Практическое занятие 1 **Предел и непрерывность функции многих переменных**

1.1 Пространство $\mathbf{R}^n$

n*-мерным арифметическим точечным пространством* называется множество всех упорядоченных наборов ($x_1;x_2;...;x_n$) действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n и обозначается $\mathbf{R}^n$; его элементы – *точками* пространства $\mathbf{R}^n$; числа x_1, x_2, ..., x_n – *координатами* точки ($x_1;x_2;...;x_n$).

Точки пространства $\mathbf{R}^n$ обозначаются $M(x_1;x_2;...;x_n)$ или $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Точка $O(0;0;...;0)$ называется *началом координат*.

Расстоянием (*метрикой*) $\rho(x,x')$ между двумя точками $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ и $x'=(x_1';x_2';...;x_n')$ называется число

$$\rho(x;x')=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i')^2}\,.$$

При $n=1$ имеем пространство $\mathbf{R}^1$ (прямая) с расстоянием:

$$\rho(x,x')=\left|x_1-x_1'\right|;$$

при $n=2$ имеем пространство $\mathbf{R}^2$ (плоскость) с расстоянием:

$$\rho(x;x')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2}\,;$$

при $n=3$ имеем пространство $\mathbf{R}^3$ с расстоянием:

$$\rho(x;x')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}\,.$$

Арифметическое n-мерное пространство, в котором определено расстояние между двумя точками, называется *метрическим (евклидовым) пространством* $\mathbf{R}^n$.

Пусть (x_m), $x_m=(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m)$, – последовательность точек метрического пространства $\mathbf{R}^n$. Говорят, что последовательность точек (x_m) *сходится* к точке a, $a=(a_1;a_2;...;a_n)$ (имеет *предел* a), если $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_m;a)=0$:

$$\lim_{m\to\infty}x_m=a\,.$$

Для того чтобы последовательность точек (x_m), $x_m=(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m)$, сходилась к пределу $a=(a_1;a_2;...;a_n)\in\mathbf{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\lim_{m\to\infty}x_1^m=a_1,\ \lim_{m\to\infty}x_2^m=a_2,\ \ldots,\ \lim_{m\to\infty}x_n^m=a_n\,.$$

Для последовательностей пространства $\mathbf{R}^n$ имеют место аналогичные определения и свойства как и для последовательностей пространства $\mathbf{R}^1$.

Если последовательность точек (x_m) метрического пространства $\mathbf{R}^n$ сходится, то она является фундаментальной. Обратное утверждение для произвольного метрического пространства неверно. Метрическое пространство $\mathbf{R}^n$ называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится.

Множество точек $x=(x_1;x_2;...;x_n)\in\mathbf{R}^n$, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки $x^0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n'^0)$ меньше положительного числа r, называется ε*-окрестностью* точки $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$:

$$U(\varepsilon,x_0)=\{\ x\ |\ \rho(x,x_0)<\varepsilon\ \}.$$

Данное множество называется n-мерным открытым шаром радиуса ε с центром в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$.

Проколотой ε*-окрестностью* точки $x_0\in\mathbf{R}^n$ с радиусом ε называется множество точек $x\in\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $0<\rho(x,x_0)<\varepsilon$:

$$\mathring{U}(\varepsilon,x_0)=\{\,x\in\mathbf{R}^n\,|\,0<\rho(x,x_0)<\varepsilon\,\}.$$

Пусть G – некоторое множество пространства $\mathbf{R}^n$. Точка называется *внутренней точкой* множества G, если существует ее окрестность, целиком принадлежащая этому множеству. Множество G называется *открытым*, если все его точки внутренние. Любое открытое множество, содержащее точку $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$, является ее окрестностью. Точка называется *граничной точкой* множества G, если в любой ее окрестности содержатся точки, как принадлежащие множеству G, так и не принадлежащие ему. Множество граничных точек называется *границей* множества G и обозначается ∂G. Граничная точка может, как принадлежать множеству G, так и не принадлежать ему. Точка называется *предельной точкой* множества G, если в любой ее окрестности содержится бесконечно много точек множества G. Точка, не являющаяся предельной точкой множества G, называется *изолированной* точкой множества G. Множество G называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество, которое получается, если присоединить к множеству G все его предельные точки, называется замыканием G и обозначается $\overline{G}$. Множество G называется *ограниченным*, если существует такой n-мерный шар, который содержит внутри себя все точки множества G. Множество G называется *компактом*, если оно замкнуто и ограничено.

