой может быть только $M(1;1)$.

Исследуем функцию на границе области. На отрезке $OA$ $x = 0$ и, следовательно, $z = 3y^2$ ($0 \leq y \leq 2$). Функция $z = 3y^2$ является возрастающей функцией одной переменной $y$ на отрезке $[0;2]$, наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка $OA$.

На отрезке $AB$ $y = 2$, и поэтому здесь функция $z = 2x^2 - 12x + 12$ ($0 \leq x \leq 2$) представляет собой функцию одной переменной $x$. Ее глобальные экстремумы находятся среди ее значений в критических точках и на концах отрезка. Находим частную производную $z'_x = 6x^2 - 12$. Решаем уравнение $z'_x = 0$ (или $6x^2 - 12 = 0$), откуда $x = \pm\sqrt{2}$. Внутри отрезка $[0;2]$ имеется лишь одна критическая точка $x = \sqrt{2}$, на отрезке $AB$ ей соответствует точка $Q(\sqrt{2};2)$.

Итак, глобальные экстремумы функции $z$ на отрезке $AB$ могут достигаться среди ее значений в точках $A$, $Q$ и $B$.

На дуге параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ имеем

$$z = 2x^3 - 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{3}{4}x^4 - x^3 \text{ при } 0 \leq x \leq 2.$$

Решая уравнение

$$z'_x = 3x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0,$$

находим критические точки $O(0;0)$ и $P\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-6xy+3y^2$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках $O$, $A$, $Q$, $B$, $P$, $M$, т.е. среди значений

$z(O)=z(0;0)=0$, $\qquad z(B)=z(2;2)=4$,

$z(A)=z(0;2)=12$, $\qquad z(P)=z(1;1/2)=-\frac{1}{4}$,

$z(Q)=z(\sqrt{2};2)=12-8\sqrt{2}$, $\quad z(M)=z(1;1)=-1$.

Откуда $\max\limits_D z=z(A)=12$, $\min\limits_D z=z(M)=-1$.

Таким образом, точка $A$ является точкой глобального максимума, а точка $M$ – точкой глобального минимума данной функции в рассматриваемой замкнутой области $D$.

**4.** Из всех прямоугольных параллелепипедов с одинаковой поверхностью найти тот, который имеет наибольший объем.

***Решение***. Обозначим длину, ширину, и высоту параллелепипеда через $x$, $y$, $z$. И пусть $V$ – объем параллелепипеда. Тогда

$$V=xyz,\ S=2xy+2yz+2xz.$$

Задача сводится к нахождению экстремума функции $V(x;y;z)=xyz$ при условии $2xy+2yz+2xz=S$.

Составим функцию Лагранжа

$$\varphi(x;y;z;\lambda)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=yz+\lambda(2y+2z),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=xz+\lambda(2x+2z),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=xy+\lambda(2x+2y).$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases}2xy+2yz+2xz=S\\ yz+\lambda(2y+2z)=0,\\ xz+\lambda(2x+2z)=0,\\ xy+\lambda(2x+2y)=0,\end{cases}$$

получаем $x=y=z=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{6}}$.

При найденных $x$, $y$, $z$ объм будет наибольшим. Следовательно, прямоугольный параллелепипед данной поверхности $S$, имеющий наибольший объем, является кубом.

## *ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ*

**1.** Найти условные экстремумы функций:

1) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$,

2) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$,

3) $z = xy^2$ при $x^2 + y^2 = 1$,

4) $u = xy^2z^3$ при $x + 2y + 3z = 12$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

**2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных областях

1) $z = xy^2 + 4xy + 4x - 8$ в области $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 0$,

2) $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \le 1$,

3) $z = 1 + 2x + 2y$ в области $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

**3.** Найти прямоугольный параллелепипед с диной диагонали $d$, имеющей наибольший объем.

**4.** Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от Верин была бы наименьшей.

**5.** В прямой круговой конус с радиусом основания $R$ и высотой $H$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

## *ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ*

**1.** Найти условные экстремумы функций:

1) $z = 8 - 2x - 4y$ при $x^2 + 2y^2 = 12$,

2) $z = x^2 - y^2$ при $x + 2y = 6$,

3) $z = xy^2$ при $x^2 + y^2 = 4$,

4) $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

**2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных областях

1) $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 3$,

2) $z = x^2 + y^2$ в области $x^2 + y^2 \le 9$,

3) $z = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.

**3.** В полушар радиуса $R$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

**4.** Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную сумму длин ребер $12a$, найти параллелепипед с наибольшим объемом.