МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Заочный факультет

Кафедра высшей математики

Допущена к защите
Зав. кафедрой _________ В.Н.Семенчук
«___» ___________ 2006 г.

РАЗРАБОТКА ТЕСТОВ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Дипломная работа
Исполнитель:
студент группы М-61 ___________ **Загорцева О.М.**

Научный руководитель:
к.т.н., доцент кафедры ___________ **Марченко Л.Н.**
высшей математики

Рецензент:
к.-ф.- м.н., доцент кафедры ___________ **Филипцов В.Ф.**
дифференциальных уравнений

Гомель 2006

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время тесты прочно обосновались в нашей жизни (от науки до развлекательных программ). Они стали также неотъемлемой частью системы образования: контроль, обучение, оценивание знаний в школе и ВУЗе. Есть много аргументов "За" и "Против" тестирования в процессе обучения. Противники тестирования указывают на невозможность судить о моменте ошибки обучающегося, логике его рассуждения в процессе тестирования, на вероятность угадать ответ и попросту списать. Ещё одним приводимым аргументом они называют то, что в процессе тестирования обучаемые испытывают определённый стресс, а потому могут растеряться и не показать своих действительных знаний. Сторонники тестов говорят, что тесты помогают во многом экономить время и силы преподавателя и студенту показать реальный уровень успеваемости, позволяют проверить усвоение большого объёма материала, осуществить пошаговый контроль и т.д.

Считается, что профессионально составленный тест даёт наиболее объективную картину подготовленности обучаемого по предмету, кроме того, он является особенно полезным для обеспечения непрерывности контролирующей деятельности педагога, измерения эффективности всей программы.

Во многих странах тестирование стало существенной составляющей жизни ВУЗа.

В то же время, опыт проведения централизованного тестирования в нашей Республике вскрыл много проблем: неподготовленность учащихся к такого вида контроля, недостаточное владение преподавателями методиками использования тестов и подготовки обучаемых к тестовому экзамену, непонимание многими участниками образовательного процесса, сути и особенностей теста и тестирования.

Тестирование в ВУЗе имеет свою специфику. Тесты – необходимый, но недостаточный элемент методов оценки учебной деятельности. Тест целесообразен после обычных контрольных работ как итоговый контроль по теме, как рубежный контроль, но не как итоговый контроль (экзамен) учебной деятельности. Такой тест должен быть уровневый (на данное задание теста приводится ряд ответов, из которых несколько правильных, и которые различаются глубиной понимания контролируемого задания учебного материала).

В данной дипломной работе осуществляется попытка разработать тесты по курсу "Математического анализа" для проведения рубежного и итогового контроля по теме «Интегральное исчисление функции действительной переменной». Предлагаются тесты открытого и закрытого типа.

В первом разделе рассматривается понятия теста, структура теста, приведены различные виды тестов и тестовые требования. Во втором разделе рассматриваются вопросы подготовки учащихся к тестированию, а также способы оценивания результатов тестирования. В третьем разделе описывается технология проектирования дидактических тестов, замечания по разработке тестов. Четвертый раздел является практической частью дипломной работы. Здесь приведены краткие теоретические сведения по теме «Интегральное исчисление функции одной действительной переменной», предложены варианты заданий тестов открытого и закрытого типов, составлен вариант тестов по теоретическому материалу. Данные тесты могут быть использованы при проведении рубежного и итогового контроля знаний студентов по данной теме.

1 ТЕСТЫ И ТЕСТИРОВАНИЕ

1.1 Тест, тестовое задание, тестирование

Под тестом понимается набор заданий определённого вида (чаще всего с выбором ответов), ответы на которые, как правило, заносятся в некоторые таблицы. Понятно, что это достаточно узкое и неполное видение теста как объекта. Если же говорить строго, то под тестом обычно понимается достаточно краткое, строго стандартизированное испытание, которое позволяет количественно выразить результат и, следовательно, дает возможность осуществить его математическую обработку [3].

В соответствии с классической теорией измерений в тесте можно выделить определенную структуру (см. рис. 1).

СТРУКТУРА ТЕСТА

- Некоторая совокупность заданий
- Инструктивно-методическое обеспечение теста
- Шкала результатов тестирования

Рис.1.1 Структура теста

Вообще говоря, по назначению тесты бывают различные:

- Психологические - позволяют диагностировать личностные качества человека, общие и специальные способности, уровень интеллекта.
- Профессиональные (тесты на профпригодность) – помогают определить уровень знаний и умений сотрудника в области его непосредственной деятельности.
- Дидактические (педагогические) - дают возможность проверить информированность знаний, умений и навыков учащихся, предназначены для контроля и обучения.

В дальнейшем будем говорить лишь о дидактических тестах, с которыми наиболее часто сталкивается преподаватель.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

СТАНДАРТИЗИРОВАННЫЕ

НЕСТАНДАРТИЗИРОВАННЫЕ

Рис.1.2 Виды тестов

Тесты можно разделить на две большие группы: тесты *стандартизированные* и *нестандартизированные.*

Стандартизированные тесты - это тесты, измеряющие уровень знаний, умений и навыков обучаемого в различных предметных областях путем сопоставления его тестовых показателей с показателями учащихся определенной обобщенной контрольном группы.

Такие тесты проходят этап стандартизации, в ходе которого осуществляется не только экспертный анализ содержания тестовых заданий, но и определяются качественные характеристики каждого задания и теста в целом, строится обоснованная тестовая шкала, позволяющая интерпретировать результаты тестирования, и т.д.

Стандартизированные тесты имеют ряд отличительных черт. Они снабжаются специальными инструкциями по проведению и оценке тестов, позволяют проводить один и тот же тест с учащимися, находящимися в разных пунктах и в разное время. Эти тесты имеют так называемые статистические нормы, которые позволяют сопоставлять тестовые оценки отдельных учеников *с* оценками определенной группы, уже прошедшей тестирование. Именно эти тесты дают объективную картину уровня усвоения материала учащимися.

Разработка стандартизированного теста – длительный и сложный процесс. К его реализации привлекаются, как правило, не только специалисты-предметники, но и профессионалы и области тестирования, психологи, программисты и т. д.

Разумеется, что национальные тесты, применяемые в рамках всей Республики Беларусь, должны быть стандартизированы. Например, этому требованию должны обязательно соответствовать тесты, применяемые при централизованном тестировании.

Следует сказать, что в дидактике традиционно выделяют задачи, которые можно решить и без использования стандартизированных тестов. К ним относят, например, оценку качества усвоения материала той или иной учебной темы, выявление степени понятий, определений и т. д.

Поэтому, наряду со стандартизированными, в педагогике используют *нестандартизированные* тесты, то есть тесты, не прошедшие этап стандартизации. Как правило, это тесты, разработанные преподавателями-практиками.

Многие специалисты-тестологи не считают возможным рассматривать такого рода тесты как вид тестов, так как, по их мнению, стандартизированность - необходимая особенность, определяющая сущность теста как диагностические методики. С другой стороны, в ряде случаев временные и финансовые затраты, требующиеся для разработки стандартизированных тестов, всегда оправдываются из-за некоторой их негибкости. А постоянная смена учебных планов, программ, наличие различных типов общеобразовательных учреждений позволяет говорить о возможности использования тестов, созданных учителями-практиками, то есть нестандартизированных, не формальных.

Следует при этом сказать, что сфера применения нестандартизизированных тестов ограничена. Круг задач для таких тестов – частные, специальные методические и узкометодические. Результаты, полученные с их помощью, малонадежны и требуют подтверждения.

Качество нестандартизированных тестов может быть достаточно высоким, если разработчик тщательно подходит к созданию теста, учитывает и пытается определить его качественные характеристики (валидность, надежность, дискриминативность и т.д.), речь о которых пойдет далее.

Таблица 1.1. Сравнительная характеристика стандартизированных и нестандартизированных тестов

Признак сравнения	Стандартизированные тесты	Нестандартизированные тесты
Измеряемые результаты и содержание обучения	Измеряют результаты и содержание обучения, характерные для большинства школ республики.	Хорошо приспособлены к результатам и содержанию обучения различных учебных программ Позволяют адаптироваться к новым материалам и изменениям и методике
Проверяемые знания	Как правило, проверяют комплексные результаты обучения. Ориентированы на итоговый контроль знаний	Применяются к учебным порциям различного объема Мало ориентированы на комплексные результаты обучения. Применяются к основном для текущего и тематического контроля знаний
Качество тестовых вопросов	Уровень вопросов высок, так как тесты составляются специалистами и проверяются на предварительном (пробном) тестировании с последующей доработкой вопросов и задании	Качество вопросов неизвестно, но обычно ниже, чем у стандартизированных тестов. Причиной является нехватка времени и квалификации преподавателя
Достоверность	Уровень достоверности высок	Уровень достоверности обычно неизвестен, но должен быть высоким при тщательном подходе к разработке.
Проведение тестирования и выставление оценки	Процедуры стандартизированы. К тестам прилагаются специальные инструкции для обучаемых и преподавателей, оценочные шкалы, полученные с помощью математических методов.	Единые процедуры возможны, но редко осуществляются. Как правило, носят гибкий характер. Оценки выставляется по усмотрению преподавателя

В таблице 1.1 приведен сравнительный анализ стандартизированных и нестандартизированных тестов.

Как видно, каждый из двух выделенных типов тестов в чем-то опережает и чем-то уступает другому.

Так, например, стандартизированные тесты имеют строго контролируемую процедуру тестирования и выведения оценок, что снижает до минимума влияние субъективных факторов на эти процедуры, делает тесты объективным инструментом педагогических измерений.

В то же время негибкость стандартизированных тестов мешает использовать их в тех направлениях и целях, где нестандартизированные тесты достаточно эффективны. Например, при проведении текущего и тематического контроля знаний, особенно в условиях постоянно изменяющихся учебных планов, программ, разнообразия учебников, типов учебных заведений, различных уровней изучения учебных предметов.

Взаимодополняемые качества стандартизированных и нестандартизированных тестов указывают на то, что оба эти вида необходимы в обучении.

Для того чтобы и те, и другие тесты выполнили функции, которые ставит перед ними преподаватель, они должны соответствовать основным качественным характеристикам тестов - валидности и надежности.

Иногда их можно описать, но чаще всего валидность и надежность оценивают с помощью математических методов и выражают в специальных показателях - коэффициентах валидности и надежности.

Валидность указывает на то, что тест измеряет и насколько хорошо он это делает, то есть валидность означает пригодность теста для тех или иных целей.

Фактически, валидность теста выражает степень, в которой тест (проверяет) именно то, что он должен измерить (проверить).

Оказывается, что, с одной стороны, достаточно легко указать цель применения теста, те знания, которые он должен проверить. С другой стороны, довольно трудно подобрать тестовые задания так, чтобы они измеряли именно то, что хочет измерить разработчик.

Например, при разработке теста по химии, проверяющего умения решать задачи на концентрацию растворов и смесей, рекомендуется включать такие задачи, которые не требовали бы сложных математических вычислений. В противном случае ошибки, допущенные при выполнении тестовых заданий, не всегда будут свидетельствовать о несформированном умении решать химические задачи, а о плохом владении вычислительными навыками. В результате в тестовом балле не всегда будет отражаться степень владения умением решать задачи определенного вида, а значит, тест не будет валидным по отношению к поставленной цели.

Понятие валидности достаточно сложное, в него входит большое количество информации о тесте. В литературе выделяется около 300 типов валидности. Наиболее распространенные из них содержательная, концептуальная, критериальная, очевидная, прогностическая, экологическая, эмпирическая. Следует отметить, что многие вопросы, касающиеся валидности теста, не разработаны в мировой практике. Например, остаются неизученными вопросы особенностей взаимосвязи типов валидности.

Отметим, что валидность теста и целом во многом определяется валидностью отдельных заданий, поэтому тщательный отбор тестовых заданий способствует повышению валидности теста.

Валидизация теста - одна из составляющих процедуры стандартизации. Однако определенные виды валидности необходимо учитывать и при разработке неформальных тестов педагогами-предметниками.

Например, практически всеми специалистами признаётся необходимость содержательной валидности. Для дидактического теста, например, содержательная валидность определяет, в какой степени тест в целом и отдельные его тестовые задания соответствуют целям обучения и содержанию учебного предмета, успешность усвоения которых проверятся.

Надежность теста часто связывают с точностью измерения: чем выше надежность, тем точнее результаты измерения (проверки). Другими словами, надежность теста показывает, насколько можно верить результатам разового тестирования, то есть насколько будут согласованы результаты теста при первом и повторном тестировании для одного ученика.

Выделяют также различные типы надежности: ретестовую, параллельных форм, надежность по внутренней согласованности, надёжность частей теста.