Множество

$$\Gamma = \left\{ \left(x_1; x_2; ...; x_n\right) \middle| \; x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t); \alpha \le t \le \beta \right\},$$

называется *непрерывной кривой*, соединяющей точки $P_1\left(x_1(\alpha); x_2(\alpha); ...; x_n(\alpha)\right)$ и $P_2\left(x_1(\beta); x_2(\beta); ...; x_n(\beta)\right)$. Здесь $x_i(t)$, $i = 1,2,...,n$, непрерывные функции на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Множество G называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой Γ, целиком принадлежащей этому множеству. Открытое связное множество называется *областью*, объединение области и ее границы называется *замкнутой областью*.

1.2 Функции многих переменных

Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$. Если правило f каждой точке $x = \left(x_1; x_2; ...; x_n\right) \in G$ ставит в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, то говорят, что на множестве G задана *числовая функция* (или *отображение*) f *от* n *переменных*:

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}.$$

Множество G называется *областью определения* и обозначается $D(f) = G$; множество $E = \left\{ u \in \mathbf{R} \middle| \; u = f(x), x \in G \right\}$ – *множеством значений функции* f.

В частном случае при $n = 2$ функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точек плоскости $\mathbf{R}^2$. Частное значение функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ обозначается $f(x_0, y_0)$, $f(M_0)$, $f\big|_{(x_0; y_0)}$ и $f\big|_{M_0}$.

Функция f двух переменных x и y может быть задана аналитическим, табличным, графическим и другими способами.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ изображается в трехмерном пространстве при выбранной декартовой системе координат $Oxyz$ как множество точек

$$\Gamma = \left\{ (x; y; z) \in \mathbf{R}^3 \middle| \; z = f(x, y) \right\},$$

которое есть некоторая поверхность в $\mathbf{R}^3$. Проекцией этой поверхности на плоскость Oxy является область $D(f)$.

Функцию трех и более переменных изобразить графически затруднительно.

Функции многих переменных задаются:

– явно уравнением, разрешенным относительно зависимой переменной:

$$z = f(x, y), \; u = f(x, y, z), \; u = f(x_1, x_2, ..., x_n);$$

– неявно уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной:

$$F(x; y) = 0 \text{)}, \; F(x; y; z) = 0, \; F(x_1; x_2; ...; x_n) = 0.$$

Множество точек $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих уравнению $f(x_1,x_2,...,x_n)=c$, называется *множеством уровня* функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$, соответствующим данному значению c.

При $n=2$ множество уровня называется *линией уровня*; при $n=3$ множество уровня называется *поверхностью уровня*; при $n>3$ множество уровня называется *гиперповерхностью уровня*.

1.3 Предел функции многих переменных, повторные пределы

Число A называется *пределом* (по Гейне) функции $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$, если для любой последовательности точек (x_m), $x_m=(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m)$, $m=\overline{1,\infty}$, $x_m\in\overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0)$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $(f(x_m))$ значений функции сходится к A:

$$A=\lim_{x\to x_0}f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall(x_m)_{m=1}^{\infty},\ x_m\in U(\varepsilon,x_0),\ \lim_{k\to\infty}x_k=x_0\quad \lim_{k\to\infty}f(x_m)=f(x_0).$$

Предел функции также обозначается:

$$A=\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \cdots\cdots\\ x_n\to x_n^0}}f(x_1,x_2,...,x_n)\ \text{и}\ A=\lim_{M\to M_0}f(M),$$

где $M(x_1,x_2,...,x_n)$, $M_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ точки пространства $\mathbf{R}^n$.

Аналогично функции одной переменной, определение предела по Гейне функции многих переменных на языке последовательностей эквивалентно определению предела по Коши.

Число A называется *пределом* (по Коши) функции $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для любой точки $x\in\overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$:

$$A=\lim_{x\to x_0}f(x)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists\overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0):\forall x\in\overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0)\quad|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Если функция двух переменных $f(x;y)$ определена в окрестности $\overset{\circ}{U}(\varepsilon;(x_0,y_0))$ и число A является пределом при $(x,y)\to(x_0,y_0)$, то предел

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x;y)$$

называется *двойным пределом*.

<u>Геометрически</u> неравенство $|f(x;y)-A|<\varepsilon$ означает, что точки графика функции $f(x,y)$ для $(x;y)\in\overset{\circ}{U}(\delta,(x_0;y_0))$ находятся между двумя плоскостями $z=A-\varepsilon$ и $z=A+\varepsilon$, т. е. предел функции $f(x;y)$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$ определяется поведением функции вблизи точки $(x_0;y_0)$ и не зависит от значения функции в этой точке.

Для случая функций многих переменных сохраняются все свойства пределов функций одной переменной (кроме тех, где существенна упорядоченность точек числовой прямой, например, односторонние пределы).

Бесконечные пределы для функций многих переменных $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, определяются по той же схеме, что и для функций одной переменной.

