д) $f_4(t) = t^z \cdot f(t)$, $z \in \mathbb{C}$, с показателем роста s_0;

г) $g(t) = \int\limits_0^t f(z)dz$, $0 \le t < \infty$, с показателем роста s_0.

1.2 Преобразование Лапласа

Изображением (*интегралом Лапласа*) оригинала $f(t)$ называется несобственный интеграл вида

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$

зависящий от комплексного параметра p.

Преобразованием Лапласа называется операция перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде

$$f(t) \doteqdot F(p).$$

Пусть функция $f(t)$ оригинал с показателем роста $s_0 > 0$.

Теорема 1 (существование изображения) Для оригинала $f(t)$ с показателем роста $s_0 > 0$ изображение $F(p)$ существует в полуплоскости $\operatorname{Re} p = u > s_0$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости.

Теорема 2 (необходимый признак существования изображения) Если функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, то $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$.

Теорема 3 (единственность оригинала) Если функции $F(p)$ и $\Phi(p)$ совпадают, то совпадают между собой и соответствующие оригиналы $f(t)$ и $\varphi(t)$ во всех точках, в которых они непрерывны.

1.3 Свойства преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа обладает *свойствами*:

– *линейность:* линейной комбинации оригиналов соответствует линейная комбинация изображений, т. е. если $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$ и $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$ и c_1, c_2 – постоянные числа, то

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \doteqdot c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p);$$

***Раздел 2* Функции комплексной переменной**

Тема 1 Функции комплексной переменной

1.1 Множества, кривые, области

Множество точек плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенству $|z_0 - z| \le \delta$, называется δ*-окрестностью* точки z_0:

$$U(\delta, z_0) = \{\ z \in \mathbb{C}\ |\ |z - z_0| < \delta\ \}.$$

Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R > 0$, называется R *- окрестностью* бесконечно удаленной точки $z = \infty$:

$$U(R, \infty) = \{\ z \in \mathbb{C}\ |\ |z| > R\ \}.$$

Комплексная плоскость вместе с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$ называется *расширенной комплексной плоскостью*. Символы $x \pm i\infty$, $\pm\infty + iy$, $\infty e^{i\varphi}$ задают направления на расширенной комплексной плоскости.

Точка z_0 называется *предельной* точкой множества $E \subset \mathbb{C}$, если в любой окрестности точки z_0 расположено бесконечно много точек $z \in E$. Предельная точка z_0 может принадлежать множеству E, а может и не принадлежать ему.

Точка $z \in E$ называется *внутренней* точкой множества E, если существует такое $\delta > 0$, что окрестность $U(\delta; z)$ состоит только из точек множества E. Множество называется *открытым*, если каждая точка этого множества является его внутренней точкой.

Точка z_0 расширенной комплексной плоскости называется *граничной* точкой множества E, если при любом $\delta > 0$ окрестность $U(\ \delta, z_0)$ содержит точки $z \in E$ и точки $z \notin E$. Граничная точка множества E может принадлежать множеству E, а может и не принадлежать ему. Совокупность всех граничных точек множества называется *границей* множества. Множество E, содержащее свою границу, называется *замкнутым* и обозначается $\overline{E}$.

Пусть $t \in T \subset \mathbb{C}$. Если каждому значению $t \in T$ поставлено в соответствие $z \in \mathbb{C}$, то говорят, что на множестве T задана комплекснозначная функция действительной переменной t: $z = z(t)$.

Полагая $z(t) = x(t) + iy(t)$, можно считать, что задание функции $z(t)$ равносильно заданию на множестве T двух действительных функций $x(t)$ и $y(t)$ переменной t. Очевидно, если $x(t)$ и $y(t)$ непрерывные функции, то и функция $z(t)$ является непрерывной. Графиком функции $z(t)$ является кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Точкой *самопересечения* кривой $z(t)$ называется точка z, для которой при $t_1 \neq t_2$ имеет место соотношение $z(t_1) = z(t_2)$.

Кривой Жордана называется непрерывная кривая $z(t)$, $t \in T$, не имеющая точек самопересечения. *Замкнутой кривой* называется кривая Жордана, у которой конец совпадает с началом (совпадение начала и конца замкнутой кривой не считается точкой самопересечения). Кривая Жордана $z(t)$ называется *гладкой*, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно-дифференцируемы и $x_t'^2 + y_t'^2 \neq 0$ на множестве T. Кривая Жордана называется *кусочно-гладкой,* если она состоит из конечного числа гладких кривых.