Валидность и надежность теста связаны между собой. Считается, что если тест валиден для данной цели, то он и надежен. Обратное неверно. Так, тест может быть надежным и совсем невалидным для той или иной цели.

Подробнее о характеристиках тестов будет рассказано далее. Рассмотрим некоторые составляющие теста.

1.2 Тестовые задания, их виды и требования к ним

Как известно, единицей теста, его структурным элементом является *тестовое задание.* Его можно определить как "наиболее простой и в то же время целостный структурный элемент теста. Сами задания, входящие в тест, могут быть разнообразны как форме предъявления, так и по содержанию. Существуют разные подходы к классификации тестовых заданий по форме их предъявления. Наиболее распространенной является типы тестовых заданий, приведенных на рисунке 3.1.

ТИПЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

• **задания закрытые**, в которых тестируемый выбирает правильный ответ из данного набора ответов,

• **задания открытые**, требующие от тестируемого самостоятельное формирование ответа;

• **задания на установление соответствия**, выполнение которых связано с выявлением соответствия между элементами двух множеств;

• **задания на установление правильной последовательности**, в которых тестируемый должен указать порядок действий или процессов.

Рис.1.3. Типы тестовых заданий

Основным фактором, влияющим на форму тестового задания, является способ получения ответа (выбор из предлагаемых вариантом пни самостоятельное формулирование ответа). Тогда эта классификация может быть представлена следующей схемой.

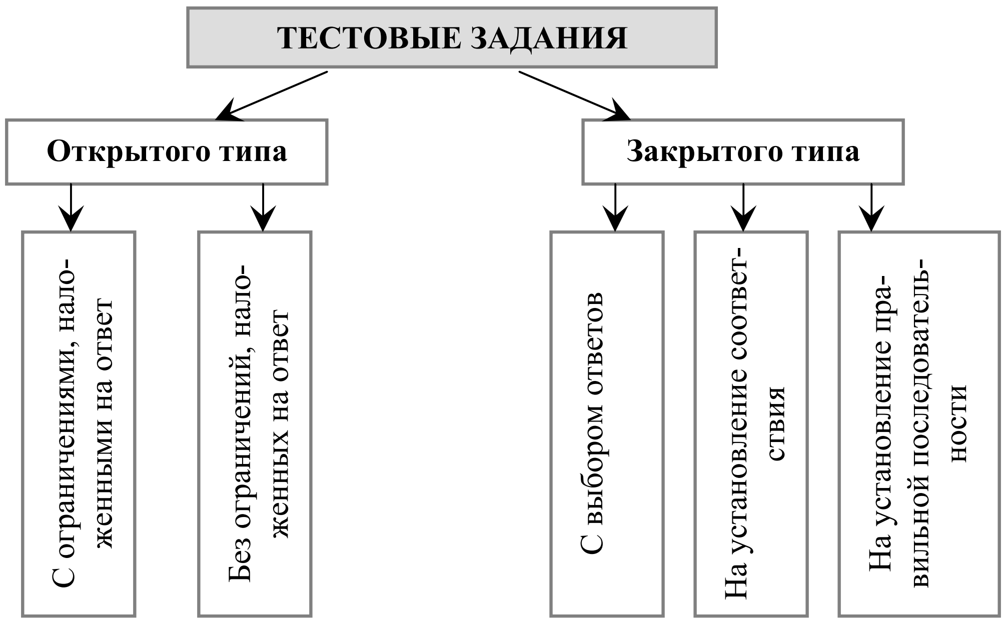

Рис.1.4. Тестовые задания

Следует отметить, что тестовые задания имеют ряд характеристик. Каждое тестовое задание имеет свой *порядковый номер*. Как правило, задания в тесте расположены по возрастанию сложности, хотя и не исключены и варианты, в которых сложность заданий колеблется в различных направлениях по мере продвижения по тесту.

Каждое тестовое задание имеет *эталон правильного ответа*. Задания, не имеющие верного ответа, как правило, в тест не включаются.

Тестовые задания одной формы обычно сопровождаются *стандартной инструкцией*, которая предшествует формулировке заданий в тесте.

Для каждого тестового задания разрабатывается правило *выставления оценки* (начисления баллов).

Тестовое задание по форме предъявления и по времени выполнения обычно достаточно краткое. При формулировке задания обращают внимание на то, чтобы все высказывания теста были понятны всем без исключения ученикам (сформулированы в простых выражениях с общеупотребительной лексикой, без терминов, использующих иностранные или малоупотребительные слова. По возможности, в заданиях избегают оборотов с отрицанием "не" поскольку считается, что предпочтительнее что-то утверждать (как позитивное, так и негативное).

Задания открытого типа. В заданиях открытой формы (заданиях на дополнение) готовые ответы не даются, их необходимо получить. Различают два вида открытых заданий:

1) с ограничениями, наложенными на ответ;

2) без ограничений, наложенных на ответ, в которых тестируемые должны составить развернутый ответ в виде решения задачи.

Задания второго вида мало отличаются от традиционной контрольной работы, требуют больших затрат на проверку и сложнее поддаются стандартизации.

При ответе на открытое задание с ограниченным ответом ученик дописывает пропущенное слово, формулу или число на месте прочерка или в специально отведенном месте на бланке ответов.

Инструкция к заданиям открытого типа обычно сопровождается словами: *"Впишите недостающее слово на месте прочерка"* или *"Получите и запишите ответ в бланке ответов"* и т. п.

Задания закрытого типа. *Задания с выбором ответов.* Закрытое задание с выбором ответа, как правило, включает вопрос и несколько вариантов ответа к нему (они обозначены буквами А, Б, В, Г,... или цифрами: 1,2,3,4,...). Ученику надо выбрать среди ответов верные. В большинстве тестов правильный только один. Но иногда разработчики теста закладывают среди ответов несколько верных. Правдоподобные ответы называют дистракторами. Их число в задании обычно не более пяти. Дистракторы подбирают с учетом типичных ошибок школьников.

Закрытое тестовое задание с выбором ответа считается "хорошо работающим", если знающие учебный материал ученики выполняют его правильно, а незнающие выбирают любой из ответов с одинаковой вероятностью.

Задания с выбором ответа обычно предваряют следующей инструкцией: *Укажите номер (букву) правильного ответа* (при бланковом тестировании) или: *Нажмите клавишу с номером (буквой) правильного ответа* (при компьютерном тестировании).

Тестовые задания с выбором одного правильного ответа, как правило, имеют следующие характеристики:

• в тексте задания избегают двусмысленности и неясности;

• задание имеет простую синтаксическую конструкцию;

• основная часть содержит как можно больше слов, оставляя для ответа не более 2-3 ключевых слов для данной проблемы. Из ответов исключают все повторяющиеся слова путем ввода их в основной иной текст задания;

•ответы к одному заданию обычно предлагают одной длины;

•стараются исключить все вербальные ассоциации, способствующие выбору правильного ответа с помощью догадки;

•частота выбора одного и того же номера правильного ответа в различных заданиях текста обычно одинакова либо этот номер случайный;

•из числа тестовых заданий исключаются обычно те, которые содержат оценочные суждения и мнения тестируемого по какому-либо вопросу;

•число вариантов ответов в каждом задании одинаковое и обычно не более пяти (редко - 7);

•при формулировке дистракторов (правдоподобных ответов) избегают выражений "ни один из перечисленных", "все перечисленные" и т. д., способствующие угадыванию, в ответах стараются не использовать такие слова, как "все", "ни одного", "никогда", "всегда" и т. п., как способствующие угадыванию;

•дистракторы предлагают такие, чтобы они были равно привлекательными для испытуемых, не знающих правильного ответа;

• ни один из дистракторов не является частично правильным ответом, превращающимся при определенных условиях в правильный ответ;

• из числа неверных исключают ответы, вытекающие один из другого;

• ответы подбирают так, чтобы ключ одного задания не служил ключом к правильным ответам другого задания, то есть не используют дистракторы из одного задания в качестве правильных ответов другого;

• все ответы, как правило, параллельны по конструкции и грамматически согласованы с основной частью задания теста;

•если в задании имеются альтернативные ответы, то их не ставят рядом с правильным, так как это сразу сосредотачивает, внимание на них.

Сравнительная характеристика типов тестовых заданий. Выбор типов тестовых заданий определяется многими параметрами: спецификой содержания учебного предмета, целями тестирования, уровнем сложности заданий, профессионализмом разработчика и т.д.

Каждый из типов тестовых заданий имеет свои преимущества и недостатки. Например, задания закрытой формы с выбором ответа характеризуются преимуществами, которыми обладают все тесты, а именно:

- объективностью оценки результатов выполнения работы;
- быстротой проверки выполненных заданий;
- системной проверкой достаточно большого объема учебного материала.

В то же время у них есть положительные характеристики, присущие только данному виду заданий. Например, они наиболее легки в обработке, позволяют без особых затрат организовать компьютерный сбор и анализ результатов и т.д. Но такие тесты имеют и свои недостатки:

•проверка лишь конечных результатов работы;

•невозможность проследить логику рассуждения учащегося при выполнении заданий;

•некоторая вероятность выбора ответа наугад;

•невозможность тестовой проверки некоторых видов учебной деятельности (например, самостоятельного нахождения направлений решения).

Избежать перечисленных недостатков часто помогает достаточно большое количество заданий в тесте (их обычно больше 20) и большое число вариантов ответов (больше 4).

Некоторых из указанных недостатков (например, угадывание ответа) позволяют избежать тесты открытого типа. Но, в то же время, результаты этих заданий труднее поддаются статистической обработке, а для оценивания заданий с развернутым ответом требуется привлечение экспертов, что, в свою очередь, снижает объективность контроля, усложняет стандартизацию теста, увеличивает временные и финансовые затраты на обработку тестовых результатов.

В теории тестов все чаще высказывается мнение о том, что в одном тесте желательно использовать как можно меньше различных форм тестовых заданий. Профессиональные тесты часто отличаются именно моноформностью заданий. Однако это требование не всегда выполнимо из-за специфики тою или иного предмета. Поэтому разработчики часто совмещают в рамках одного теста различные виды тестовых заданий (например, закрытые и открытые).

Например, тесты централизованного тестирования содержат две части (часть А и часть Б). Часть А содержит тестовые задания закрытого типа, а часть Б - открытого.

В таблицах 1.2 и 1.3 приведены сопоставительные характеристики тестовых заданий различного вида.

Таблица 1.2. Сопоставительный анализ тестовых заданий в соответствии с уровнями усвоения учебного материала

Уровни	Типы заданий			
	Закрытые			Открытые
	С выбором ответа	На установление соответствия	На установление правильной последовательности	
Узнавания	+	+	+	Мало пригодны
Неосознанного восприятия	+	+	+	+
Осознанного восприятия	+	+	Мало пригодны	+
Применения в знакомой ситуации	+	Мало пригодны	Мало пригодны	+
Применения в незнакомой ситуации	Мало пригодны	Мало пригодны	Мало пригодны	+

Руководствуясь некоторыми из указанных характеристик, создатели теста могут выбирать пригодную для определенных целей форму тестовых заданий. Следует также отметить, что получить всеобъемлющую картину уровня знаний позволит только разумное сочетание тестов с традиционными формами и методами контроля.

Таблица 1.3. Сопоставительный анализ тестовых заданий в соответствии с показателями конструирования теста

Показатели конструирования теста	Типы заданий				
	Закрытые			Открытые	
	С выбором ответов	На установление соответствия	На установление правильной последовательности	С ограниченным ответом	Со свободным ответом
Простота конструирования	Не всегда	Не всегда	Не всегда	Да	Да
Эффект угадывания	Есть	Есть	Есть	Нет	Нет
Объективность в оценке результата выполнения	Есть	Есть	Есть	Зависит от качества задания	Нет, оценка субъективна
Возможность ошибок учащихся при написании ответа	Нет	Нет	Нет	Есть	Есть

1.3 Инструктивно-методическое обеспечение теста

Кроме самих тестовых заданий, в структуре теста выделяют его инструктивно-методическое обеспечение, которое включает теоретическое описание свойств, измеряемых тестом, инструкцию для ученика, рекомендации для лица, проводящего тестирование, руководство по обработке результатов тестирования, правила интерпретации результатов тестирования.

Теоретическое описание свойств, измеряемых тестом для дидактических тестов по математике, выглядит как перечень требований к математической подготовке учащихся и отражается часто в спецификации теста, которая может быть представлена в сжатом или развернутом виде.

Чаще всего развернутая спецификация создается для тестов, используемых для итоговой аттестации или для проведения вступительных экзаменов. Развернутую спецификацию, как правило, имеют тесты, которые используются не в рамках отдельно взятого класса или школы, а те, которые применяют я в рамках области, региона, страны.

