Задания к контрольным работам

Контрольная работа по разделу «Гармонический анализ»

Вариант 1

1 Разложить в тригонометрические ряды Фурье функции:

а $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2x}{\pi} & при \quad -\pi \le x < 0, \\ 0 & при \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$

б $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ на интервале $(0; \pi)$ по синусам.

в $f(x) = 7 - \frac{3}{2}x$ на интервале $(0; \pi)$ по косинусам.

г $f(x) = x$ на интервале $(0; 2\pi)$.

д $f(x) = 2x - 5$ на интервале $(-1; 1)$.

е $f(x) = 2x + 1$ на интервале $(0; 4)$.

2 Представить функцию интегралом Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x| > 1, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x < 1, \\ -1 & \text{при} \quad -1 < x < 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1 Разложить в тригонометрические ряды Фурье функции:

а $f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad -\pi \le x < 0 \\ x & при \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$

б $f(x) = 5x + 2$ на интервале $(0; \pi)$ по синусам.

в $f(x) = \frac{3}{2} - x$ на интервале $(0; \pi)$ по косинусам.

г $f(x) = 1 - x$ на интервале $(0; 2\pi)$.

д $f(x) = 2x + 3$ на интервале $(-1; 1)$.

е $f(x) = 2x + 1$ на интервале $(2; 6)$.

2 Представить функцию интегралом Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 1 & при \quad |x| > 1, \\ 0.5 & при \quad x = 1, \\ -1 & при \quad |x| > 1. \end{cases}$$

III вариант

1 Разложить в тригонометрические ряды Фурье функции:

а $f(x) = \begin{cases} -x & при \quad -\pi < x \le 0 \\ 0 & при \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

б $f(x) = 3x - 2$ на интервале $(0; \pi)$ по синусам.

в $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x$ на интервале $(0; \pi)$ по косинусам.

г $f(x) = -x + 1$ на интервале $(0; 2\pi)$.

д $f(x) = 3 - x$ на интервале $(-1; 1)$.

е $f(x) = 4 - x$ на интервале $(0; 2)$.

2 Представить функцию интегралом Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad |x| \le 1, \\ 2 & при \quad |x| > 1. \end{cases}$$

IV вариант

1 Разложить в тригонометрические ряды Фурье функции:

а $f(x) = \begin{cases} 1 - x & при \quad -\pi < x < 0 \\ 0 & при \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$

б $f(x) = 6 - 2x$ на интервале $(0; \pi)$ по синусам.

в $f(x) = -x$ на интервале $(0; \pi)$ по косинусам.

г $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$ на интервале $(0; 2\pi)$.

д $f(x) = 4 + \frac{1}{2}x$ на интервале $(-1; 1)$.

е $f(x) = x$ на интервале $(1; 3)$.

2 Представить функцию интегралом Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 1 & при \quad -1 < x < 0, \\ 0.5 & при \quad x = -1,0,1, \\ x & при \quad 0 < x < 1, \\ 0 & при \quad |x| > 1. \end{cases}$$

V вариант

1 Разложить в тригонометрические ряды Фурье функции:

а $f(x) = \pi + x$ $при \quad (-\pi; \pi)$.

б $f(x) = 2x + 1$ на интервале $(0; \pi)$ по синусам.

в $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ на интервале $(0; \pi)$ по косинусам.

г $f(x) = 5x + 3$ на интервале $(0; 2\pi)$.

д $f(x) = \begin{cases} -2 & при -1 \le x < 0, \\ 2 & при \quad 0 \le x \le 1. \end{cases}$

е $f(x) = -x + 1$ на интервале $(0; 2)$.

2 Представить функцию интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}1 & при\ -1\le x<0,\\ x & при\ 0\le x\le 1,\\ 0 & при\ \ |x|>1.\end{cases}$$

VI вариант

1 Разложить в тригонометрические ряды Фурье функции:

а $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4} & при\ -\pi<x<0\\ \pi-x & при\ \ 0\le x<\pi\end{cases}$

б $f(x)=x-2$ на интервале $(0;\pi)$ по синусам.

в $f(x)=1-2x$ на интервале $(0;\pi)$ по косинусам.

г $f(x)=2-x$ на интервале $(0;2\pi)$.

д $f(x)=\frac{x}{3}+2$ на интервале $(-1;1)$.

е $f(x)=\frac{\pi}{2}-2x$ на интервале $(2;4)$.