Множество E называется *связным* множеством, если две любые его точки можно соединить кривой Жордана, целиком лежащей в E. Связное открытое множество E называется *областью*.

а) б)

Рисунок 4 – Односвязная (а) и многосвязная (б) области

Область, ограниченная замкнутым контуром γ, обозначается D_γ. Область D называется *односвязной*, если любой замкнутый контур γ целиком лежащий в D, ограничивает область $D_\gamma \subset D$ (рисунок 4, а). В противном случае область называется *многосвязной* (рисунок 4, б).

Для многосвязной области D найдутся контуры γ_1, γ_2, …, γ_n, такие, что точки из областей D_{γ_1}, D_{γ_2}, …, D_{γ_n} не входят в D. С по-

***Раздел 3* Операционное исчисление**

Тема 1 Преобразование Лапласа

1.1 Оригиналы и их свойства

Комплекснозначная функция $f(t)$ называется *оригиналом*, если она удовлетворяет условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) при $t \geq 0$ функция $f(t)$ кусочно-непрерывна;

3) при $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т. е. существует такое положительное число M и такое неотрицательное число s_0, что для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}, \; M > 0, \; s_0 \geq 0.$$

Число s_0 называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Если $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$ – оригиналы с показателями роста s_1, s_2, …, s_n, то функция $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots c_n f_n(t)$, $c_i \in \mathbb{C}$, является также оригиналом с показателем роста $s_0 = \max\{ s_1, s_2, ..., s_n \}$.

Пусть функция $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0. Тогда являются оригиналами следующие функции:

а) $|f(t)|$ с показателем роста s_0;

б) $f_1(t) = f(\alpha \cdot t)$, $\alpha > 0$, с показателем роста $\alpha \cdot s_0$;

в) $f_2(t) = e^{\lambda t} f(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, показатель роста которой равен

$$s = \begin{cases} s_0 + \operatorname{Re}\lambda, & \text{если } s_0 + \operatorname{Re}\lambda > 0, \\ 0, \quad \text{если} & s_0 + \operatorname{Re}\lambda < 0; \end{cases}$$

г) $f_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < \tau, \\ f(t - \tau), & \text{если } t \geq \tau, \end{cases}$

с показателем роста s_0, $\tau > 0$;

22 Как для мероморфной функции вычисляется логарифмический вычет по контуру?

23 Как вычисляются интегралы по замкнутому контуру?

24 Как вычисляются несобственные интегралы?

25 Как вычисляются интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$?

26 В чем суть леммы Жордана? Для каких интегралов она используется?

27 В каких случаях можно вычислить сумму ряда с помощью вычетов?

мощью дополнительных разрезов l_1, l_2, ..., l_n многосвязная область преобразуется в односвязную (рисунок 5), так как в области с разрезами любой замкнутый контур γ не будет содержать внутри себя точек из областей D_{γ_1}, D_{γ_2}, …, D_{γ_n}.

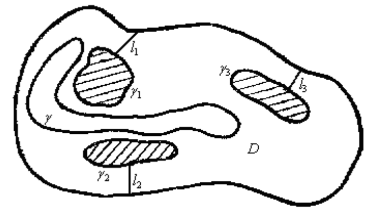

Рисунок 5 – Многосвязная область D и ее разрезы l_1, l_2, l_3

Положительным направлением обхода границы области D считается то направление, при котором область D остается слева.

1.2 Предел последовательности

Пусть дана последовательность комплексных чисел (z_n), $n = 1, 2, ...$.

Число a, $a \in \mathbb{C}$ называется *пределом* числовой последовательности (z_n), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всякого $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$:

$$a = \lim_{n\to\infty} z_n \iff \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |z_n - a| < \varepsilon .$$

Комплексное число $a = \infty$ называется *пределом* последовательности (z_n), если $\forall\ R > 0$ найдется такой номер $N(R)$, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|z_n| > R$:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \iff \forall\ R > 0 \ \exists\, N(R): \forall n \ge N(R) \quad |z_n| > R .$$

Т е о р е м а 1 *Для того чтобы существовал конечный предел* $a = \alpha + i\beta$ *последовательности* (z_n), $z_n = x_n + iy_n$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы последовательностей действительных чисел* (x_n) *и* (y_n) *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$.

Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ и $a = re^{i\varphi}$ показательные формы для $z_n = x_n + iy_n$ и $a = \alpha + i\beta$ соответственно.

Теорема 2 Для того чтобы существовал конечный предел $re^{i\varphi}$, $r \neq 0$, последовательности $\left(r_n e^{i\varphi_n}\right)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, а при соответствующем выборе области главных значений аргументов φ_n и φ существовал предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$.

Последовательность (z_n) называется *ограниченной*, если существует число $M \in \mathbb{R}_+$ такое, что все элементы последовательности удовлетворяют неравенству $|z_n| \leq M$.

Сходящиеся последовательности комплексных чисел обладают *свойствами*:

– сходящаяся последовательность имеет только один предел;

– если последовательность (z_n) сходится, то она ограничена:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \ \Rightarrow \ \exists M \in \mathbb{R} : |z_n| \leq M \ ;$$

– сумма (разность) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n \,;$$

– произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность предел которой равен произведению пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n \,;$$

– частное двух сходящихся последовательностей (z_n) и (w_n), $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0$, есть сходящаяся последовательность предел которой равен частному пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n} \,;$$

Теорема 3 (критерий Коши) Для того чтобы последовательность (z_n) была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всякого $n > N(\varepsilon)$ и $p = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$.

3 Сформулируйте и докажите основную теорему Коши: а) для односвязной области, б) для многосвязной области.

4 Сформулируйте и докажите теорему об интегральной формуле Коши.

5 Сформулируйте и докажите теорему среднем для функции комплексной переменной.

6 Сформулируйте и докажите теорему Тейлора.

7 Сформулируйте и докажите основную теорему о вычетах.

Вопросы и задачи на понимание

1 Как определяется действительная и мнимая части функции комплексной переменной?

2 Для каких функций выполняются условия Коши-Римана?

3 По каким формулам вычисляется производная функции комплексной переменной?

4 Является ли аналитическая функция гармонической?

5 В чем состоит геометрический смысл модуля производной?

6 В чем состоит геометрический смысл аргумента производной?

7 В чем состоит различие между конформным отображениями 1- и 2-го родов?

8 В чем суть теоремы Римана?

9 В чем суть принцип соответствия границ?

10 Для каких путей интегрирования целесообразна замена $z - z_0 = re^{i\varphi}$?

11 В чем состоит принцип максимума модуля аналитической функции?

12 В чем суть теоремы Морера?

13 Как исследовать ряд комплексных чисел на сходимость?

14 Какая сходимость функционального ряда сильнее: точечная или равномерная?

15 Когда можно почленно дифференцировать и интегрировать степенные ряды?

16 Как определяется ряд Тейлора для многозначных функций?

17 Как определяется ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки?

18 Как представима функция, имеющая нуль кратности m ?

19 Как влияет характер изолированной особой точки на вид ряда Лорана?

20 Как определяется особенность в бесконечно удаленной точке?

21 Как вычисляется вычет относительно: а) устранимой точки; б) простого полюса; в) полюса порядка m ; г) существенно особой точки; д) бесконечно удаленной точки?

28 Какой ряд называется функциональным рядом?

29 Что называется точкой сходимости и областью сходимости функционального ряда?

30 Какой функциональный ряд называется равномерно сходящимся?

31 Какой ряд называется степенным?

32 Что называется: а) радиусом сходимости, б) кругом сходимости степенного ряда?

33 Какой ряд называется рядом Лорана?

34 Что называется областью сходимости ряда Лорана?

35 Какая точка называется нулем функции? Что называется кратностью нуля?

36 Какая точка называется изолированной особой точкой?

37 Какая изолированная особая точка называется: а) устранимой, б) полюсом, в) существенно особой?

38 Что называется вычетом функции?

39 Что называется логарифмическим вычетом?

Формулировки теорем и формулы

1 Сформулируйте критерий Коши существования предела функции комплексной переменной.

2 Как определяются элементарные функции комплексной переменной?

3 Что называется производной функции $f\left(z\right)$ в точке?

4 Какая функция называется дифференцируемой в точке?

5 Сформулируйте критерий конформного отображения?

6 Сформулируйте принцип симметриии Римана-Шварца.

7 Перечислите свойства интеграла от функции комплексной переменной.

8 По какой формуле осуществляется замена переменной в интеграле от функции комплексной переменной?