В развернутом виде спецификация, как правило, включает:

•цели создания теста (входная аттестация, промежуточная аттестация, итоговая аттестация);

•перечень специальностей и направлений подготовки, для которых планируется использование данного теста;

•перечень исходных документов, использованных при разработке теста (учебные программы, планы с указанием года и места) издания, наименование программ вступительных испытаний и т. п.);

•описание общей структуры теста;

•число заданий в каждом варианте теста;

•число вариантов разработанного теста;

•количество и процентное содержание заданий каждой формы;

•число ответов к заданиям с выбором ответа;

•вес каждого задания при подсчете баллов испытуемых;

•время выполнения теста и ориентировочное время выполнения каждого задания;

Соотношение заданий в каждом варианте теста по разделам (Содержательным линиям) и видам деятельности (знаниям, умениям) испытуемых (в виде таблицы с подробной расшифровкой).

В настоящее время в практике чаще всего используются бланковые тесты или тесты "карандаша и бумаги".

В комплект таких тестов, как правило, входят:

- бланк заданий;
- бланк ответов;
- инструкция для учащегося;
- руководство для преподавателя;
- ключи теста.

Остановимся более подробно на указанных компонентах.

Бланки заданий размещены обычно в сборниках тестов или в типовых тестовых тетрадях и состоят, как правило, из набора утверждений, вопросов или задач. На бланке отражена последовательность задач с вариантами ответов или с пропусками в соответствии с типом вопроса. Расположение заданий и внешний вид этого бланка может быть разным, главное здесь - удобство чтения и представления информации.

Бланки ответов могут иметь различную форму. Она, как правило определяется разработчиком и учитывает удобство представления ответов и возможность их последующей обработки.

Примеры различных бланков ответов.

Номер	1	2	3	4
Верные				

В этот бланк для каждого задания вносится либо цифра (буква) верного ответа (для заданий закрытой формы) или сам ответ (для открытых заданий). Такие бланки, как видно, наиболее просты в конструировании, но неудобны при достаточно большом количестве заданий. В этом случае рекомендуется использовать такие бланки.

Номер задания	Варианты ответов
1	A, B, C, D, E
2	A, B, C, D, E

3	A, B, C, D, E
4	A, B, C, D, E
5	A, B, C, D, E
6	A, B, C, D, E
7	A, B, C, D, E
8	A, B, C, D, E
9	A, B, C, D, E
10	A, B, C, D, E

В этих бланках надо обвести кружком (или подчеркнуть) нужную букву верного ответа для задания с соответствующим номером. Иногда во втором столбце вместо букв могут быть цифры

Иногда на бланке ответов (например, на бланке централизованного тестирования) предусмотрено место для внесения исправлений в уже записанные ответы.

Итак, бланк составляется таким образом, чтобы обеспечить наибольшее удобство при его заполнении и обработке.

Инструкция для испытуемого но выполнению теста обычно содержит правила работы с тестами, рекомендации по заполнению таблицы ответов. Она снабжена, как правило, несколькими примерами, с помощью которых учащийся знакомится с типом и формой задач, с правилами ответа на вопросы. Инструкция может сообщаться испытуемым в устной или письменной формах. Ознакомившись с инструкцией, тестируемый должен четко представлять, что от него требуется. Изложение инструкции должно быть ясным, доступным и подробным. От этого зависит понимание ее испытуемыми и отсутствие лишних вопросов.

Памятка учащемуся при работе с тестами:

1. Помни: добросовестное изучение предмета в школе и на дополнительных занятиях - основа высоких результатов тестирований
2. Внимательно ознакомься с инструкцией по выполнению теста. Читай каждое задание до конца. Познакомься с вариантами ответов.
3. Не отвлекайся! Помни, что высокий темп выполнения теста играет важную роль.
4. Пропускай трудные или непонятные задания. Спланируй время так, чтобы у тебя была возможность к ним вернуться.
5. Знай, в тесте всегда найдутся задания, с которыми ты обязательно справишься. Каждое новое задание - это шанс набрать большее количество баллов.
6. Научись исключать явно неверные ответы. Знание о том что ответ заведомо не годится - это тоже знание, не отказывайся от его использования.
7. Заполняй бланк ответов точно и аккуратно. Небрежность может повлиять на твои результаты.
8. Знай, результат по тесту - это не "пожизненный диагноз", это информация о твоих успехах и ошибках. У тебя всегда есть возможность устранить выявленные пробелы в знаниях.

Кроме инструкции для обучаемого, инструктивно-методическое обеспечение теста включает и руководство для преподавателя по дению тестирования. В нем обычно указывается:

- Назначение тестов (курс, время, цель проведения теста);
- Состояние теста (общее количество заданий, наличие среди них заданий открытой, закрытой формы и т. д.);
- Описание предлагаемых типов, форм и модификаций заданий;
- Указания к проведению (условия, инструкция и т.д.);
- Ключи (ответы) к тестам;
- Правила обработки результатов;
- Устройство шкалы и правила интерпретации результатов (перевод тестовых баллов в традиционную оценку успеваемости);
- Записи о надежности и валидности теста.

Указания к применению в общем виде должны включать в себя следующие необходимые сведения, которые могут сообщаться обучаемым (в зависимости от условий тестирования что-то может быть сокращено или добавлено):

1. Объяснить, зачем нужен тест, сообщить, какие результаты ожидаются.
2. Прочесть или объяснить инструкцию.
3. Сообщить о временном ресурсе, о правилах исправления допущенных ошибок, о том, чего не рекомендуется делать при решении задач, к кому обращаться в случае возникновения вопросов.
4. Вместе с испытуемыми или самому записать, если требуется, паспортные и биографические данные в регистрационных бланках. Проследить за правильностью заполнения.
5. Ответить на имеющиеся вопросы.
6. Дать команду начать выполнение заданий теста, записать время начала работы.
7. Во время решения теста следить за тем, чтобы соседи не общались между собой, не подглядывали друг у друга; за тем, чтобы испытуемые не писали на тестовых брошюрах (если это не предусмотрено) и т. д.
8. После сигнала к окончанию работы над тестом собрать материалы.

Кроме этого, в указаниях к проведению тестирования должна быть предусмотрена процедура приветствия и благодарности за выполненную работу, действия экспериментатора с опоздавшими учащимися, просьбами учеников временно покинуть место проведения тестирования, ответов на наиболее часто встречающиеся вопросы и некоторые другие по усмотрению авторов.

Ключи (ответы) к тесту представляют собой наборы ответов к вопросам или к вариантам ответов с их оценками для установления степени выраженности того или иного свойства личности или состояния обученности. В педагогических тестах ключом к тесту являются упорядоченные наборы правильных (или неправильных) ответов на вопросы или задачи.

Тестирование предполагает не только стандартные процедуры составления и обработки тестов, но и стандартизацию самого процесса проведения тестирования. Во многом этому помогает унификация условий проведения теста, использование инструктивно-методического обеспечения процесса тестирования.

В исследованиях по теории тестирования считается, что на результаты теста, кроме подготовленности учащихся, качественных по содержанию тестов, психологической настроенности тестируемых влияют еще внешние условия физические, психологические и технологические. При их определении учитываются характеристики помещения, его оснащение, наличие отвлекающих факторов, состояние тестовых материалов и т. п.

При организации тестирования к формальной его стороне предъявляются обычно следующие требования:

- обеспечение в необходимом количестве инструментарием для проведения тестирования: бланками вопросов и ответов, ручками, карандашами и др.;
- наличие посадочных мест в количестве, необходимом для проведения тестирования;
- такое размещение столов и стульев, чтобы к каждому ученику было удобно подойти и т.д.

2 ВЫВЕДЕНИЕ ОЦЕНКИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ВЫПОЛНЕННОГО ТЕСТА

После выполнения теста перед преподавателем возникает вопрос: как оценить проделанную учеником работу? Здесь появляются проблемы:

а) как начислять баллы за каждое выполненное задание и тест в целом?

б) как перевести итоговый тестовый балл в оценку школьной успеваемости?

Существуют различные механизмы начисления баллов за каждое выполненное задание. В рамках одной модели за каждое верно выполненное задание начисляется один балл, а если задание выполнено неверно, то ничего не начисляется.

Другая модель предполагает "наказание" за неправильно выполненное тестовое задание. Здесь также как и в первой модели за правильно выполненное задание прибавляется один или несколько баллов, в противном случае вычитаются определенные баллы.

Существуют модели, в которых каждое тестовое задание имеет свой вес, то есть задания, при правильности выполнения которых начисляется 5 баллов, а есть задания, ценность которых определяется 3 баллами и т.д.

Итоговый тестовый балл определяется обычно как сумма баллов за отдельно выполненные задания. Итоговый балл с помощью шкалы можно перевести в оценку школьной успеваемости. Например:

Тестовый Балл	95-100	90-95	80-89	70-79	60-69	50-59	40-49	30-39	15-29	2-15	1
Школьная оценка	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Шкала является важной составной частью теста. В психолого-педагогических исследованиях получили распространение четыре вида измерительных шкал: шкала наименований, шкала порядка (ранговая шкала), интервальная шкала, шкала отношений.

Процесс получения итоговой шкалы многосторонний и разработчики тестов идут к нему разными путями, используя при этом разные статистические подходы.

В этой связи следует отметить, что при работе со школьными тестами большое значение имеет "репрезентативность выборки". Под репрезентативностью подразумевается свойство выборочной совокупности (группы испытуемых, участвующих в предварительном тестировании) отображать характеристики генеральной совокупности (всего контингента, для которого предназначен тест). Для того чтобы репрезентативность была достигнута, необходимо, во-первых, знание основных характеристик генеральной совокупности, во-вторых, описание целей тестирования и, в-третьих, сте-степень значимости них характеристик для диагноста. В любом случае при стандартизации теста репрезентативность выборки определяет возможную сферу его применения.

Шкала норм может быть признана объективной только в том случае, если в составе выборки представлены нее элементы генеральной совокупности в том структурном соотношении, которое имеется в самой генеральной совокупности (например, отличников учебы и слабо успевающих учащихся, жителей города и сельской местности, юношей и дену тек и т.д.). Объем выборки зависит от числа признаков, относите п.по которых она производится, и должен быть велик настолько, чтобы и каждую группу попало достаточное число элементов. Минимально репрезентативная выборка обследуемых для проверки тестов должна включать 300-400 человек и быть максимально приближенной к контингенту, на который рассчитан тест.

Наряду со шкалами, полученными с использованием методов математической статистики, существуют шкалы, полученные экспертными методами. Здесь следует отметить, что такие шкалы можно дорабатывать, но нельзя, чтобы эта "доработка" проходила в момент проверки теста, то есть когда за одно и то же количество баллов разные ученики получают разные оценки.

2.1 Подготовка к тестированию

Опыт использования тестирования в учебном процессе свидетельствует о том, что большинство тестируемых испытывают волнение и нервозность, обусловленные важностью успешных результатов тестирования; страх перед тем, что они не поймут задание или неправильно истолкуют указания руководителя тестирования; некомфортность в связи с необходимостью укладываться в определенный временной промежуток и соблюдать строгие условия тестирования.

По этим причинам подготовка к тестированию является актуальной проблемой современного учебного процесса, требующей своего решения в ходе обучения.

Следует понимать, что тесты - просто один из видов контроля и необходимо приучить учеников к этой форме работы. Со временем, когда тестирование будет рассматриваться как один из традиционных видов контроля, вопрос о подготовке к тестированию отпадет сам собой.

Вообще, подготовка к тестированию преследует определенные цели:

- преодолеть неуверенность и страх перед тестированием;
- приобрести опыт работы с тестами;
- научиться действовать в стрессовых, нестандартных ситуациях;
- узнать о различных видах тестовых заданий и о соответствующих стратегиях их выполнения;

• выработать поведение в ходе тестирования (научиться распределять время, работать с таблицами и графиками, контролировать свои действия).

Безусловно, главным условием успешного выполнения теста является подготовленность ученика, его глубокие знания по предмету. Профессионально составленные тесты отличаются тем, что они исключают, насколько это возможно, угадывание ответов. Учащийся должен рассчитывать только на свои силы, а не на везение.

Объективная картина знаний, умений и навыков будет отражена наиболее полно при условии хорошего знакомства с процессом тестирования. Тестологи многократно убеждались в том, что испытуемые, достаточно хорошо знакомые с процедурой тестирования, получают более высокие баллы, чем те, у которых этот опыт незначителен.

Нельзя научиться хорошо выполнять тесты, не работая с ними, подменяя эту практику другими видами контроля и самоконтроля. Следует отметить, что такая целенаправленная и постоянная работа с тестами предполагает, во-первых, знакомство с типовыми конструкциями тестовых заданий, а, во-вторых, вырабатывает у испытуемого навыки самоконтроля и самодисциплины.