2 Представить функцию интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}-2 & при\ -2<x<-1,\\ 0 & при\ -1<x<1,\\ 0 & при\ \ |x|>2.\end{cases}$$

Контрольная работа по разделу «Функции комплексной переменной».

Вариант 1

1 Вычислить:

а) $\frac{1-2i}{2-i}$; б) $(-1+\mathrm{i})^{12}$; в) $\ln\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$;

г) $\frac{(z_2-z_3)z_1}{z_2}$ в точках $z_1=1-i;\ z_2=2-3i;\ z_3=3+i.$

2 Найти все значения корня $\sqrt[3]{-i}$ и изобразить их в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

3 Вычислить значение $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{1+i}$. Ответ записать в тригонометрической или алгебраической формах.

4 Выяснить, является ли функция $w=z\bar{z}^2$ аналитической.

5 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, если $u(x,y)=x^2-y^2+x$ и $f(0)=0$.

6 Найти угол поворота φ и коэффициента растяжения ρ функции $w=z^2+z$ в точке $z_0=1+i.$

7 Вычислить $\int_\Gamma \bar{z}\,dz,$ где Г есть верхняя половина окружности $|z|=2$.

Вариант 1

1 Вычислить:

а) $\frac{2+i}{1-i}$; б) $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{80}$; в) ch $\frac{\pi i}{2}$;

г) $\frac{(2z_1-z_2)z_3}{z_2}$ в точках $z_1=-1+i;\ z_2=3-i;\ z_3=4+2i.$

2 Найти все значения корня $\sqrt[3]{-8}$ и изобразить их в комплексной плоскости C.

3 Вычислить значение $\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{1+i}$. Ответ записать в тригонометрической или алгебраической формах.

4 Выяснить, является ли функция $w = e^{z^2}$ аналитической.

5 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, если $u(x,y) = 2\sin x\, ch\, y - x$ и $f(0) = 0$.

6 Найти угол поворота φ и коэффициента растяжения ρ функции $w = z^2$, в точке $z_0 = 2 - i$.

7 Вычислить $\int_C \operatorname{Im} z\, dz$, где C есть отрезок от точки 1 до точки i .

III Вариант

1 Вычислить:

а) $\frac{2+3i}{3-5i}$; б) $(1+i)^{10}$; в) $\ln(-1-i)$;

г) $\frac{z_1(z_2-z_3)}{z_2}$ в точках $z_1 = 4+5i;\ z_2 = 1+i;\ z_3 = 7-9i$.

2 Найти все значения корня $\sqrt[3]{1}$ и изобразить их в комплексной плоскости C.

3 Вычислить значение $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$. Ответ записать в тригонометрической или алгебраической формах.

4 Выяснить, является ли функция $w = ze^{\bar{z}}$ аналитической.

5 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, если $u(x,y) = -2\sin 2x\, ch 2y + y$ и $f(0) = 2$.

6 Найти угол поворота φ и коэффициента растяжения ρ функции $w = e^z$, в точке $z_0 = \ln 3 - i\frac{\pi}{3}$.

7 Вычислить

$$\int_C zRez\, dz,$$ где C есть *верхняя половина* $|z| = 1$.

IV Вариант

1 Вычислить:

а) $\frac{2+i}{1-2i}$; б) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$; в) $\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$;

г) $\frac{z_1 - z_2 z_3}{z_2}$ в точках $z_1 = 4+5i;\ z_2 = 1+i;\ z_3 = 7-9i$.

2 Найти все значения корня $\sqrt[3]{i}$ и изобразить их в комплексной плоскости C.

3 Вычислить значение $(1+i)^{i-3}$. Ответ записать в тригонометрической или алгебраической формах.

4 Выяснить, является ли функция $w = \bar{z}e^z$ аналитической.

5 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, если $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ и $f(0) = 2i - 1$.

6 Найти угол поворота φ и коэффициента растяжения ρ функции $w = e^z - 5z$, в точке $z_0 = \ln 3 - \frac{\pi}{4}i$.

7 Вычислить

$$\int_C \frac{dz}{z},$$ где C есть *нижняя дуга* $|z| = 2$.

V Вариант

1 Вычислить:

а) $\frac{1+2i}{4-i}$; б) $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^8$; в) $\sin\frac{\pi i}{2}$;

г) $\frac{{z_1}^2-z_2+z_3}{z_2}$ в точках $z_1=2-i; z_2=-1+2i; z_3=8+12i$.