9 Какими свойствами обладает интеграл типа Коши?

10 Сформулируйте теорему Коши-Лиувилля.

11 Перечислите основные свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Доказательства теорем

1 Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условия дифференцируемости.

2 Сформулируйте и докажите теорему о связи интеграла от функции комплексной переменной по кривой и криволинейного интеграла 2-го рода?

1.3 Предел и непрерывность функции комплексной переменной

Если каждому комплексному числу $z \in E$ ($z = x + iy$) по правилу f поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел $w \in G$, ($w = u + iv$), то говорят, что на множестве E задана *функция комплексной переменной* $w = f(z)$, переменная z называется *независимой переменной*, а w *– значением функции.*

Если каждому $z \in E$ соответствует одно значение $w \in G$, то функция $w = f(z)$ называется *однозначной*; в противном случае – *многозначной.* При этом множество E называется *областью* определения, а совокупность всех значений w, которые функция принимает на E, называется *множеством значений*.

Геометрически функция $w = f(z)$ представляет собой отображение области E плоскости $\mathbb{C}$ $\left(Oxy\right)$ на некоторую область G плоскости $\mathbf{W}$ $\left(O^{*}uv\right)$ (рисунок 6)

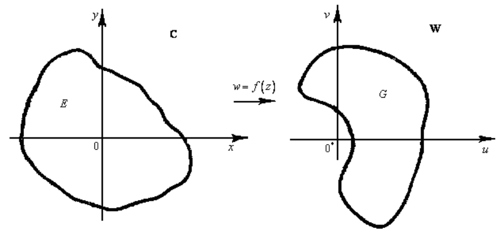

Рисунок 6 – Геометрическая интерпретация функции $w = f(z)$

Обратное отображение множества G на множество E определяет *обратную* функцию $z = \varphi\left(w\right)$.

Если функция $w_1 = f(z)$ отображает область E на область E_1, а функция $w = g(w_1)$ отображает область E_1 на область G, то *сложная* функция $w = g\left(f\left(z\right)\right)$ осуществляет отображение области E на G.

Функция $f(z)$ называется *однолистной* на множестве E, если она однозначна и в различных точках $z_1 \neq z_2$ множества E принимает различные значения $f\left(z_1\right) \neq f\left(z_2\right)$.

Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Тогда функция $f(z)$ может быть записана в виде:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ – действительная часть, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ – мнимая часть.

Модуль функции $f(z)$ находится по формуле:

$$\left|f(z)\right| = \sqrt{u^2(x;y) + v^2(x;y)}.$$

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, кроме, быть может, самой точки z_0.

Комплексное число A $(A \neq \infty)$ называется *пределом* функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$:

$$A = \lim_{z \to z_0} f(z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall z\ \ 0 < |z - z_0| < \delta \qquad |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Комплексное число $A = \infty$, называется *пределом* функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если для любого $R > 0$ найдется такое $\delta(R) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z)| > R$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall R > 0\ \exists \delta(R) > 0 : \forall z\ \ 0 < |z - z_0| < \delta \qquad |f(z)| > R.$$

Функция $\alpha(z)$ называется *бесконечно малой* при $z \to z_0$, если ее предел равен нулю: $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$.

Теорема 4 (критерий Коши) Для существования конечного предела A функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек z' и z'', принадлежащих области определения функции $f(z)$ и удовлетворяющих неравенствам $0 < |z' - z| < \delta$ и $0 < |z'' - z| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$.

Теорема 5 Пусть функция $f(z) = u(x,y,) + iv(x,y)$ определена и конечна в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$ и $A = u_0 + iv_0$. Тогда для того, чтобы $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0, \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Что называется окрестностью точки z_0?

2 Дайте определение: а) предельной, б) внутренней, в) граничной точки множества $E \subset \mathbb{C}$.

3 Какое множество называется: а) открытым, б) замкнутым?

4 Какая функция называется комплекснозначной?

5 Какая кривая называется кривой Жордана?

6 Дайте определение связного множества.

7 Что называется областью комплексной плоскости?

8 Какая область называется: а) односвязной, б) многосвязной?

9 Какое направление обхода границы области называется положительным?

10 Сформулируйте определение числовой последовательности комплексных чисел.

11 Что называется пределом числовой последовательности комплексных чисел и какими свойствами он обладает?

12 Дайте определение функции комплексной переменной.

13 Какая функция называется: а) однозначной, б) многозначной, в) однолистной?