В подготовке к тестированию условно можно выделить два уровня: подготовка учащихся к текущему или тематическому тестированию и подготовка к итоговому тестированию.

Методика этих подготовок не должна иметь существенных различий, планомерно и естественно включаясь в ход обучения математики. Хотя в реальных ситуациях подготовка к итоговому тестированию может быть несколько интенсивнее, "жестче". Следует также указать на то, что разница в организации этих двух видов тестирования может способствовать различиям в проведении подготовки к ним.

Так, в процессе обучения учащиеся, изучая те или иные школьные предметы, работают с тестами. В это время учащиеся попутно изучают тесты как объект: знакомятся с типами тестовых заданий и формой их представления; учатся под руководством преподавателя планировать время выполнения тестов; заносить ответы в специальные бланки и т.д.

Этот период имеет свои особенности, главной из которых является ярко выраженное руководство преподавателем процессом тестирования. Во-первых, преподаватель в более мягко регламентированном временном промежутке организовывает работу обучаемых с тестами преподаватель может добавить немного времени на выполнение); контролирует время выполнения каждого задания, советует приступить к следующему; ободряет и успокаивает одних обучаемых и торопит других и т.д.

За это время обучаемые привыкают к тестированию как объективной форме контроля, к тому, что низкий тестовый балл - это не "диагноз", а стимул к ликвидации определенных пробелов в знаниях. Студенты убеждаются в том, что за равное количество баллов получают одинаковые оценки. В этой связи следует отметить, что беспристрастная роль учителя при организации текущего тестирования очень важна. Крайне вредным будет корректирование учителем тестовых результатов, завышение "хорошим" учащимся оценки из-за незначительных, на его взгляд, ошибок или недочетов.

Подготовка к тестированию становится неотъемлемой частью процесса обучения, включаясь в конкретные уроки, изучение нового материала, решение задач и т.д.

3 РАЗРАБОТКА ТЕСТОВ

3.1 Этапы разработки тестов

Преподаватель в своей работе не всегда пользуется готовыми тестами по ряду причин, одной из главных среди них является простое отсутствие качественно составленных тестов различного вида. Поэтому часто преподавателю необходимо самому разрабатывать те или иные тесты, а в связи с этим владеть методикой их составления. Остановимся на некоторых ее моментах.

Необходимо знать, что создание стандартизированных тестов - это длительный и кропотливый процесс. Внедрению тестов предшествует предварительная работа по их составлению и апробации. При разработке тестов выделяют три составные части: теоретическую, практическую и экспериментальную (рис.3.1.).

Рис.3.1.Этапы разработки тестов

Теоретическая часть работы включает изучение литературы, на базе которой осуществляется разработка тестов, содержания и требований программ, учебников. Здесь определяется структура тестов, характерные их особенности, признаки, качественные показатели, выделяются те методы математической статистики, которые потребуются в экспериментальной части.

В ходе реализации *практического* этапа осуществляется изложение инструкций для тестируемого и лица, проводящего тестирование, составление тестовых заданий и ответов к ним. Важное место при этом уделяется поэлементному структурно-функциональному анализу учебного материала. В результате выделяются элементы знаний, умений и навыков, которые необходимы для овладения учебным материалом и имеют наибольшую применимость. Таким образом, тесты строятся на основе включения в них основных смысловых частей содержания обучения, то есть необходимых понятий, определений, фактов, операций, алгоритмов. При этом учитывается степень сформированности у учеников различных мыслительных операций (анализ, синтез, конкретизация, обобщение, сравнение и т.д.), исходя из возрастных особенностей испытуемых. Значительное внимание уделяется специфике и характеру типичных ошибок тестируемых, на основе чего составляются варианты ответов к тестовым заданиям.

В процессе практического этапа разработки тестов происходит первоначальная прикидка шкалы оценок, рассматривается механизм перевода количества баллов в результирующую оценку.

На практическом этапе разрабатываются также инструкции для учителя и тестируемых, бланки ответов.

Таблица 3.1. Технология проектирования дидактических тестов

Теоретический этап	Практический этап	Экспериментальный этап
1. Определение целей тестирования 2. Выбор подхода к созданию теста 3. Изучение учебного материала		
	4. Определение структуры теста 5. Разработка тестовых заданий 6. Экспертиза тестовых заданий 7. Корректировка тестовых заданий 8. Конструирование теста для апробации 9. Разработка инструктивно-методического обеспечения теста 10. Экспертиза теста	
		11. Предварительное тестирование 12. Анализ и интерпретация результатов тестирования (определение качественных характеристик теста)
	13. Переработка геста на основе результатов предварительного тестирования 14. Составление окончательного варианта теста 15. Стандартизация теста (при необходимости)	

На основе теоретического и практического этапов строится *экспериментальный* этап разработки тестов. Здесь оценивается качество содержания тестов, проверяется соответствие заданий требованиям тестовой формы, выявляются статистические характеристики разработанных тестов, делаются выводы о пригодности тестов для намеченных целей.

На экспериментальном этапе разработки теста часто приходится возвращаться к предшествующим этапам, поэтому все три этапа - ческий, практический и экспериментальный - тесно связаны между собой и оказывают друг на друга определенное влияние (см. рис.3.1.).

Более детально технология разработки дидактических тестов представлена в таблице 3.1.

Создание тестов - это длительный процесс, требующий работы коллектива специалистов (методистов, психологов, статистов и т.д.), и в то же время востребованность тестов, разработанных учителями-практиками для отдельно взятого класса, школы достаточно высока. В связи с этим учителю целесообразно при разработке тестов придерживаться нижеприведенных рекомендаций.

3.2 Памятка преподавателю по разработке теста

1. Определите цели тестирования.
2. Выделите знания, умения, навыки, определяемые программой и дающие информацию об уровне усвоения рассматриваемой темы или раздела.
3. Определите виды тестовых заданий, соответствующие выделенным знаниям, умениям и навыкам.
4. Спрогнозируйте или выделите трудности объективные (учебные) и субъективные (психологические и методические) и выявите типичные ошибки обучаемых при изучении темы, проанализируйте причины их возникновения. Используйте эту работу для составления дистракторов к тестовым заданиям.
5. Разработайте набор тестовых заданий для усвоения темы.
6. Проведите экспертизу тестовых заданий, предложив своим коллегам высказать свое мнение о тесте.
7. Проведите при необходимости корректировку тестовых заданий.
8. Разработайте критерии оценки, методику обработки результатов, постройте соответствующую шкалу по переводу тестового балла в оценку школьной успеваемости.
9. Разработайте инструкцию для преподавателя и инструкцию для учащихся по работе с тестом.

4 РАЗРАБОТКА ТЕСТОВ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

4.1 Краткие теоретические сведения

Функция $F(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}$, называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.

Известно, что $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на множестве X, то все первообразные этой функции определяются выражением $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная. Операция отыскания первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ называется ***интегрированием***.

Совокупность $F(x)+C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

выражение $f(x)dx$ называется ***подынтегральным выражением***, $f(x)$ – ***подынтегральной*** функцией, x – ***переменной интегрирования***, а C – ***постоянной интегрирования***.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*:*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$
$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

3. Постоянный множитель $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, можно выносить за знак неопределенного интеграла*:*

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечно числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx =$$
$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx.$$

5. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

6 (**инвариантность формул интегрирования**). Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \text{ или } \int f(u)du = F(u)+C,$$

где u – дифференцируемая функция.

Таблица основных правил и формул интегрирования. Так как интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, то большинство из приводимых формул может быть получено обращением соответствующих формул дифференцирования.

Основные правила интегрирования функций

1. $\left(\int f(u)du\right)' = f(u)$.
2. $d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du$.
3. $\int dF(u) = F(u)+C$.
4. $\int af(u)du = a\int f(u)du$.
5. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx =$
$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx$.
6. $\int f(au+b)du = \frac{1}{a}F(au+b)+C$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad (n \neq -1)$.
2. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+C \quad (a > 0, a \neq 1)$.
3. $\int e^u du = e^u + C$.
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|\mathrm{u}|+C$.
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$.
6. $\int \cos u du = \sin u + C$.
7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$, $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
9. $\int \mathrm{sh} u du = \mathrm{ch} u + C$.
10. $\int \mathrm{ch} u du = \mathrm{sh} u + C$.

11. $\int \frac{du}{\text{ch}^2 u} = \text{th}u + C$.

12. $\int \frac{du}{\text{sh}^2 u} = -\text{cth}u + C$.

13. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$.

14. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arctg}\frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$.

15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a-u}{a+u}\right| + C \quad (a \neq 0)$.

16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C \quad (|u| > |a|)$.

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} = C \quad (|u| < |a|)$.

18. $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$.

19. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{u}{a} + C$.

Некоторые из приведенных выше формул таблицы интегралов, не имеющие аналога в таблице производных, проверяются дифференцированием их правых частей.

Интегрирование подынтегрального выражения к табличной форме и использовании свойств неопределенного интеграла, называется ***непосредственным интегрированием.***

Интегрирование подстановкой (заменой переменной). Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. Суть метода подстановки состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют переменной t по формуле $x = \varphi(t)$, учитывая $dx = \varphi'(t)dt$.

Теорема 1. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T. И пусть X – множество значений функции $x = \varphi(t)$, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула замены переменной*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Очень часто при вычислении интегралов пользуются приемом «подведения» подынтегральной функции под знак дифференциала. По определению дифференциала функции имеем $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$. Переход от левой части этого равенства к правой называют ***«подведением» множителя*** $\varphi'(x)$ ***под знак дифференциала.*** Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Внесем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем выполним подстановку $\varphi(x) = u$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(u)du .$$

Если интеграл $\int f(u)du$ – табличный, его вычисляют непосредственным интегрированием.

Интегрирование по частям. При вычислении неопределенных интегралов методом интегрирования по частям используется следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции переменной x на промежутке X. И пусть функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $v'(x)u(x)$ также имеет производную и справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

С помощью формулы интегрирования по частям отыскание интеграла $\int udv$ сводится к вычислению другого интеграла $\int vdu$. Применять ее целесообразно, когда интеграл $\int vdu$ более прост для вычисления, чем исходный.

Некоторые часто встречающиеся типы интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям:

1. Интегралы вида $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$.

Здесь $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n \in \mathbf{N}$, относительно x, $k \in \mathbf{R}$. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u = P_n(x)$ и применить формулу интегрирования по частям n раз.

II. Интегралы вида $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\,xdx$.

Здесь $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n \in \mathbf{N}$, относительно x. Данные интегралы вычисляются по частям, принимая за u функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$.

III. Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ (a, b – числа).

Они вычисляются двукратным интегрированием по частям

Рациональной дробью $R(x)$ называется дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены:

$$\boldsymbol{Z} .$$

Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе $n \geq m$, то дробь называется ***неправильной***. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе $n < m$, то дробь называется ***правильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби. Это представление достигается путем деления числителя на знаменатель по правилу деления многочленов:

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $R(x)$ – многочлен-частное (целая часть) дроби $\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$; $P_n(x)$ – остаток (многочлен степени $n<m$).

Интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

Простейшей дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$, 2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n\geq 2)$,

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$ $(n\geq 2)$.

Здесь $m\geq 0$, a, p, q, M, N – действительные числа, а квадратный трехчлен не имеет действительных корней, т.е. $\dfrac{p^2}{4}-q<0$.

1) Простейшие дроби *первого* типа интегрируются непосредственно с помощью основных правил интегрального исчисления:

1) $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$.

2) Дроби *второго* типа интегрируются непосредственно с помощью основных правил интегрального исчисления:

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$$

3) Интеграл от простейшей дроби *третьего* типа приводится к табличным интегралам путем выделения в числителе дифференциала знаменателя и приведения знаменателя к сумме квадратов:

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}=\begin{bmatrix}d\left(x^2+px+q\right)=(2x+p)dx,\\ Mx+N=\dfrac{M}{2}(2x+p)+N-\dfrac{Mp}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\dfrac{p}{2}\right)}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

4) При интегрировании простейшей рациональной дроби *четвертого* типа $\displaystyle\int\frac{(Mx+N)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$ сделаем замену переменной, положив $x+\dfrac{p}{2}=t$. Откуда

$dx = dt$ и :

$n \ge 0$,

где $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$.

Тогда

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{M(x+p/2)+N-Mp/2}{((x+p/2)^2+q-p^2/4)^n}dx =$$

$$= M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = = MI_0 + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)I_n .$$

Вычислим интеграл I_0:

$$I_0 = \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n} d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + C .$$

Для вычисления интеграла $I_n = \int \dfrac{dt}{(t^2+a^2)^n}$, представим его в виде

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\right)$$

Замечая, что $\int \dfrac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} = I_{n-1}$, получаем

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\right).$$

Вычисление интеграла $\int \dfrac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}$ осуществляется с помощью метода интегрирования по частям:

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n} = \begin{bmatrix} u = t, du = dt, \\ dv = \dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^n}, \dfrac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}$$

Подставляя найденное выражение, имеем

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}\right).$$

Данная формула является ***рекуррентной***.

