

Контрольная работа по разделу «Операционное исчисление»

Вариант 1

1 Найти изображение функций:

а) $f(t) = e^{2t} \sin 2t$;

б) $f(t) = t^2(\sin t + e^{4t})$;

в) $f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$.

2 Найти оригиналы $f(t)$ для изображений $F(p)$:

а) $F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p - 3}$; б) $F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^3}$.

3 Методом операционного исчисления решить задачи Коши:

а) $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, x(0) = 0, x'(0) = 1$;

б) $\begin{cases} y' + z = 2 \sin t, \\ z' + y = -1, \end{cases} y(0) = 0, z(0) = 1.$

Вариант 2

1 Найти изображение функций:

а) $f(t) = e^{-t}t^3$;

б) $f(t) = t^2(\cos 2t + e^{2t})$;

в) $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$.

2 Найти оригиналы $f(t)$ для изображений $F(p)$:

а) $F(p) = \frac{4}{p^2 + 5p + 6}$ б) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}$.

3 Методом операционного исчисления решить задачи Коши:

а) $x'' + 2x' + x = \sin t, x(0) = 0, x'(0) = 1$;

б) $\begin{cases} y' - z = 5 \cos 2t, \\ z' - y = 2, \end{cases} y(0) = -1, z(0) = 0.$

Задания к контрольным работам

Контрольная работа по разделу «Гармонический анализ»

Вариант 1

1 Разложить в тригонометрический ряд Фурье функции:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2x}{\pi} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

2 Разложить на промежутке $[0; \pi]$ в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$, доопределив ее на $[-\pi; 0]$:

а) четным, б) нечетным способом.

3 Разложить на промежутке $[-1; 1]$ функцию $f(x) = 2x - 5$.

4 Разложить на промежутке $[0; \pi]$ ряд Фурье по косинусам функцию $f(x) = x^2 + 1$

Вариант 2

1 Разложить в тригонометрический ряд Фурье функции:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

2 Разложить на промежутке $[0; \pi]$ в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{3}{2} - x$, доопределив ее на $[-\pi; 0]$:

а) четным, б) нечетным способом.

3 Разложить на промежутке $[-1; 1]$ функцию $f(x) = 2x + 3$

4 Разложить на промежутке $[0; \pi]$ ряд Фурье по синусам функцию $f(x) = x^3 - 1$

Контрольная работа 1 по разделу «Функции комплексной переменной»

Вариант 1

1 Вычислить:

а) $\frac{1-2i}{2-i}$; б) $(-1+i)^{12}$; в) $\ln\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$;

г) $\frac{(z_2 - z_3)z_1}{z_2}$ в точках $z_1 = 1 - i; z_2 = 2 - 3i; z_3 = 3 + i$.

2 Найти все значения корня $\sqrt[3]{-i}$ и изобразить их в комплексной плоскости \mathbb{C} .

3 Вычислить значение $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$. Ответ записать в тригонометрической или алгебраической формах.

4 Выяснить, является ли функция $w = z\bar{z}^2$ аналитической.

5 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, если $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ и $f(0) = 0$.

6 Найти угол поворота φ и коэффициента растяжения ρ функции $w = z^2 + z$ в точке $z_0 = 1 + i$.

7 Вычислить $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$, где Γ есть верхняя половина окружности $|z| = 2$.

Вариант 2

1 Вычислить:

а) $\frac{2+i}{1-i}$; б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{80}$; в) $\operatorname{ch} \frac{\pi i}{2}$;

г) $\frac{(2z_1 - z_2)z_3}{z_2}$ в точках $z_1 = -1 + i$; $z_2 = 3 - i$; $z_3 = 4 + 2i$.

2 Найти все значения корня $\sqrt[3]{-8}$ и изобразить их в комплексной плоскости \mathbb{C} .

3 Вычислить значение $(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{1+i}$. Ответ записать в тригонометрической или алгебраической формах.

4 Выяснить, является ли функция $w = e^{z^2}$ аналитической.

5 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, если $u(x, y) = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x$ и $f(0) = 0$.

6 Найти угол поворота φ и коэффициента растяжения ρ функции $w = z^2$, в точке $z_0 = 2 - i$.

7 Вычислить $\int_{\Gamma} \operatorname{Im} z dz$ где Γ есть отрезок от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i$.

Контрольная работа 2 по разделу «Функции комплексной переменной»

Вариант 1

1 Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{z^2}}{(z-1)z^2} dz.$$

2 Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ в точке $z_0 = 0$.

3 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в точке z_0
а) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$, $z_0 = 0$; б) $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$, $z_0 = -1$.

4 Найти особые точки и определить их характер функции $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

5 Найти вычеты функции $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}$ в её особых точках.

6 Вычислить интегралы:

а) $\oint_{\frac{x^2+y^2}{9} = 1} \frac{\cos \frac{z}{2}}{z^2-4} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+4} dx$.

Вариант 2

1 Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-1|=4} \frac{e^{z+1}}{(z+2)(z-1)^2} dz.$$

2 Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \frac{1}{z-3}$ в точке $z_0 = -1$.

3 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в точке z_0

а) $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z^3}$, $z_0 = 0$; б) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $z_0 = i$.

4 Найти особые точки и определить их характер функции $f(z) = \frac{\cos z}{(z-1)^2}$.

5 Найти вычеты функции $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2+z}$ в её особых точках.

6 Вычислить интегралы:

а) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z} dz$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9} dx$.