14 Что называется пределом функции комплексной переменной?

15 Какая функция комплексной переменной называется непрерывной а) в точке, б) в области?

16 Какая функция называется равномерно-непрерывной?

17 Что называется дифференциалом функции комплексной переменной?

18 Какая функция называется аналитической: а) в точке, б) в области?

19 Какие функции называются гармоническими?

20 Какое отображение называется конформным?

21 Какое направление движения по кривой называется: а) положительным, б) отрицательным?

22 Что называется интегралом от функции комплексной переменной?

23 Что называется первообразной для функции комплексной переменной?

24 Дайте определение неопределенного интеграла для функции комплексной переменной и запишите формулу Ньютона-Лейбница.

25 Какой интеграл называется интегралом типа Коши?

26 Сформулируйте определение ряда комплексных чисел?

27 Какой ряд с комплексными числами называется абсолютно сходящимся?

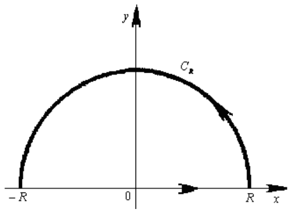

Рисунок 10 – Рисунок к лемме Жордана

10.4 Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов

Вычисление некоторых рядов с помощью теории вычетов основано на следующих теоремах.

Теорема 3 Пусть:

1) $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов z_1, z_2, ..., z_n (отличных от целых чисел),

2) функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z\to\infty$. Тогда справедлива формула:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = -\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)\right]$$

Теорема 4 Пусть:

1) $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов z_1, z_2, ..., z_n (отличных от целых чисел),

2) функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$f(z)\le \mathrm{e}^{a|\operatorname{Im} z|}\varepsilon(|z|)$ *при* $z\to\infty$, $z\in G_\rho$, $0\le a<\pi$,

$G_\rho = \mathbb{C}\setminus\{z|\ |z-z_1|\le\rho, |z-z_2|\le\rho, ..., |z-z_n|\le\rho\}$.

Тогда справедлива формула:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k f(k) = -\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}.$$

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют конечные пределы при $z\to z_0$. Тогда имеют место соотношения:

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z)\pm\lim_{z\to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z)\cdot\lim_{z\to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)} \text{ при } g(z)\ne 0.$$

Функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функция $f(z)$ называется *непрерывной в области* D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Сумма, разность и произведение конечного числа функций комплексной переменной, непрерывных в области D, является непрерывной функцией в этой области. Частное двух непрерывных функций $f(z)$ и $g(z)$ в области D является непрерывной функцией в тех точках этой области, где $g(z)\ne 0$.

Если функция $w_1=f(z)$ непрерывна в точке z_0 и функция $w=g(w_1)$ непрерывна в точке $w_1=f(z_0)$, то сложная функция $w=g(f(z))$ непрерывна в точке z_0.

Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной* в области D, если для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых двух точек z', $z''\in D$, расстояние между которыми меньше δ ($|z'-z''|<\delta$), расстояние между соответствующими значениями функции $f(z')$ и $f(z'')$ меньше ε ($|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$).

Очевидно, что всякая равномерно непрерывная функция в области D является непрерывной функцией в этой области. Обратное утверждение верно не всегда: непрерывная функция в области D может и не обладать свойством равномерной непрерывности.

Теорема 6 (Кантора) Если $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то она равномерно непрерывна в этой области.

1.4 Основные элементарные функции комплексной переменной

Дробно-рациональной функцией называется функция вида:

$$f(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+...+b_m},$$

$$a_i,\ b_j\in\mathbb{C},\ i=0,1,...,n,\ j=0,1,...,m,\ n,\ m\in\mathbb{N},$$

частными случаями которой являются:

– *линейная* функция $f(z)=az+b$;

– *степенная* функция $f(z)=z^n$;

– *дробно-линейная* функция $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq0$;

– функция *Жуковского* $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.