Зная табличный интеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C ,$$

находятся интегралы I_n, $n \ge 2$.

Действительно, при $n = 2$ имеем

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+a^2}+\frac{t}{2\left(t^2+a^2\right)}\right)=$$
$$=\frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Правильную рациональную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $Q_m(x)=(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\left(x^2+px+q\right)^s$, можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=$$
$$=\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{B_1}{(x-\beta)}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-\beta)^l}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{\left(x^2+px+q\right)^s},$$

где A_1, A_2, ..., A_k, B_1, B_2, ..., $m\geq 0$, M_1, N_1, M_2, M_2, ..., M_s, N_s – некоторые действительные числа.

Согласно данному разложению, линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби первого и второго типов, а квадратным множителям – третьего и четвертого типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби. Формула разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби остается справедливой для любого конечного числа линейных и квадратных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q_m(x)$.

Чтобы найти коэффициенты разложения, чаще всего используется метод неопределенных коэффициентов и метод частных значений.

Метод неопределенных коэффициентов. Суть метода неопределенных коэффициентов состоит в следующем.

1. Раскладываем правильную рациональную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами.

2. Простейшие дроби приводим к общему знаменателю $Q_m(x)$.

3. Многочлен, получившийся в числителе, приравниваем к многочлену $P_n(x)$.

4. Для тождественного равенства двух многочленов необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов были равны. Учитывая это, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества. Имеем систему m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов A_1, A_2, …, A_k, B_1, B_2, …, B_k, M_1, N_1, …, M_s, N_s.

Метод частных значений. При нахождении неопределенных коэффициентов вместо того, чтобы сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x, можно дать переменной x несколько частных значений (по числу неопределенных коэффициентов). Тогда получим систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Этот метод удобно применять в случае, когда корни знаменателя рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ просты и действительны. Тогда последовательно полагают x равным каждому из корней знаменателя.

Иногда для нахождения неопределенных коэффициентов удобно применять комбинацию указанных выше методов, т.е. придавать x ряд частных значений и приравнивать коэффициенты при некоторых степенях x.

Правило интегрирования рациональных дробей. *Для того чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо выполнить действия:*

1) если рассматриваемая рациональная дробь $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ *– неправильная* $(k \geq m)$*,то необходимо представить ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:*

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $n < m$*;* $R(x)$ *– многочлен.;*

2) если рассматриваемая рациональная дробь $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ *– правильная* $(k < m)$*, то необходимо представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;*

3) интеграл от рациональной дроби представить в виде суммы интегралов от целой части и от соответствующих простейших дробей и вычислить эти интегралы.

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx$ **(**m_1, n_1, m_2, n_2**, … – целые числа).** В данных интегралах подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования и радикалов от x. Они вычисляются подстановкой $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …. При такой замене переменной все отношения $\frac{m_1}{n_1} = r_1$, $\frac{m_2}{n_2} = r_2$, … являются целыми числами, т.е. интеграл приводится к рациональной функции от переменной t:

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx = \int R\left(t^s, t^{r_1}, t^{r_2}, \ldots\right)st^{s-1}dt .$$

Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots\right)dx$ **(**m_1, n_1, m_2, n_2**, … – целые числа).** Данные интегралы подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …, сводятся к рациональной функции от переменной t.

Интегралы вида $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

1) Для вычисления интеграла I_1 выделяется полный квадрат под знаком радикала:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}\right)\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right)$$

и применяется подстановка

$$x+\frac{b}{2a}=u,\ dx=du.$$

В результате этот интеграл сводится к табличному: $I_1=\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm k^2}}$.

2) В числителе интеграла I_2 выделяется дифференциал выражения, стоящего под знаком радикала, и этот интеграл представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{A}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$
$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{A}{2a}\right)I_1=$$
$n\in$
$$=\frac{A}{2a}\sqrt{\left(ax^2+bx+c\right)}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1,$$

где I_1 – вычисленный выше интеграл.

3) Вычисление интеграла I_3 сводится к вычислению интеграла I_1 подстановкой:

$$x=\frac{1}{u},\ dx=-x=\frac{1}{u^2}du.$$

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. Частные случаи вычисления интегралов данного вида рассмотрены в предыдущем пункте. Существует несколько различных приемов их вычисления. Рассмотрим один из таких приемов, основанный на применении тригонометрических подстановок.

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c путем выделения полного квадрата и замены переменной можно представить в виде $u^2\pm k^2$. Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением трех видов интегралов:

$$I_1=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du,\ I_2=\int R\left(u,\sqrt{k^2+u^2}\right)du,\ I_3=\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du.$$

Интеграл $I_1=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du$ подстановкой $u=k\sin t$ (или $u=k\cos t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $n>1$.

Интеграл $I_2=\int R\left(u,\sqrt{k^2+u^2}\right)du$ подстановкой $u=k\,\mathrm{tg}\,t$ (или $u=k\,\mathrm{ctg}\,t$)

сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_3 = \int R\left(u, \sqrt{u^2 - k^2}\right)du$ подстановкой $u = k\sec t$ (или $u = k\operatorname{cosec} t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Если дискриминант трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицательный, то используется первая подстановка Эйлера

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}\,.$$

Если дискриминант трехчлена $ax^2 + bx + c$ положительный и $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, то используется вторая подстановка Эйлера

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_1}\,.$$

Интегралы вида $\int x^m\left(a + bx^n\right)^p dx$ **(**$m, n, p \in \boldsymbol{Q}$**,** a**,** $b \in \boldsymbol{R}$**).** , a, $b \in \boldsymbol{R}$), называются ***интегралами от дифференциального бинома*** $x^m\left(a + bx^n\right)^p$. Эти интегралы выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) если $p \in \boldsymbol{Z}$, то используется подстановка

$$x = t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\dfrac{m+1}{n} \in \boldsymbol{Z}$, то используется подстановка

$$a + bx^n = t^s,$$

где s – знаменатель дроби $p = \dfrac{k}{s}$;

3) если $\dfrac{m+1}{n} + p \in \boldsymbol{Z}$, то используется подстановка

$$ax^{-n} + b = t^s,$$

где s – знаменатель дроби $p = \dfrac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях, как было показано П.Л. Чебышевым, интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции.

Интегрирование тригонометрических функций. Через $R(u, v, w, \ldots)$ обозначается *рациональная функция* относительно $u, v, w, \ldots$ т.е. выражение, которое получено из любых величин $u, v, w, \ldots$, а также действительных чисел с помощью четырех арифметических действий.

Для вычисления интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ **существует общая универсальная схема вычисления, основанная на *универсальной тригонометрической подстановке*** $t = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$**. Этой подстановкой интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции переменной** t**, который, всегда выражается в элементарных функциях.**

Пусть $t = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Тогда выражения для $\sin x$, $\cos x$ и dx через t:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подставляя в подынтегральное выражение вместо $\sin x$, $\cos x$ и dx их значения, выраженные через переменную t, имеем

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подынтегральная функция рациональна относительно t.

С помощью универсальной подстановки удобно вычислять интегралы вида

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + C}.$$

Хотя универсальная подстановка всегда позволяет вычислить интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, однако ее используют сравнительно редко, так как она часто приводит к интегрированию громоздких рациональных дробей. Поэтому в ряде случаев более удобно использовать частные подстановки.

А) Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\sin x$:
$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,
то применяется подстановка $\cos x = t$.

Б) Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\cos x$:
$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,
то используют подстановку $\sin x = t$.

В) Если подынтегральная функция *четна* относительно $\sin x$ и $\cos x$:
$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,
то применяется подстановка $\mathrm{tg}\,x = t$.

Интегралы вида $\int \sin^n x\cos^m x dx$ **(**$m, n \in \boldsymbol{Z}$**,** $m \ge 0$**,** $n \ge 0$**).** Если хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное*, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу.

Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n x dx$**,** $\int \mathrm{ctg}^n x dx$ **(**$n \in \boldsymbol{N}$**,** $n > 1$**).** Данные интегралы вычисляются подстановками $\mathrm{tg}\,x = t$ и $\mathrm{ctg}\,x = t$ соответственно.

Если $t=\operatorname{tg}x$, то $x=\operatorname{arctg}t$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int \operatorname{tg}^n x dx=\int \frac{t^n}{1+t^2}dt.$$

Последний интеграл при $n\ge 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, которая вычисляется **по правилу интегрирования рациональных дробей.**

Аналогично если $t=\operatorname{ctg}x$, то $x=\operatorname{arcctg}t$, $dx=-\dfrac{dx}{1+t^2}$, откуда

$$\int \operatorname{ctg}^n x dx=-\int \frac{t^n}{1+t^2}dt.$$

Интегралы вида $\int \sin mx\cos nx dx$, $\int \cos mx\cos nx dx$, $\int \sin mx\sin nx dx$ ($m,n\in \boldsymbol{R}$)**.** Данные интегралы вычисляются путем разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\int \sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right),$$

$$\int \cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right),$$

$$\int \sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left(-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right).$$

Интегралы вида $\int R\left(e^x\right)dx$**.** Интегралы данного вида сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $t=e^x$. При этом $x=\ln t$, $dx=\dfrac{dt}{t}$.

Интегралы вида $\int \operatorname{ch}^n \operatorname{sh}^m x dx$ **(**$m\ge 0$**,** $n\ge 0$**).** Если хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное*, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу.

Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью формул:

$$\operatorname{ch}^2 x=\frac{1+\operatorname{ch}2x}{2},\ \operatorname{sh}^2 x=\frac{\operatorname{ch}2x-1}{2},\ \operatorname{sh}x\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}\operatorname{sh}2x.$$

Определенный интеграл и его свойства. Пусть функция $y=f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. И пусть τ_n – разбиение отрезка $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, точками $x_0,x_1,\ldots,x_n$.:

$$a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Тогда $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму

$$\sigma_n(f;\xi_k)=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Сумма

$$\sigma_n(f;\xi_k)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (1)$$

называется ***интегральной суммой Римана*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ соответствующей данному разбиению τ_n отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_k, $k=\overline{1,n}$.

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения τ_n: $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$, называемая ***диаметром разбиения***.

Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a;b]$ (или ***интегрируемой по Риману***), если существует такое число I, что для любой последовательности разбиений τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, диаметр которых стремится к нулю при $n\to\infty$ и при любом выборе точек $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, существует предел интегральных сумм (1) и он равен I:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I \qquad (2)$$

Число I называется ***определенным интегралом*** (или ***интегралом Римана***) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначается: $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е. $I=\int\limits_a^b f(x)dx$.

При этом $f(x)dx$ называется ***подынтегральным выражением***, $f(x)$ – ***подынтегральной функцией***, x – ***переменной интегрирования***, a и b – соответственно ***нижним и верхним пределами интегрирования***.

Класс всех функций $f(x)$, интегрируемых по Риману на отрезке $[a;b]$, обозначается $\mathrm{R}_{[a;b]}$.

Определение интеграла Римана на языке ε-δ формулируется следующим образом.

Число I называется ***определенным интегралом*** (или ***интегралом Римана***) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что каково бы ни было разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, диаметр которого $\lambda<\delta$, и каковы бы ни были точки ξ_k, $k=\overline{1,n}$, выполняется неравенство

$$|\sigma_n(f;\xi_k)-I|<\varepsilon.$$

Интегральная сумма не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции. Следовательно, и ее предел, т.е. определенный интеграл, не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(t)dt=\int\limits_a^b f(y)dy.$$

Обозначение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ похоже на обозначение неопределенного интеграла от той же функции $\int f(x)dx$. Как будет показано позднее, вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла от той же подынтегральной функции. Однако между определенным и неопределенным интегралами имеется существенное различие: *определенный интеграл* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ есть некоторое число, в то время как *неопределенный интеграл* представляет собой множество всех первообразных функций $F(x)+C$ данной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). Если $\int_a^b f(x)dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. Для произвольного разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ обозначим $m_k=\inf\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$ и $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$.

Нижней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n называется сумма

$$s_n(f;\xi_k)=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \ .$$

Верхней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n называется сумма

$$S_n(f;\xi_k)=\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \ .$$

В случае, когда функция $f(x)$ ограничена, то нижние m_k и верхние M_k грани конечны. Поэтому суммы Дарбу $s_n(f;\xi_k)$ и $S_n(f;\xi_k)$ при любом разбиении τ_n принимают конечные значения. Далее будем рассматривать только ограниченные функции $f(x)$.