Например,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists\overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0):\forall x\in\overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0)\quad f(x)>\varepsilon.$$

П о в т о р н ы е п р е д е л ы. Для функции $f(x,y)$ можно определить понятие предела по переменной x, полагая переменную y постоянной, и можно определить предел по y, полагая x постоянной.

Пусть функция $f(x,y)$ задана в окрестности точки (x_0,y_0) за исключением, быть может, самой точки (x_0,y_0). И пусть для каждого фиксированного y из этой окрестности при $x\to x_0$ для функции $z=f(x,y)$ одной переменной x существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_{\text{фик}}}} f(x;y)=g(y)$, а при $y\to y_0$ для функции $g(y)$ существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=b$. Тогда говорят, что существует *повторный предел* b для функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0):

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x;y)=b.$$

Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$.

Теорема 1 Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и имеет в этой точке двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=b$. И пусть для любого фиксированного x из этой окрестности существует предел $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ x_{\text{фик}}}} f(x;y)=h(x)$ и для любого фиксированного y из этой окрестности существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_{\text{фик}}}} f(x;y)=g(y)$. Тогда повторные пределы $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$ существуют и равны:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x;y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x;y).$$

1.4 Непрерывность функции многих переменных

Функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{R}^n$, определенная в окрестности $U(\delta,x_0)$ точки $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

В противном случае точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

В частности, для функции $f(x,y)$ точки разрыва могут быть изолированными или образовывать линию разрыва, а для функции $f(x,y,z)$ точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линию или поверхность разрыва.

Для случая функций многих переменных сохраняются все свойства непрерывных функций одной переменной.

Пусть функция $f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{R}^n$, определена на множестве $G\subset\mathbf{R}^n$. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве G, если в каждой точке этого множества она непрерывна:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\quad \forall\, x_0\in G.$$

Теорема 2 (непрерывность сложной функции) Пусть функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$, $t=(t_1,t_2,...,t_m)$, определены в некоторой окрестности точки $t_0=(t_1^0;t_2^0;...;t_m^0)\in\mathbf{R}^m$ и непрерывны в точке t_0. Функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ определена в окрестности точки $x_0=(x_1(t_0);x_2(t_0);...;x_n(t_0))\in\mathbf{R}^n$ и непрерывна в точке x_0. Тогда в некоторой окрестности точки t_0 определена сложная функция $\Phi(t)=f(x_1(t);x_2(t);...;x_n(t))$, причем функция $\Phi(t)$ непрерывна в точке t_0.

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определения: а) n-мерного арифметического точечного пространства; б) расстояния в пространстве $\mathbf{R}^n$, в) n-мерного евклидова пространства.

2 Дайте определения окрестности и проколотой окрестности точки в пространстве $\mathbf{R}^n$.

3 Какая точка множества называется: а) внутренней; б) граничной; в) предельной; г) изолированной?

4 Может ли внутренняя точка не принадлежать множеству? Может ли точка одновременно быть внутренней и граничной для некоторого множества?

5 Какое множество называется а) открытым; б) замкнутым; в) компактом; г) связным; д) областью?

6 Что называется функцией в пространстве $\mathbf{R}^n$?

7 Что называется множеством уровня?

8 Сформулируйте определения предела функции $f(x,y)$ в точке по Гейне и по Коши.

9 Дайте для функции многих переменных определения бесконечных пределов:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

10 Сформулируйте определение повторного предела функции двух переменных.

11 Какая функция называется непрерывной в точке?

12 Какими свойствами обладают непрерывные функции?

13 Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции многих переменных.

Решение типовых примеров

1 Найти область определения функции:

а) $z=x^2+y^2$, в) $z=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2}$,

б) $z=\sqrt{4-x^2-2y^2}$. г) $z=\ln\left(5-x^2-y^2-z^2\right)$.

Решение. а) область определения этой функции $D(f)=\mathbf{R}^2$, множество значений $E(f)=[0;+\infty)$. Графиком данной функции в пространстве $\mathbf{R}^3$ является круговой параболоид (рисунок 1. 1);

б) областью определения $D(f)$ этой функции является множество всех точек плоскости $\mathbf{R}^2$, для которых определено выражение $\sqrt{4-x^2-2y^2}$, т. е.

$$4-x^2-2y^2\geq 0.$$

Множество таких точек лежит внутри и на эллипсе с полуосями $a=2$, $b=\sqrt{2}$ (рисунок 1. 2):

$$D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbf{R}^2\,\middle|\,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\leq 1\right\}.$$

Множество значений $E(f)=[0;2]$. Графиком этой функции является верхняя часть эллипсоида;