2 Найти все значения корня $\sqrt[4]{i}$ и изобразить их в комплексной плоскости С.

3 Вычислить значение $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2-2i}$. Ответ записать в тригонометрической или алгебраической формах.

4 Выяснить, является ли функция $w=zRe\,z$ аналитической.

5 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, если $u(x,y)=2\cos x\,ch\,y-x^2+y^2$ и $f(0)=2$.

6 Найти угол поворота φ и коэффициента растяжения ρ функции $w=z^2-4z$, в точке $z_0=1+2i$.

7 Вычислить

$\int_C |z|dz$, где С есть правая половина $|z|=1$.

VI Вариант

1 Вычислить:

а) $\frac{1-i}{2+3i}$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{24}$; в) $\ln(-2+2i)$;

г) $\frac{(z_1-2z_2)z_3}{z_2}$ в точках $z_1=2+3i; z_2=3+2i; z_3=5-2i$.

2 Найти все значения корня $\sqrt[4]{-i}$ и изобразить их в комплексной плоскости С.

3 Вычислить значение $(-1-i)^{2-2i}$. Ответ записать в тригонометрической или алгебраической формах.

4 Выяснить, является ли функция $w=ze^z$ аналитической.

5 Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, если $u(x,y)=x^3-2y+x$ и $f(0)=0$.

6 Найти угол поворота φ и коэффициента растяжения ρ функции $w=e^z+2z$, в точке $z_0=\ln 2+i\frac{\pi}{2}$.

7 Вычислить

$\int_C (Re\,z+Jm\,z)dz$, где С есть отрезок от точки 0 до точки $1+2i$.

Контрольная работа по теме

“Ряды. Вычеты. Вычисление интегралов”.

I вариант

1 Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-1|=2}\frac{e^{z^2}}{(z-1)z^2}dz.$$

2 Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$ в точке $z_0=0$.

3 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в точке z_0

а) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$, $z_0 = 0$; б) $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$, $z_0 = -1$.

4 Найти особые точки и определить их характер функции $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

5 Найти вычеты функции $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}$ в её особых точках.

6 Вычислить интегралы:

$a)$ $\oint\limits_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1} \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+4}dx$.

II вариант

1 Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-1|=4} \frac{e^{z+1}}{(z+2)(z-1)^2}dz.$$

2 Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \frac{1}{z-3}$ в точке $z_0 = -1$.

3 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в точке z_0

а) $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z^3}$, $z_0 = 0$; б) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $z_0 = i$.

4 Найти особые точки и определить их характер функции $f(z) = \frac{\cos z}{(z-1)^2}$.

5 Найти вычеты функции $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2+z}$ в её особых точках.

6 Вычислить интегралы:

$a)$ $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin\frac{1}{z}dz$, б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}dx$.

III вариант

1 Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z+1)^2(z-2)}.$$

2 Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = e^z$ в точке $z_0 = -1$.

3 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в точке z_0

а) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$; б) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $z_0 = 2$.

4 Найти особые точки и определить их характер функции $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$.

5 Найти вычеты функции $f(z) = \frac{1}{z^2-4z+3}$ в её особых точках.

6 Вычислить интегралы:

$a)$ $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2(z+1)}$, б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+8x+25}$

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$.

IV вариант

1 Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)(z-3)^2}dz.$$

2 Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \ln(2+z)$ в точке $z_0 = 1$.

3 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в точке z_0

а) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}, z_0 = 0$; б) $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$, $z_0 = 1$.

4 Найти особые точки и определить их характер функции $f(z) = z^3\cos\frac{1}{z}$.

5 Найти вычеты функции $f(z) = \frac{ch\,z}{(z+1)^2(z-3)}$ в её особых точках.

6 Вычислить интегралы:

$a)$ $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz,$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx,$

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$.

V вариант

1 Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{zdz}{(z-2)^2(z+1)}.$$

2 Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \cos z$ в точке $z_0 = \frac{\pi}{4}$.

3 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в точке z_0

а) $f(z) = \frac{1+\cos z}{z^6}, z_0 = 0$; б) $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$, $z_0 = 1$.

4 Найти особые точки и определить их характер функции

$f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$.

5 Найти вычеты функции $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1)^2(z+3)}$ в её особых точках.

6 Вычислить интегралы:

$a)$ $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3+iz^2}dz,$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+9)^2}dx,$

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+2x+5}dx$.