Нижним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I_* грань возможных ее нижних сумм Дарбу $s_n(f;\xi_k)$:

$$I_*=\sup_{\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_n} s_n(f;\xi_k).$$

Верхним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I^* грань возможных ее верхних сумм Дарбу $S_n(f;\xi_k)$:

$$I^*=\inf_{\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_n} S_n(f;\xi_k).$$

Очевидно, что $I_*\le I^*$.

Теорема 2 (Критерий Дарбу). Для того чтобы функция $y=f(x)$, ограниченная на некотором отрезке $[a;b]$, была интегрируема по Риману на нем, необходимо и достаточно, чтобы суммы Дарбу удовлетворяли условию

$$\lim_{\lambda\to 0}(S_n-s_n)=0 \ .$$

Следствия. 1. Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k=0,$$

где $\omega_k(f)$ – колебание функции $f(x)$ на частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ разбиения τ_n, $k=\overline{1,n}$.

2. Если функция $y=f(x)$ была интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$ и $s_n(f;\xi_k)$, $S_n(f;\xi_k)$ – ее суммы Дарбу, то

$$\lim_{\lambda\to 0}s_n=\lim_{\lambda\to 0}S_n=\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т.е. существует $\int_a^b f(x)d(x)$.

Теорема 4. Функция $f(x)$, монотонная на отрезке $[a;b]$, то интегрируема на этом отрезке.

Основные свойства определенного интеграла

1. Если нижний и верхний пределы интегрирования равны $(a=b)$, то интеграл равен нулю:

$$\int_a^b f(x)dx=0.$$

2. Если $f(x)=1$, то $\int_a^b dx=b-a$.

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c\in\mathbf{R}.$$

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых на $[a;b]$ функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx\pm\ldots\pm\int_a^b f_n(x)dx.$$

Совокупность свойств 4 и 5 называются свойством **линейности**: если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, то любая их линейная комбинация $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$, c_1, $c_2\in\mathbf{R}$, также интегрируема на $[a;b]$:

$$\int_a^b (c_1f_1(x)\pm c_2f_2(x))dx=c_1\int_a^b f_1(x)dx\pm c_2\int_a^b f_2(x)dx.$$

6 (аддитивность определенного интеграла). Если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то существует также интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и для любых чисел a, b, c

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Геометрический смысл свойства 6 состоит в том, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a;c]$ и $[c;b]$.

7 (интегрирование неравенств). Если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, $a < b$.

8 (монотонность определенного интеграла). Если интегрируемые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \geq \varphi(x) \ \forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx, \ a < b.$$

Так как $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \ \forall x \in [a;b]$, то

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Отсюда $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b f(x)dx$.

Терема 5 (о среднем). Пусть

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$,

2) для любого $x \in [a;b]$справедливо неравенство $m \leq f(x) \leq M$,

3) функция $g(x)$ не меняет знак на $[a;b]$.

Тогда существует такое число μ, $m \leq \mu \leq M$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{\mu}\int_a^b g(x)dx.$$

Следствие 1. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \ \ \forall x \in [a;b].$$

Следствие 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка $\xi \in [a;b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Число $f(\xi)$, называется ***интегральным средним значением функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$**.**

Геометрически данное следствие означает, что, определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке ξ отрезка рования $[a;b]$ и длины $b-a$ этого отрезка.

Если в определенном интеграле оставить постоянным нижний предел интегрирования a, а верхний x изменять так, чтобы $x \in [a;b]$, то величина интеграла будет изменяться.

Интеграл вида

$$\int_a^x f(t)dt = F(x),\ x \in [a;b],$$

называется ***определенным интегралом с переменным верхним пределом*** и является функцией верхнего предела x.

Здесь для удобства переменная интегрирования обозначена буквой t, а верхний предел интегрирования – буквой x.

Интеграл вида

$$\int_x^b f(t)dt = G(x),\ x \in [a;b],$$

называется ***определенным интегралом с переменным нижним пределом*** и является функцией нижнего предела x.

Теорема 1. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$*, то функции* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *и* $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ *непрерывны на* $[a;b]$.

► Возьмем любую точку $x \in [a;b]$ и придадим ей приращение Δx так, чтобы $x + \Delta x \in [a;b]$. Тогда

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Используя свойство аддитивности определенного интеграла, имеем

$$\Delta F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Применяя теорему о среднем, получаем

$$\Delta F = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x,$$

где $\xi \in [x; x+\Delta x]$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta F = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)\Delta x = 0.$$

Значит, функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ непрерывна.

Аналогично доказывается непрерывность функции $G(x) = \int_x^b f(t)dt$. ◄

Теорема 6. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$ *и непрерывна в точке* $x \in [a;b]$*, то функция* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *дифференцируема в этой* *точке и* $F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x)$.

Отсюда следует, что функция $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ также имеет производную в точке x и

$$G'(x) = \left(\int_x^b f(t)dt \right)'_x = -f(x).$$

Если функция $f(x)$ непрерывна во всех отрезка точках некоторого промежутка X, то на этом промежутке у нее существует первообразная. При этом для любой точки $a \in X$ функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных функций $f(x)$ на промежутке X.

Совокупность всех первообразных непрерывной на некотором промежутке X функции $f(x)$ представляет собой неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, $x \in X$. Определенный интеграл $\int_a^x f(t)dt$, $x \in X$, $a \in X$, является одной из первообразных функции $f(x)$ на X.

Поэтому

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Таким образом, установлена связь между неопределенным и определенным интегралами.

Теорема 7. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и* $F(x)$ – *какая-нибудь первообразная на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона – Лейбница называется ***основной формулой интегрального исчисления***. Иногда ее удобно записывать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Формула Ньютона – Лейбница позволяет избавиться от вычисления определенных интегралов как пределов интегральных сумм. Поэтому задача вычисления определенного интеграла сводится к задаче вычисления неопределенного интеграла.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1;t_2]$, причем $\varphi([t_1;t_2]) = [a;b]$ и $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, то справедлива формула замены переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(x))\varphi'(t)dt.$$

При вычислении интеграла методом замены переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения изменяются ветственно и пределы интегрирования.

Итак, для вычисления определенного интеграла по этой формуле необходимо:

– сделать замену $x=\varphi(t)$,

– вычислить $dx=\varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция,

– найти пределы интегрирования по t, решив уравнения $\varphi(t_1)=a$ и $\varphi(t_2)=b$.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a;b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Геометрические приложения определенного интеграла

1. Площадь криволинейной трапеции в декартовой системе координат.

Если функция $y=f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции

$$P\{(x;y)|\, a\le x\le b;\ 0\le y\le f(x)\}$$

вычисляется по формуле $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

В параметрическом виде. Если криволинейная трапеция ограничена линией, заданной уравнениями в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $t_1\le t\le t_2$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$, причем $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$, то ее площадь S при $y(t)\ge 0$ вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,$$

которая получается заменой переменной $x=x(t)$, $y=y(t)$, $dx=x'(t)dt$. Пределы t_1, t_2 определяют из уравнений $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$.

В полярной системе координат. Пусть фигура, ограниченная линией l, заданной в полярной системе координат $\{O,r,\varphi\}$ уравнением $r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$.

Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная линией $r=r(\varphi)$ и радиусами-векторами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$. при этом криволинейный сектор является *правильной фигурой*, если любой луч $\varphi=\varphi^*$, $\alpha\le\varphi^*\le\beta$, исходящий из полюса O, пересекает линию $r=r(\varphi)$ не более чем в одной точке. И пусть функция $r=r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$. Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

2. Длина дуги плоской кривой в декартовой системе координат. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и кривая l

– график этой функции. Требуется найти длину дуги плоской кривой l, заключенной между вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$.

Если функция $f(x)$. на отрезке $[a;b]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то кривая l – спрямляемая, и ее длина вычисляется по формуле

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

В параметрическом виде. Пусть уравнение кривой задано параметрическими уравнениями

$$x=x(t),\ y=y(t),$$

где $t\in[t_1;t_2]$, $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $x'(t)\neq 0\ \ \forall t\in[t_1;t_2]$.

Для вычисления длины дуги кривой воспользуемся формулой $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, предварительно выполнив замену переменной: $x=x(t)$. Тогда $dx=x'(t)dt$ и $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Подставляя в формулу дины дуги, получим:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\,x'(t)dt$$

или

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt.$$

Если пространственная кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $t_1\le t\le t_2$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывные функции, имеющие непрерывные производные на отрезке $[t_1;t_2]$, то длина дуги этой кривой определяется по формуле

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt.$$

В полярной системе координат. Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $r=r(\varphi)\ \ \forall\varphi\in[\alpha;\beta]$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Декартовы и полярные координаты связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\varphi,\\ y&=r\sin\varphi.\end{aligned}\right\}$$

Учитывая, что $r=r(\varphi)$, получаем

$$\left.\begin{aligned}x&=r(\varphi)\cos\varphi,\\ y&=r(\varphi)\sin\varphi\end{aligned}\right\},\ \forall\varphi\in[\alpha;\beta].$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой.

Найдем производные от x и y по параметру φ:

$$\left.\begin{aligned} x'_\varphi &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \\ y'_\varphi &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = r^2 + (r')^2$

Следовательно, $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$.

3. Площадь поверхности вращения в декартовой системе координат

Пусть функция $f(x)$ не отрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной $f'(x)$на отрезке $[a;b]$. Тогда поверхность, образованная вращением графика этой функции вокруг оси Ox, имеет площадь S, которая может быть вычислена по формуле:

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx .$$

В параметрическом виде. Пусть поверхность получается вращением вокруг оси Ox кривой AB, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$

где $t \in [\alpha;\beta]$, $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $y(t) \ge 0$, $a \le x(t) \le b$ при $\alpha \le t \le \beta$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Тогда, производя в интеграле для площади S поверхности вращения переменной замену переменной $x = x(t)$, получаем

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

В полярных координатах. Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, где $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha;\beta]$.

Тогда, учитывая формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\varphi)\cos\varphi, \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}\right\}, \ \forall \varphi \in [\alpha;\beta],$$

получаем

$$S = 2\pi \int\limits_a^b r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi .$$

4. Вычисление объемов тел по известным поперечным сечениям. Пусть дано тело T, ограниченное замкнутой поверхностью. И пусть известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс. Эти сечения называются ***поперечными***. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью Ox.

С изменением x площадь S поперечного сечения изменяется, т.е. является некоторой функцией от x. Обозначим ее $S(x)$. Функцию $S(x)$ будем считать непрерывной на отрезке $[a;b]$, где a и b – абсциссы крайних сечений тела T.

Объем тела, заключенного между двумя плоскостями $x=a$ и $x=b$, в случае, если площадь сечения, проведенная перпендикулярно к оси Ох, есть известная функция от x: $S=S(x)$ $\forall x\in[a;b]$, вычисляется по формуле

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

5. Вычисление объемов тел вращения. Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$.

Если пересечь это тело плоскостями, перпендикулярными к оси Ox, получим круги, радиусы которых равны модулю ординат $y=f(x)$ точек данной кривой. Следовательно, площадь сечения рассматриваемого тела

$$S(x)=\pi y^2=\pi(f(x))^2.$$

Применяя формулу $V=\int_a^b S(x)dx$, получаем формулу для вычисления объема тела вращения

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b (f(x))^2dx.$$

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, то его объем вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d (\varphi(y))^2dy,$$

где $x=\varphi(y)$, $c\le y\le d$, – уравнение кривой CD.

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r=r(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3\sin\varphi\, d\varphi.$$

Физические приложения определенного интеграла

1 Работа переменной силы. Пусть материальная точка движется по прямой линии под действием некоторой переменной силы F. Работа переменной силы на прямолинейном пути от точки a до точки b выражается формулой

$$A=\int_a^b F(x)dx..$$

2 Работа электродвигателя переменной мощности. Пусть мощность электродвигателя в момент времени t равна $N(t)$. Работа, совершенная двигателем за промежуток времени $\Delta t=[a;b]$ выражается формулой

$$A=\int_a^b N(t)dt.$$

Статическим моментом материальной точки $A(x;y)$, в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и расстояния до оси Ox (оси Oy):

$$M_x = my \ \ (M_y = mx).$$

Моментом инерции материальной точки $A(x;y)$ в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy, точки O) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и квадрата расстояния до оси Ox (оси Oy, точки O):

$$I_x = my^2,\ I_y = mx^2,\ I_0 = I_x + I_y = m\left(x^2 + y^2\right).$$

Если дана система материальных точек $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, …, $A_n(x_n;y_n)$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, …, m_n, то статические моменты находятся по формулам:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,\ M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,$$

а моменты инерции – по формулам:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2,\ I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2,\ I_0 = I_x + I_y = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 + y_k^2\right)m_k.$$

Центром масс системы материальных точек называется точка, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу $M = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ системы, то статический момент этой точки относительно любой ее оси равен статическому моменту данной системы материальных точек относительно той же оси.