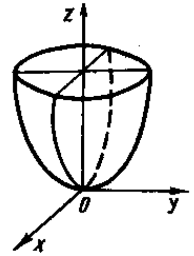

Рисунок 1. 1 – График функции $z=x^2+y^2$

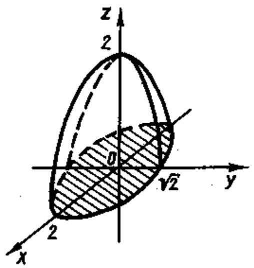

Рисунок 1. 2 – График функции $z=\sqrt{4-x^2-2y^2}$

в) функция определена, если $1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2\geq 0$ или $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leq 1$. Отсюда

$$D(f)=\left\{(x_1;x_2;\ldots;x_n)\in\mathbf{R}^n\,\middle|\,x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leq 1\right\},$$

т. е. областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек замкнутого n-мерного шара радиусом $r=1$ с центром в начале координат. $\mathbf{R}$. Множество значений функции есть отрезок $[0;1]$:

$$E(f)=[0;1];$$

г) функция определена, если $5-x^2-y^2-z^2>0$ или $x^2-y^2-z^2<5$. Отсюда областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек открытого трехмерного шара радиусом $\sqrt{5}$:

$$D(f)=\left\{(x;y;z)\in\mathbf{R}^3\,\middle|\,x^2+y^2+z^2<5\right\}.$$

Множество значений функции есть $E(f)=(-\infty;\ln 5]$.

2 Используя определение предела а) по Гейне; б) по Коши доказать $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}=0$.

Решение. а) область определения данной функции $D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\neq y\right\}$. Возьмем произвольную последовательность точек $(M_k)=((x_k;y_k))$, таких, что $x_k\neq y_k$, $x_k\to 0$, $y_k\to 0$. Тогда

$$f(M_k)=\frac{x_k^3-y_k^3}{x_k-y_k}=x_k^2+x_ky_k+y_k^2.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}=\lim_{k\to\infty}\left(x_k^2+x_ky_k+x_k^2\right)=0;$$

б) выберем произвольное число $\varepsilon>0$ и найдем $\delta(\varepsilon)$, такое, что для любой точки $M(x;y)\in\overset{\circ}{U}(\delta;(0;0))$ выполняется неравенство $|f(x,y)-0|<\varepsilon$. Так как для любой точки $M(x;y)\in D(f)$ справедливо соотношение

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2,$$

то

$$|f(x,y)-0|=\left|x^2+xy+y^2\right|\leq x^2+y^2+|xy|.$$

Оценим $|x\cdot y|$:

$$(|x|-|y|)^2=x^2-2xy+y^2\leq x^2+y^2\geq 0 \;\Rightarrow\; |x\cdot y|\leq\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$$

Таким образом,

$$|f(x,y)-0|\leq\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)=\frac{3}{2}\rho^2(O,M)<\varepsilon.$$

Отсюда $\rho(O,M)<\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$, где $\rho(O;M)$ – расстояние от точки $M(x;y)$ до точки $O(0;0)$.

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$, такое, что для любой точки $M(x;y)\in U(\delta,(0;0))$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x-y}-0\right|<\varepsilon.$$

По определению предела функции по Коши заключаем, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}=0$$

3 Найти точки разрыва функций:

а) $z=\frac{1}{(x-4)^2+y^2}$; б) $z=\frac{1}{x-y}$; в) $u=\frac{2}{x^2+y^2+z^2-9}$.

Решение. а) функция $z=\frac{1}{(x-4)^2+y^2}$ определена на $\mathbf{R}^2$ всюду, кроме точки $M(4;0)$, которая и является точкой разрыва функции;

б) функция $z=\frac{1}{x-y}$ определена для любых x, y, таких, что $x\neq y$. Следовательно, прямая $x=y$ является линией разрыва функции;

в) функция $u=\frac{2}{x^2+y^2+z^2-9}$ определена для любых x, y, z, таких, что $x^2+y^2+z^2\neq 9$. Следовательно, сфера с центром в начале координат и радиусом $R=3$ является поверхностью разрыва функции.

Задания для аудиторной работы

1 Являются ли окрестностями точки $A(1;1)$ множества:

а) $\{(x;y) \mid 0<x<1,\ 0<y\le 1\}$;

б) $\{(x;y) \mid x^2+y^2\le 1\}$;

в) $\{(x;y) \mid 0<x<2,\ -1<y<2\}$;

г) $\{(x;y) \mid 0<x<1,\ 0<y<1\}$?

2 Найти внутренние, граничные и предельные точки множеств:

а) $\{(x;y) \mid |x|<1,\ |y|\le 1\}$;

б) $\{(x;y;z) \mid \sqrt{x^2+y^2}\le z<2\}$;

в) $\{(x;y;z) \mid 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$;

г) $\{(x;y) \mid x+y<0\}$.