VI вариант

1 Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{chz}{(z-1)^2(z+1)}dz.$$

2 Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \frac{9}{z^2+3}$ в точке $z_0 = 0$.

3 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в точке z_0

а) $f(z) = \frac{1+\cos z}{z^4}$; б) $f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+3}$, $z_0 = 1$.

4 Найти особые точки и определить их характер функции

$f(z) = \frac{e^{z+e}}{z+e}$.

5 Найти вычеты функции $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}$ в её особых точках.

6 Вычислить интегралы:

$a)$ $\oint\limits_{C} \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz,$ где C есть $x^2+y^2=16$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2},$

в) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Контрольная работа по теме
"Операционное исчисление".

I вариант

1 Найти изображение функций:
а) $f(t) = e^{2t}\sin 2t$; б) $f(t) = t^2(\sin t + e^{4t})$;
в) $f(t) = \frac{1-\cos t}{t}$.

2 Найти оригиналы $f(t)$ для изображений $F(p)$:
$a) F(p) = \frac{1}{p^2+2p-3}$; б) $F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^3}$.

3 Методом операционного исчисления решить задачи Коши:

а) $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, x(0) = 0, x'(0) = 1$;

б) $\begin{cases} y' + z = 2\sin t, \\ z' + y = -1 \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = 1$.

II вариант

1 Найти изображение функций:
а) $f(t) = e^{-t}t^3$ б) $f(t) = t^2(\cos 2t + e^{2t})$;
в) $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$.

2 Найти оригиналы $f(t)$ для изображений $F(p)$:
$a) F(p) = \frac{4}{p^2+5p+6}$; б) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}$.

3 Методом операционного исчисления решить задачи Коши:

а) $x'' + 2x' + x = \sin t$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$;

б) $\begin{cases} y' - z = 5\cos 2t \\ z' - y = 2 \end{cases}$ $y(0) = -1, z(0) = 0$.

III вариант

1 Найти изображение функций:
а) $f(t) = e^{4t} sh\, t$ б) $f(t) = t^2(e^{2t} + \cos 3t)$;
в) $f(t) = \frac{\mathrm{e^t} - 1 - t}{t}$.

2 Найти оригиналы $f(t)$ для изображений $F(p)$:
$a) F(p) = \frac{3}{p^2+4p-5}$; б) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2}$.

3 Методом операционного исчисления решить задачи Коши:

а) $x'' + 2x' + 5x = 3$, $x(0) = 1, x'(0) = 0$;

б) $\begin{cases} y' + 4z = 13\cos 3t \\ z' - y = 2t \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = 2$.

IV вариант

1 Найти изображение функций:
а) $f(t) = e^{-3t}\cos 4t$ б) $f(t) = t^2(e^{2t} + \cos 3t)$;
в) $f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$.

2 Найти оригиналы $f(t)$ для изображений $F(p)$:

$a) F(p) = \frac{3}{p^2+p-12}$; б) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{p+3}$.

3 Методом операционного исчисления решить задачи Коши:

а) $x'' + 2x' + x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$

б) $\begin{cases} y' - 4z = 4t \\ z' - y = 5\cos t \end{cases} \quad y(0) = 2, z(0) = 0.$

V вариант

1 Найти изображение функций:

а) $f(t) = e^{3t} ch\, 2t$ б) $f(t) = t^2(\sin 2t + e^{-t})$;

в) $f(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{t}$.

2 Найти оригиналы $f(t)$ для изображений $F(p)$:

$a) F(p) = \frac{9}{p^2-6p+8}$; б) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p-1}$.

3 Методом операционного исчисления решить задачи Коши:

а) $x'' + x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1;$

б) $\begin{cases} y' - z = t^3 \\ z' + y = 3\sin 2t \end{cases} \quad y(0) = -2, z(0) = 0.$

VI вариант

1 Найти изображение функций:

а) $f(t) = e^t(t^2 + 2t)$ б) $f(t) = t^2(\cos 3t - e^{2t})$;

в) $f(t) = \dfrac{\cos t - \cos 2t}{t}$.

2 Найти оригиналы $f(t)$ для изображений $F(p)$:

$a) F(p) = \frac{6}{p^2-7p+6}$; б) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-1}$.

3 Методом операционного исчисления решить задачи Коши:

а) $x'' + 2x' + 5x = 1 - t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$

б) $\begin{cases} y' + z = 15\sin 4t \\ z' - y = -3 \end{cases} \quad y(0) = 1, z(0) = -1.$