Поэтому, обозначая центр масс системы $C(x_C;y_C)$, получаем:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = My_C, \qquad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k = Mx_C.$$

Таким образом, координаты центра масс системы материальных точек вычисляются по следующим формулам:

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k},\ y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}.$$

Пусть требуется вычислить статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс однородной плоской материальной линии или плоской материальной фигуры с известной плотностью ρ распределения масс. Линия (фигура) называется ***однородной***, если $\rho = \text{const}$ на всей линии (фигуре). Если при этом $\rho = 1$, то масса линии (фигуры) численно равна длине линии (площади фигуры). Для вычисления M_x, M_y, I_x, I_y, I_0, x_C, y_C эту линию (фигуру) разбивают произвольным образом на n частей, что достигается разбиением отрезка $[a;b]$ оси Ox, на который проектируется плоская линия l или плоская фигура D. На каждой части выбирают точку P_k,

$k=\overline{1,n}$, и сосредотачивают массу m_k k-й части линии (фигуры) в точках P_k. Так как линия (фигура) однородна, то масса k-й части линии $lm_k=\rho\Delta l_k$, где Δl_k – длина k-го участка линии. Масса k-й части однородной фигуры D $m_k=\rho\Delta S_k$, где ΔS_k – площадь k-й частиц фигуры D.

Далее рассматривают материальную линию l (фигуру D) как фиктивную систему материальных точек P_k, $k=\overline{1,n}$, с массами m_k. Тогда искомые величины M_x, M_y, M, I_x, I_y, I_0, x_C, y_C приближенно равны соответствующим величинам рассматриваемой фиктивной системы материальных точек P_k.

Точное значение искомых величин определяется как предел соответствующего приближенного значения при $\lambda=\max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\}\to 0$. Отсюда следует, что рассмотренный алгоритм вычисления статических моментов, моментов инерции и координат центра масс материальной кривой (фигуры) приводит к составлению интегральных сумм, а предельный переход при стремлении $\lambda\to 0$ – к определенному интегралу.

Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской линии осуществляется по формулам

$$M=\int\limits_a^b \rho\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

$$M_x=\int\limits_a^b \rho y\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\quad M_y=\int\limits_a^b \rho x\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$I_x=\int\limits_a^b \rho y^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\quad I_y=\int\limits_a^b \rho x^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\quad I_0=I_x+I_y,$$

$$x_C=\frac{M_y}{M},\quad y_C=\frac{M_x}{M}.$$

Полученные формулы справедливы и для любой неоднородной ($\rho=\rho(x)$) материальной линии AB.

Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской фигуры вычисляются по формулам

$$M=\int\limits_a^b \rho y\,dx,$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_a^b \rho y^2\,dx,\quad M_y=\int\limits_a^b \rho xy\,dx,$$

$$I_x=\frac{1}{2}\int\limits_a^b \rho y^3\,dx,\quad I_y=\int\limits_a^b \rho x^2 y\,dx,\quad I_0=I_x+I_y,$$

$$x_C=\frac{M_y}{M},\quad y_C=\frac{M_x}{M}.$$

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\infty)$. Тогда она будет непрерывной на любом конечном отрезке $[a;b]$, $a<b$.

Для функции $f(x)$ непрерывной на $[a;b]$, существует определенный интеграл $I(b)$, зависящий от верхнего предела интегрирования:

$$I(b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Этот интеграл определяет некоторую величину, например площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)\geq 0$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс. Будем неограниченно увеличивать верхний предел интегрирования ($b\to+\infty$). При этом возможны два случая: либо $I(b)$ при $b\to+\infty$ имеет предел, либо не имеет.

Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования, от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a;\infty)$ называется предел $I(b)$ при $b\to+\infty$:

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если этот предел не существует, то – ***расходящимся***.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$.

Несобственным интегралом с бесконечным нижним пределом интегрирования, от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$ называется предел $I(a)$ при $a\to-\infty$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если этот предел не существует, то – ***расходящимся***.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$, обозначаемый $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$, предварительно представляют в виде

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int_{-\infty}^c f(x)dx+\int_c^\infty f(x)dx,\ c\in(-\infty;\infty).$$

Тогда по определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx .$$

причем этот несобственный интеграл называется ***сходящимся***, если оба предела существуют. Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется ***расходящимся***.

Интегралы $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называются также ***несобственными интегралами первого рода.***

Аналогичная геометрическая интерпретация имеет место для двух других сходящихся несобственных интегралов.

2 Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода). Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и неограничена в левосторонней окрестности точки b (b – точка бесконечного разрыва), т.е. $\lim\limits_{x\to b-\varepsilon} f(x)=\infty$. Будем считать, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$: существует интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, зависящий от переменного верхнего предела интегрирования.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $[a;b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=b$ (или ***несобственным интегралом второго рода***) называется предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon\to 0$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx ,\ \varepsilon>0 .$$

Аналогично если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=a$.

Несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $(a;b]$ и имеющей бесконечный разрыв в точке называется предел интеграла $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ при $\varepsilon\to 0$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx ,\ \varepsilon>0 .$$

Если же функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то, пользуясь свойством аддитивности определенного интеграла, данный интеграл необходимо представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx .$$

Если пределы в правых частях формул существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы от разрывной функции в точках

a, b и c называются ***сходящимися***, в противном случае – ***расходящимися***.

В силу свойств предела функции и определения несобственного интеграла как предела функции, являющейся интегралом Римана с переменным пределом интегрирования, многие свойства определенного интеграла предельным переходом переносятся на несобственные интегралы.

Для простоты будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$.

1. Формула Ньютона-Лейбница: если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a).$$

2. Линейность интеграла: если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то для любых чисел α и β несобственный интеграл $\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx$ также сходится и

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx .$$

3. Интегрирование неравенств: если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и для всех $x \in [a;b)$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

4. Правило замены переменного: если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha;\beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, и выполняются условия $\varphi([\alpha;\beta)) = [a;b)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t \to \beta} \varphi(t) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

5 Правило интегрирования по частям.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ кусочно-непрерывны на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$. Тогда

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

Теорема 1 (критерий Коши). Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое η, что для всех η_1 и η_2, удовлетворяющих условию $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, выполняется неравенство $\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

4. Признаки сравнения несобственных интегралов. Будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$ (несобственный интеграл 1-го или 2-го рода)

Признак сравнения. Пусть на промежутке $[a;b)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на каждом конечном отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, причем $\forall x \in [a;b)$ справедливо $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда

1) из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$,

2) из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Предельный признак сравнения. Пусть на промежутке $[a;b)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на каждом конечном отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, причем $\forall x \in [a;b)$ $g(x) \ne 0$, и существует конечный предел

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0.$$

Тогда

1) если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится и $0 \le A < +\infty$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится,

2) если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится и $0 < A \le +\infty$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится,

3) если $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то интегралы $\int\limits_a^b g(x)dx$ и $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то он сходится. Обратное верно не всегда.

Признак Дирихле. Пусть на полуоси $x \geq a$

1)функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную,

2)функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Признак Абеля. Пусть на полуоси $x \geq a$

1)функция $f(x)$ непрерывна и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится,

2)функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна.

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

4.2. Вариант заданий открытого типа по теоретическому материалу

Приведём примеры заданий открытой формы (на дополнение) по теоретическому материалу. Ответы на данные вопросы приведены в скобках курсивом.

Впишите недостающее слово вместо прочерка:

1. Отыскание функции F(x) по известному её дифференциалу dF(x)=f(x)dx [или по известной её производной F'(x)=f(x)], называется _________________________

(Интегрированием)

2. Общее выражение F(x)+C совокупности всех первообразных от функции f(x) называется _________________________.

(Неопределённым интегралом)

3. Формулу $\int \mathrm{u}(\varphi(\mathrm{x}))\mathrm{du}(\mathrm{x}) = \mathrm{U}(\varphi(\mathrm{x})) + \mathrm{C}$, где $U(\varphi(x))$ – первообразная для функции $\mathrm{U}(\varphi(\mathrm{x})) \cdot \varphi'(\mathrm{x})$ называют _________________________.

(Формулой интегрирования заменой переменного)

4. Формула $\int \mathrm{udv} = \mathrm{uv} - \int \mathrm{vdu}$ называется ________________________.

(Формулой интегрирования по частям)

5. Если функция f(x) интегрируема на отрезке [a,b], то она на этом отрезке _________________________.

(*Ограничена*)

6. Если существует конечный $\lim\limits_{\varepsilon\to+\infty}\int\limits_a^{\varepsilon} f(x)dx$, то этот предел ют ________________________ от функции f(x) на промежутке [a,+∞) и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

(Несобственным интегралом)

7. Несобственный интеграл $I=\int\limits_a^b f(x)dx$ называется ________________, если сходится интеграл $\bar{I}=\int\limits_a^b f(x)dx$.

(Абсолютно сходящимся)

8. Несобственный интеграл $I=\int\limits_a^b f(x)dx$ называется _____________, если интеграл $I=\int\limits_a^b f(x)dx$ - сходится, а $\bar{I}=\int\limits_a^b f(x)dx$ - расходится.

(Условно сходящимся)

Задания на дополнение с ограниченным ответом имеют следующие особенности:

- Каждое тестовое задание нацелено, как правило, только на один ответ (или одно дополнение), место которого обозначено точками или прочерком;
- Все прочерки в открытых заданиях делают обычно одинаковой длины, чтобы исключить возможность угадывания;
- Дополнения чаще всего ставят в конце задания или как можно ближе к концу;
- Прочерк ставят на месте ключевого элемента, знание которого является наиболее существенным для контролируемого материала.

4.3 Варианты заданий открытого типа

В приведенных ниже тестах открытого типа в левой колонке приведены задания для студентов, в правой колонке – ответы с которыми преподаватель должен сравнить полученный результат..

Вычислить неопределённые интегралы	*Правильный ответ*
1. $\int x^{-6}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$	$-\frac{1}{5}(\frac{1+x^2}{x^2})^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}(\frac{1+x^2}{x^2})^{\frac{3}{2}}+C$
2. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x+2)^5(x-1)^3}}$	$\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$ **+5**
3. $\int ch^3xshxdx$	$\frac{ch^3x}{4}+C$
4. $\int\sin 7x\cdot\sin 3xdx$	$\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{20}\sin 10x+C$
5. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+x^2}}$	$\ln\left\|x+1+\sqrt{2x+x^2}\right\|+C$
6. $\int x^2\cos xdx$	$x^2\sin x+2(x\cos x-\sin x)+C$
7. $\int(\frac{4}{1+x^2}-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}})dx$	$4arctgx+5\arccos x+C$
8. $\int ctg^2xdx$	$-ctgx-x+C$

Вычислить определённые интегралы	*Правильный ответ*
1. $\int_1^4 x^2dx$	21
2. $\int_1^e \ln xdx$	1
3. $\int_0^\pi x\sin xdx$	π
4. $\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx$	$33\frac{11}{15}$
5. $\int_2^4 (x^3+x)dx$	66
6. $\int_\pi^0 x\cos xdx$	2
7. $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x-21}$	$-0.1\ln 2$
8. $\int_1^6 \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$	$\frac{5}{2}-5\ln\frac{3}{2}$

Площадь криволинейной фигуры в декартовых и полярных координатах	*Правильный ответ*
1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x^3$, Прямой $y = 1$ и осью Оy	$\frac{3}{5}$ (кв.ед.)
2. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$	6 (кв.ед.)
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x = 8y - y^2 - 7$ и осью Оy	36 (кв.ед.)
4. Определить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Оx	$3\pi a^2$ (кв.ед.)
5. $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$	$\frac{4}{3} p^2$ кв.ед.)
6. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$	1 (кв.ед.)
7. $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$ (I четверть)	$(\frac{41}{2}) \arcsin(\frac{9}{41}) + 20 \ln 0.8$ (кв.ед.)
8. $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$ (I четверть)	18 (кв.ед.)