Какие из множеств являются открытыми, замкнутыми, связными, компактами?

3 Найти предел последовательности (x_n) в $\mathbf{R}^2$, где

$$x_n=\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right);\frac{1}{n}\sin n\right).$$

4 Найти области определения следующих функций:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$;

б) $z=y\sqrt{\cos x}$;

в) $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$;

г) $z=\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$;

д) $z=\sqrt{9-(x^2+y)^2}$;

е) $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$;

ж) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-25}$;

и) $z=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin y}$.

5 Найти для функции $f(x;y)=\dfrac{2x-3y}{3x-2y}$ значения $f(2;1)$, $f(1;2)$, $f(a;-a)$, $f(-a;a)$.

6 Выяснить, имеет ли предел при $x\to 0$, $y\to 0$ функция

$$f(x;y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,?$$

7 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -3}}\dfrac{(x-2)^2-(y+3)^2}{(x-2)^2+(y+3)^2}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

е) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\operatorname{tg}2xy}{x^2y}$.

8 Показать, что для функции

$$f(x;y)=(2x+3y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

не существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x;y)$, но существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x;y)=0$.

9 Показать, что для функции

$$f(x;y)=\frac{x^2+y^2-x+2y}{x+y}$$

существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x;y)$, а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x;y)$ не существует.

10 Имеет ли предел при $x\to\infty$, $y\to\infty$ функция

$$f(x;y)=\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}\,?$$

11 Найти точки разрыва следующих функций:

а) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}$; г) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{\sin xyz}$;

б) $f(x;y)=\ln\left|1-(x+1)^2-(y-2)^2\right|$; д) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z}$;

в) $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2-2x+3y}{x+y}$; е) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2-y^2+z^2}$.

Задания для домашней работы

1 Являются ли окрестностями точки $A(-1;-1)$ множества:

а) $\{(x;y)\mid -1<x<2,\ -1<y\le 1\}$;

б) $\{(x;y)\mid x^2+y^2\le 1\}$;

в) $\{(x;y)\mid -2<x<1,\ -3<y<0\}$?

2 Найти внутренние, граничные и предельные точки множеств:

а) $\{(x;y)\mid |x+y|<1\}$;

б) $\{(x;y;z)\mid x^2+y^2\le z\le 4\}$;

в) $\left\{(x;y;z)\mid 1\le \dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}<4\right\}$;

г) $\{(x;y)\mid x^2+y^2<1\}\cup\{(1;0)\}$.

Какие из множеств являются открытыми, замкнутыми, связными, компактами?

3 Найти предел последовательности (x_n) в $\mathbf{R}^3$, где

$$x_n=\left(\frac{(-1)^n}{n};\frac{n^2-3n+5}{2n^2+5};\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\right).$$

4 Найти области определения функций:

а) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$; д) $z=\dfrac{2x+3y-4}{x+4y}$;

б) $z=\ln(-x-y)$; е) $z=y\sqrt{\sin x}$;

в) $z=\arccos\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$; ж) $u=\ln\left(1-x^2-y^2+z^2\right)$;

г) $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{z^2+y^2}}{x}$; и) $z=\dfrac{1}{\cos x\sin y}$.

5 Найти $f(-3;4)$, $f\left(1;\dfrac{x}{y}\right)$, $f(a;-a)$, $f(-a;a)$, где

$$f(x;y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\sin xy}{xy}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to2}}\dfrac{x^3-y}{x^2+y^2}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to1}}\dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to0}}\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+4y^2}}{(x-1)^2+y^2}$; е) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x+y)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

7 Показать, что для функции $f(x;y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ существуют оба повторных предела $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x;y)$ а предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x;y)$ не существует.

8 Показать, что для функции $f(x;y)=(x-y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ не существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x;y)$, а предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x;y)$ существует.

9 Имеет ли предел функция $f(x;y)=\sin\ln(x^4+y^2)$ при $x\to 0$, $y\to 0$?

10 Найти точки разрыва функций:

а) $f(x;y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$;

б) $f(x;y)=\ln(1-x^2-y^2)$;

в) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2-1)(x^2-y^2-1)}$;

г) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$;

д) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$;

е) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x+y)(y^2-x)}$.

Практическое занятие 2 Частные производные

2.1 Частные и полные приращения функции многих переменных

2.2 Частные производные

2.3 Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных

2.4 Полный дифференциал функции многих переменных и его геометрический смысл

2.1 Частные и полные приращения функции многих переменных

Пусть функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ определена в окрестности точки $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$. Дадим переменной x_1^0 приращение Δx_1, а значения x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0 оставим без изменения.