Приложение определённых интегралов к решению простейших физических задач	*Правильный ответ*
1. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,6м, если сила 1Н растягивает её на 0,01м?	0,18(Дж)
2. Найти давление бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой h=3,5м и радиусом основания r=1,5м, на его стенки, если ρ=900кг/м^3.	161,7π(кН)
3. Скорость точки изменяется по закону υ=2(6-t)м/с. Каково наибольшее удаление точки от начала движения?	36(м)
4. В жидкость с плотностью погружена треугольная пластинка вершиной вверх. Найти давление жидкостью на пластинку, если основание треугольника равно a, высота равна h. Вершина треугольника расположена на поверхности.	$Pqah^2/3$
5. Скорость движения точки $\upsilon=te^{-0,01t}$ м/с. Найти путь, пройденной точкой от начала движения до полной остановки.	S=10^{4}м
6. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью υ_o, без учёта сопротивления воздуха определяется по формуле $\upsilon=\upsilon_o-qt$, где t – пройденное время, q – ускорение силы тяжести. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело через t секунд после броска.	$\upsilon_o t-qt^2/2$
7. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н она растягивается на 1 см?	0,08(Дж)
8. Скорость точки $\upsilon=0,1t^3$ м/с. Найти путь a, пройденный точкой за промежуток времени T=10 сек, протекший от начала движения. Чему равна средняя скорость движения точки за этот промежуток?	S=250 м $\upsilon_{ср}$=25м/с

Исследование несобственных интегралов на сходимость	*Правильный ответ*
1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$	Сходится
2. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$	Расходится
3. $\int_{-2}^2 \frac{2xdx}{x^2-4}$	Расходится
4. $\int_0^{\infty} \cos x dx$	Расходится
5. $\int_0^{+\infty} (1-\cos\frac{2}{x}) dx$	Сходится
6. $\int_0^1 \frac{dx}{tgx - x}$	Расходится
7. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x^2}$	Сходится
8. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	Сходится

4.4. Задания закрытого типа

Вычислить интегралы		Варианты ответа
1. $\int \sqrt{y+1}dy$	а)	$\frac{2}{3}\sqrt{(y+1)^3}+C$
	б)	$\frac{3}{2}\sqrt{(y+1)^3}+C$
	в)	$\frac{2}{3}\sqrt[3]{(y+1)^2}+C$
2. $\int \cos 4\varphi d\varphi$	а)	$4\sin 4\varphi + C$
	б)	$-\frac{1}{4}\sin 4\varphi + C$
	в)	$\frac{1}{4}\sin 4\varphi + C$
3. $\int tgtdt$	а)	$\ln\lvert\cos t\rvert + C$
	б)	$-\ln\lvert\cos t\rvert + C$
	в)	$\ln\lvert\sin t\rvert + C$
4. $\int (2-3x)^4 dx$	а)	$-\frac{1}{3}(2-3x)^5 + C$
	б)	$-\frac{1}{3}\frac{(2-3x)^5}{5} + C$
	в)	$\frac{(2-3x)^5}{5} + C$
5. $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2}{x^2}dx$	а)	$\frac{x^4}{4} - x^2 + 3x + C$
	б)	$\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C$
	в)	$\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$
6. $\int \sqrt[5]{t^2}dt$	а)	$\frac{5}{7}\sqrt[5]{t^7} + C$
	б)	$\frac{5}{2}\sqrt[5]{t^2} + C$
	в)	$\frac{7}{5}\sqrt[7]{t^5} + C$
7. $\int (\ln t)^3 \frac{dt}{t}$	а)	$\frac{1}{4}(\ln t)^4 + C$
	б)	$4(\ln t)^4 + C$
	в)	$(\ln t)^4 + C$
8. $\int \frac{dx}{x\ln x}$	а)	$-\ln\lvert\ln x\rvert + C$
	б)	$\ln^2 x + C$
	в)	$\ln\lvert\ln x\rvert + C$

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Верные ответы	а	в	б	б	в	а	а	в

Вычислить интегралы, используя формулу интегриро-		Варианты ответа
1. $\int x^2 e^{3x} dx$	а)	$e^{3x}(9x^2-6x+2)+C$
	б)	$\frac{e^{3x}}{27}(9x^3-6x^2+2x)+C$
	в)	$\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+C$
2. $\int \arcsin x dx$	а)	$\frac{x}{2}\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$
	б)	$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$
	в)	$x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$
3. $\int x\ln x dx$	а)	$\frac{x^2}{2}\ln x-4x^2+C$
	б)	$\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$
	в)	$x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$
4. $\int xe^x dx$	а)	$e^x(x-1)+C$
	б)	$\frac{e^x}{2}(x-1)+C$
	в)	$e^x(x+1)+C$
5. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$	а)	$2e^{-\frac{x}{2}}(x^3+4x^2+8x)+C$
	б)	$-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8)+C$
	в)	$-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8)+C$
6. $\int x^2\sin x dx$	а)	$-x\cos x+2x\sin x-2\cos x+C$
	б)	$x^2\cos x-2x\sin x+2\cos x+C$
	в)	$-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$
7. $\int \ln^2 x dx$	а)	$x^2\ln^2 x+2x\ln x-2x+C$
	б)	$-x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$
	в)	$x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$
8. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$	а)	$C-\frac{1+2\ln x}{4x^2}$
	б)	$\frac{1+\ln x}{4x^2}+C$
	в)	$\frac{1+2\ln x}{4x^2}+C$

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Верные ответы	в	б	б	а	б	в	в	а

Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трёхчлен

Варианты ответа

1. $\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$

а) $(x-2)\sqrt{5+4x-x^2}+\frac{2}{9}\arcsin\frac{x-2}{3}+C$

б) $\frac{(x-2)}{3}\sqrt{5+4x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin(x-2)+C$

в) $\frac{(x-2)}{2}\sqrt{5+4x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{(x-2)}{3}+C$

2. $\int \frac{dx}{4x^2+10x-24}$

а) $\ln\left|\frac{2x-3}{2x+8}\right|+C$

б) $\frac{1}{22}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+8}\right|+C$

в) $22\ln\left|\frac{2x-3}{2x+8}\right|+C$

3. $\int \frac{dx}{x^2-x-6}$

а) $\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$

б) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$

в) $5\ln\left|\frac{x+2}{x-3}\right|+C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$

а) $-\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-7}\right|+C$

б) $\ln\left|x+\sqrt{(x-2)^2+7}\right|+C$

в) $\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-7}\right|+C$

5. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$

а) $arctg(x+2)+C$

б) $\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+C$

в) $2arctg\frac{x+2}{2}+C$

6. $\int \frac{dx}{3x^2+4x+1}$

а) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1}{3x+3}\right|+C$

б) $\ln\left|\frac{3x+1}{3x+3}\right|+C$

в) $\ln\left|\frac{3x+3}{3x+1}\right|+C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$

а) $\arcsin x+C$

б) $2\arcsin(x+2)+C$

в) $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$

8. $\int \frac{dx}{x^2+36}$

а) $\frac{1}{6}arctg\frac{x}{6}+C$

б) $6arctg\frac{x}{6}+C$

в) $\frac{1}{6}arctg6x+C$

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Верные ответы	в	б	б	в	б	а	в	а

Интегрирование рациональных функций

Варианты ответа

1. $\int \frac{x}{x^3+1}dx$

а) $-3\ln|x+1|+6\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

б) $-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\sqrt{3}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

в) $-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

2. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$

а) $\frac{1}{x}+\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|+C$

б) $x+\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|+C$

в) $x-\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|+C$

3. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$

а) $\frac{1}{4}arctg\frac{x+3}{4}+C$

б) $\frac{1}{4}arctg(x+3)+C$

в) $4arctg(\frac{x+3}{4})+C$

4. $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$

а) $x^2+x+\frac{3}{2}\ln|x^2+2|+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

б) $\frac{1}{2}x^2+3x+\ln|x^2+2|+\sqrt{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

в) $\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln|x^2+2|+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

5. $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^5}$

а)

б) $-\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4}+C$

в)

6. $\int \frac{x}{x^4+6x^2+5}dx$

а) $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{x^2+5}+C$

б) $8\ln\frac{x^2+1}{x^2+5}+C$

в) $2\ln\frac{x^2+5}{x^2+1}+C$

7. $\int \frac{x^2+2}{x^4+4}dx$

а) $arctg(x-1)+arctg(x+1)+C$

б) $2[arctg(x-1)+arctg(x+1)]+C$

в) $\frac{1}{2}[arctg(x-1)+arctg(x+1)]+C$

8. $\int \frac{x^2dx}{x^2-4x+3}$

а) $x+(9/2)\ln|x-3|+2\ln|x-1|+C$

б) $x+(9/2)\ln|x-3|-(1/2)\ln|x-1|+C$

в) $x+9\ln|x-3|-2\ln|x-1|+C$

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Верные ответы	в	а	а	в	б	а	в	б

Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций		Варианты ответа
1. $\int \cos^5 xdx$	а)	
	б)	$\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$
	в)	
2. $\int \sin x \sin 3xdx$	а)	$\frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + C$
	б)	
	в)	
3. $\int ch^2 xdx$	а)	
	б)	$\frac{1}{4}sh2x + \frac{1}{2}x + C$
	в)	
4. $\int sh^3 xdx$	а)	
	б)	
	в)	$\frac{ch^3 x}{3} - chx + C$
5. $\int \sin 3x \cos 2xdx$	а)	$-\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C$
	б)	
	в)	
6. $\int th^2 xdx$	а)	
	б)	$thx + x + C$
	в)	
7. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x + 9\sin^2 x}$	а)	
	б)	$\frac{1}{3\sqrt{5}} arctg \frac{3tgx}{\sqrt{3}} + C$
	в)	
8. $\int \frac{1+shx}{ch^2 x}dx$	а)	$\frac{shx-1}{chx} + C$
	б)	
	в)	

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Верные ответы	б	а	б	в	а	б	б	в

Итоговый тест по
«Интегральному исчислению функций одной переменной»

1.	$\int \frac{1+shx}{ch^2 x}dx$	$\frac{shx-1}{chx}+C$
2.	$\int\limits_1^6 \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$	$\frac{5}{2}-5\ln\frac{3}{2}$
3.	$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$	π
4.	$\int\limits_0^1 \ln xdx$	-1
5.	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$	π/2
6.	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$	π
7.	$\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$	4

Итоговый тест по

«Интегральному исчислению функций одной переменной»

1. $\int \frac{x^2}{1+x^2}$ $\qquad x - arctgx + C$

2. $\int ctgxdx$ $\qquad \ln|\sin x| + C$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad -\sqrt{1-x^2} + C$

4. $\int \frac{dx}{4x^2+10x-24}$ $\qquad \frac{1}{22}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+8}\right| + C$

5. $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)}$ $\qquad \ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + C$

6. $\int \sin^2 5xdx$ $\qquad \frac{x}{2} - \frac{\sin 10x}{20} + C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}$ $\qquad 3arctg\sqrt[3]{x^2} + C$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной дипломной работе даны ответы на вопросы: что такое тест, какие бывают тесты, каковы особенности тестов по математике, как готовить и проверить тестирование. Создание тестов – длительный процесс, требующий работы коллектива специалистов (методистов, психологов, статистов и т.д.), и в то же время востребованность тестов, разработанных преподавателями-практиками для отдельно взятой группы достаточно высока. В дипломной работе осуществлена попытка разработать тесты по теме «Интегральное исчисление функции действительной переменной». В работе приведены тесты открытого и закрытого типа. Данные тесты могут быть использованы при проведении рубежного и итогового контроля знаний студентов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1.Аванесов В. С. Композиция тестовых заданий. М.: Адепт, 1998.

2.Аванесов В.С. Научные проблемы тестового контроля знаний. М.: Учеб. центр при исслед. центре проблем качества подгот. специалистов, 1994.136 с.

3.Гуцанович С.А., Радьков А.М. Тестирование в обучении математике: диагностико-дидактические основы. Могилев: МГПИ им. А.А.Кулешова, 1995.203с.

4.Дидактические тесты: технология проектирования: Метод, пособие для разработчиков тестов / Е.В. Кравец, А.М. Радьков, Т.В. Столярова, Б.Д. Чеботаревский; Под общ. ред. А.М. Радькова. Мн.: РИВШ, 2004. 87 с.

5.Майоров А.Н. Теория и практика создания тестов для системы образования. (Как выбирать, создавать и использовать тесты для целей образования). М.: Интеллект-центр, 2001.296 с.

6.Радьков А.М., Кравец Е.В., Чеботаревский Б.Д. Разработка дидактических тестовых заданий: Метод, рек. Могилев: МГУ им. А.А. Кулешева, 2003.16 с.

7.Радьков А.М., Кравец Е.В. Тестовые технологии в системе непрерывного образования: Метод, пособие. Могилев: МГУ им. А.А.Кулешова, 2001.52 с.

8.Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1. Москва: «Высшая школа», 1980

9.Челышкова М.Б. Теория и практика конструирования педагогических тестов: Учеб. пособие. М.: Логос, 2002.432 с.

10.Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. Москва: «Наука», главная редакция физико-математической литературы, 1988

11.Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. Минск: Издательство «Вышэйшая школа», 1967