Частным приращением функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ называется приращение

$$\Delta_{x_1}f(x_0)=f(x_1^0+\Delta x_1;x_2^0;...;x_n^0)-f(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0).$$

Аналогично определяются частные приращения $\Delta_{x_2}f(x_0)$, $\Delta_{x_3}f(x_0)$, ..., $\Delta_{x_n}f(x_0)$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$.

Полным приращением в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется разность

$$\Delta f(x_0)=f(x_1^0+\Delta x_1;x_2^0+\Delta x_2;...;x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0).$$

Геометрически для функции $f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$ частные и полное приращения

$$\Delta_x z=\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$
$$\Delta_y z=\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$\Delta z=\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

можно изобразить отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 (рисунок 2. 1).

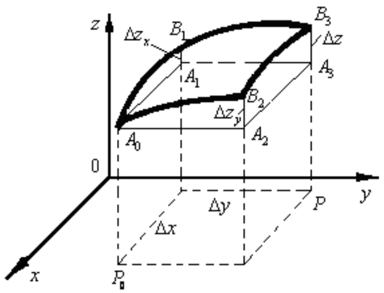

Рисунок 2. 1 – Геометрический смысл частных и полного приращений функции $f(x, y)$

2.2 Частные производные

Частной производной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x1} f\ (x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx_1, когда Δx_1 произвольным образом стремится к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)}{\Delta x_1}.$$

Для записи частной производной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ используется также обозначение $f'_{x_1}\Big|_{x = x_0}$.

Аналогично определяются частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Вследствие этого, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для производных функций одной переменной, имеют место и для частных производных. Однако во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какой-либо переменной все остальные переменные считаются постоянными.

2.3 Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных

Геометрический смысл частных производных. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, графиком которой является поверхность Ω. Точке $P_0(x_0; y_0) \in D(f)$ на поверхности Ω соответствует точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Пересечем график данной функции плоскостью $y = y_0$. В сечении получается кривая $z = f(x; y_0)$ (на рисунке 2.2 это кривая AM_0B), которую можно рассматривать как график функции одной переменной $z = f(x; y_0)$ в плоскости $y = y_0$. Тогда, по геометрическому смыслу производной функций одной переменной, значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ есть тангенс угла α, образованного положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной в точке $M_0(x_0; y_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$ (рисунок 2. 2).

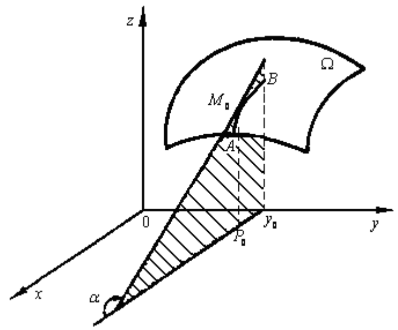

Рисунок 2. 2 – Геометрический смысл $\frac{\partial z(x; y)}{\partial x}$ в точке $P_0(x_0; y_0)$

Аналогично определяется геометрический смысл частной производной функции $z = f(x,y)$ по y.

<u>Касательная плоскость и нормаль к поверхности.</u> Графиком функции двух независимых переменных $z = f(x,y)$ в пространстве $\mathbf{R}^3$ является некоторая поверхность Ω (рисунок 2. 3). Выберем на ней точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

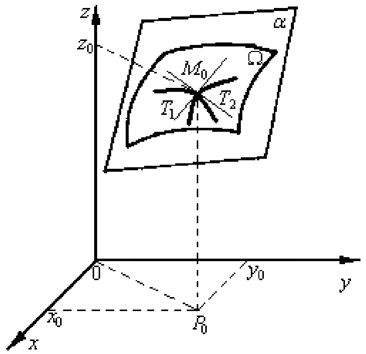

Рисунок 2. 3 – Касательная плоскость α к поверхности Ω

Касательной плоскостью к поверхности Ω в данной точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Уравнение касательной плоскости α к поверхности, проходящей через касательные T_1 и T_2 имеет вид

$$f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

или

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

Нормалью к поверхности Ω в данной точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности. Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, канонические уравнения нормали запишутся в виде:

$$\frac{(x-x_0)}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{(y-y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{(z-z_0)}{-1}.$$

Точка, в которой $F'_x=F'_y=F'_z=0$ или хотя бы одна из этих частных производных не существует, называется *особой точкой поверхности*. В такой точке поверхность может не иметь касательной плоскости.

<u>Механический смысл частных производных.</u> Частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$ характеризуют скорость изменения функции $z=f(x,y)$ в данной точке $P_0(x_0;y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0)$ задает скорость изменения функции в направлении прямой $y=y_0$ (или, что то же, относительно переменной x), $f'_y(x_0,y_0)$ – в направлении прямой $x=x_0$ (относительно переменной y).

2.4 Полный дифференциал функции многих переменных и его геометрический смысл

Пусть функция $f(x,y)$ определена в окрестности $U(\delta;P_0)$ точки $P_0(x_0;y_0)$. Функция $f(x,y)$ называется *дифференцируемой* в точке $P_0(x_0;y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f\big|_{(x_0,y_0)}=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y, \qquad (2.1)$$

где A и B – некоторые постоянные, зависящие от x_0 и y_0; $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые функции от Δx и Δy:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(\Delta x,\Delta y)=0,\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta(\Delta x,\Delta y)=0.$$

Соотношение (2.1) называется *условием дифференцируемости* функции $f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$.

Условие дифференцируемости записывается также в виде:

$$\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho), \qquad (2.2)$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0;y_0)$ и $P(x;y)$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0$.

Функция $f(x,y)$, дифференцируемая в каждой точке множества G, называется *дифференцируемой на* G.

В равенствах (2.1) и (2.2) слагаемое $A\Delta x + B\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, называется *главной частью приращения функции.*

Теорема 1 (связь дифференцируемости и непрерывности) Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то она и непрерывна в этой точке.

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости функции) Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0)=A$, $f'_y(x_0,y_0)=B$.

Утверждения, обратные утверждениям теорем 1 и 2 неверны: из непрерывности функции, а также существования ее частных производных, еще не следует дифференцируемость функции.

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости функции) Если функция $f(x;y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$, непрерывные в самой этой точке, то она дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$.

Функции с непрерывными частными производными называются *непрерывно дифференцируемыми*.

Если функция $f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f\big|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y . \qquad (2.3)$$

Сумма первых двух слагаемых есть главная линейная (относительно Δx и Δy) часть приращения функции и называется *полным дифференциалом* функции:

$$df(x_0;y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y .$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy называются *дифференциалами независимых переменных* x и y и *обозначаются* соответственно dx и dy.

Тогда полный дифференциал функции запишется в виде:

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy .$$

Выражения $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$ называются *частными дифференциалами* функции $f(x;y)$ и обозначаются $d_x f$ и $d_y f$.

Таким образом,

$$df = d_x f + d_y f .$$

Отбрасывая в формуле (2.2) слагаемое $o(\rho)$, т. е. заменяя приращение функции ее дифференциалом, получается равенство

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0;y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y , \quad (2.4)$$

которое используется для вычисления приближенного значения $f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ при малых Δx и Δy.

<u>Геометрический смысл дифференциала.</u> Учитывая, что $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y = y - y_0 = dy$, уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy .$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$, а левая его часть $z - z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания: $z - z_0 = df(x_0,y_0)$.

Определение дифференцируемости функции и ее дифференциала обобщаются на случай функции многих переменных $f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$.

Условие дифференцируемости запишется в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$.

Дифференциал функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n .$$

Вопросы для самоконтроля

1 Как определяются частные и полные приращения функции многих переменных?

2 Дайте определение частных производных.

3 В чем состоит геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных?

4 Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

5 Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.

6 Как связаны непрерывность и дифференцируемость функции?

7 Сформулируйте необходимое условие дифференцируемости функции в точке.

8 Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

9 Что называется полным дифференциалом функции многих переменных? В чем состоит его геометрический смысл?

Решение типовых примеров

1 Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2$ в точке $M_0(1;2)$, если $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

Р е ш е н и е . Имеем

$\Delta_x z = z(x_0 + \Delta x; y_0) - z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)y_0^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 \Delta x$,

$\Delta_x z\big|_{(1;2)} = 2^2 \cdot 0,1 = 0,4$.

Аналогично

$\Delta_y z = z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = x_0(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$

$= 2x_0 y_0 \Delta y + x_0 \Delta y^2$,

$\Delta_y z\big|_{(1;2)} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0,2 + 0,2^2 = 0,84$.

Тогда

$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$

$= 1,1 \cdot 2,2^2 - 1 \cdot 2^2 = 1,324$.

2 Найти частные производные функций

а) $z = x^2 + \sin(x + y^2)$;

б) $u = xy + \ln(x - y - z)$;

в) $u = xy + \sin^2(z - xt)$.

Р е ш е н и е . а) частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая y постоянной. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \cos(x + y^2).$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos(x + y^2);$$

б) частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая, что переменные y, z постоянны. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{x - y - z} = \frac{xy - y^2 - yz + 1}{x - y - z}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{x - y - z} = \frac{x^2 - xy - xz - 1}{x - y - z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{x - y - z};$$

в) имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y-2\sin(z-xt)\cos(z-xt)(-t)=y-t\sin 2(z-xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2\sin(z-xt)\cos(z-xt)=\sin 2(z-xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\sin(z-xt)\cos(z-xt)(-x)=-x\sin 2(z-xt).$$

3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=5-x^2-y^2$ в точке $M_0(1;1;3)$.

Решение. Уравнение поверхности задано явной функцией. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=-2, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=-2.$$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

$$-2(x-1)-2(y-1)-(z-3)=0 \text{ или } 2x+2y+z-7=0,$$

канонические уравнения нормали –

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1} \text{ или } \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}.$$

4 Доказать, что функция $z=xy^2$ дифференцируема на всей плоскости Oxy.

Решение. Действительно, полное приращение данной функции в любой точке $P(x;y)\in\mathbf{R}^2$ имеет вид

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)^2-xy^2=$$
$$=y^2\Delta x+2xy\Delta y+\left(2xy\Delta y+\Delta y^2\right)\Delta x+x(\Delta y)^2.$$

Положив $y^2=A$, $2xy=B$, $2xy\Delta y+\Delta y^2=\alpha$, $x\Delta y=\beta$, получим представление Δz в виде условия дифференцируемости, так как A и B в фиксированной точке $P_0(x_0;y_0)$ являются постоянными, а $\alpha\to 0$ и $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

5 Доказать, что функция $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$ не имеет частных производных.

Решение. Действительно,

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)+0-0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Функция $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x\to 0$. Следовательно, $f'_x(0,0)$ не существует.

Аналогично доказывается, что не существует $f'_y(0,0)$.

6 Найти полный дифференциал функции

$$f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Решение. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда полный дифференциал равен

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=$$

$$=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx-\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy+\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}dz=$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2\right)dz-z(xdx+ydy)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

7 Приближенно вычислить $\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}$.

Решение. Пусть $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$. Тогда искомое число будем рассматривать как значение функции

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

при $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$.

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

то по формуле (2.4) получим:

$\sqrt{(4,05)^2+(3,07)^2}\approx$

$\approx\sqrt{4^2+3^2}+\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}\cdot 0,05+\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}\cdot 0,07\approx 5+0,08=5,08.$

Задания для аудиторной работы

1 Найти частные производные функций:

а) $z=x^2+y^3-3x^2y+4x+5y-7$; г) $z=y\sin(3x-4y)$;

б) $z=3^{x^2y^4}$; д) $z=\frac{3x-y^5}{x^2+4y^3}$;

в) $z=\arccos\frac{x}{y}$; е) $z=\mathrm{arctg}\frac{1-xy}{x-y}$.

2 Вычислить значения частных производных в точке:

а) $z=\frac{x+y}{x-y}$, $M_0(3,2)$; б) $u=\frac{y-z}{z-x}$, $M_0(2,1,3)$.

3 Найти полный дифференциал функций:

а) $z=\mathrm{arctg}\frac{y}{1+x^2}$; б) $z=e^{\frac{x}{y}}$.

4 Вычислить полный дифференциал и полное приращение функции $z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$ при переходе от точки $M_0(1;1)$ к точке $M(1,1;0,8)$.

5 Показать, что функция $z=y\sin\left(y\,e^{-x}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

6. Вычислить приближенно значение выражения:

а) $\mathrm{arctg}\frac{1,02}{0,95}$; б) $1,98^{2,02}$.

7 Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=1+x^2=y^2$ в точке $M(1,1,3)$.

Задания для домашней работы

1 Найти частные производные функций:

а) $z=4x^2-2y^3-3xy^3-3xy+5y+8$; г) $z=x^2\cos(x+6y)$;

б) $z=5^{x^2y+xy^4}$; д) $z=\frac{4x^3+3y^5}{2x^2-5y^6}$;

в) $z=\arcsin\frac{x}{y}$; е) $z=\sqrt{y}\,e^{-2x}$.

2 Вычислить значения частных производных в точке:

а) $z=\frac{xy}{x+y}$, $M_0(4,-5)$;

б) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(1,-2,2)$.

3 Найти полный дифференциал функций:

а) $u=z^{y^x}$; б) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

4 Вычислить полный дифференциал и полное приращение функции $z=x^2-xy+y^2$ при переходе от точки $M_0(2;1)$ к точке $M(2,1;0,9)$.

5 Показать, что функция $u=\ln\left(e^x+e^y+e^z\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=1.$$

6 Вычислить приближенно значение выражения:

а) $\sqrt{(1,03)^2+(2,98)^2}$; б) $\ln\left(0,09^3+0,99^3\right)$.

7 Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ в точке $M(1,0,0)$.