Показательной функцией называется функция вида

$$f(z)=e^z,$$

для которой при $z=x+iy$ справедливо представление

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y),$$

и формулы Эйлера

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,\quad e^{-iz}=\cos z-i\sin z.$$

Тригонометрическими функциями называются функции:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Все тригонометрические тождества для тригонометрических функций комплексного переменного аналогичны тождествам тригонометрических функций действительного переменного;

Гиперболическими функциями называются функции:

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Гиперболические и тригонометрические функции связаны между собой соотношениями:

10.3 Вычисление определенных интегралов от тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx$, где $R(\sin x,\cos x)$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, ограниченная внутри промежутка интегрирования. С помощью замены

$$e^{ix}=z,\ dx=\frac{dz}{iz},\ \cos x=\frac{z^2+1}{2z},\ \sin x=\frac{z^2-1}{2iz}$$

данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции $F(z)$ комплексной переменной z по окружности $|z|=1$. К интегралу $\oint\limits_{|z|=1}F(z)dz$ применима основная теорема о вычетах. Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}F(z).$$

Интегралы вида $\int\limits_0^{+\infty}R(x)\cos\lambda x dx$, $\int\limits_0^{+\infty}R(x)\sin\lambda x dx$, где $R(x)$ – рациональная функция, $\lambda>0$ любое действительное число вычисляются с использованием леммы Жордана.

Лемма Жордана Пусть функция $g(z)$ аналитическая в верхней полуплоскости $\{\ z\in\mathbb{C}\mid\ \operatorname{Im}z\geq0\ \}$, за исключением конечного числа особых точек, и стремится в этой полуплоскости к нулю при $|z|\to\infty$. Тогда при $\lambda>0$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}g(z)e^{i\lambda z}dz=0,$$

где контур C_R – полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке 0 и радиусом R (рисунок 10).

10.2 Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций

Вычисление интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ основано на следующей теореме.

Теорема 2 Пусть функция $f(x)$*, заданная на всей числовой оси* $-\infty < x < +\infty$*, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} z \geq 0$*. Функция* $f(z)$ *является аналитической в верхней полуплоскости* $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \,\}$ *за исключением конечного числа изолированных точек* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*. И пусть существуют такие положительные числа* M*,* R_0*,* δ*, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию* $|z| = R > R_0$*, имеет место оценка* $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$*. Тогда несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *существует и вычисляется по формуле:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),\ \operatorname{Im} z_k > 0 .$$

Пусть $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – рациональная функция, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно. Если функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $n \geq m+2$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sigma ,$$

где σ – сумма вычетов функции $f(z) = \dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \,\}$.

$$\operatorname{sh} z = -i \cdot \sin iz, \qquad \sin z = -i \operatorname{sh} iz,$$
$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \qquad \cos z = \operatorname{ch} iz,$$
$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \qquad \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz,$$
$$\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz, \qquad \operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz .$$

Для гиперболических функций справедливы тождества, аналогичные тригонометрическим тождествам за исключением

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 .$$

Логарифмической функцией называется функция вида:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \text{ или}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbb{N},$$

которая является многозначной.

Значение функции, которое получается при $k=0$, называется *главным значением* и обозначается

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z .$$

Общей степенной функцией называется функция

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z},\ \alpha \in \mathbb{C},\ z \neq 0,$$

которая является многозначной. Главное значение данной функции равно

$$z^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln z} .$$

Общей показательной функцией называется функция

$$a^z = e^{z \cdot \operatorname{Ln} a},\ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

которая является многозначной, и ее главное значение равно

$$a^z = e^{z \cdot \ln a} .$$

Обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как обратные функции к функциям $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ соответственно. Эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \qquad \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{z-i}{z+i}\right).$$

Функции являются многозначными, и их главные значения $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмов;

Обратные гиперболические функции $\operatorname{Arcsh} z$, $\operatorname{Arcch} z$, $\operatorname{Arcth} z$, $\operatorname{Arccth} z$ определяются как обратные функции к функциям $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ соответственно. Эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую:

$$\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right), \qquad \operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad \operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Функции являются многозначными и их главные значения $\operatorname{arcsh} z$, $\operatorname{arcch} z$, $\operatorname{arcth} z$, $\operatorname{arccth} z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмов.

Тема 2 Аналитические функции

2.1 Определение производной.
2.2 Условия Коши-Римана.
2.3 Аналитическая функция.
2.4 Сопряженно-гармонические функции.

2.1 Определение производной

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и конечна в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$. И пусть точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области D. Обозначим $\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z)$.

Производной функции $f(z)$ в точке z называется предел (если он существует и конечный)

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}.$$

Приращение Δz стремится к нулю любым образом, т. е. точка $z+\Delta z$ приближается к точке z по любому направлению.

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z, если ее приращение $\Delta f(z)$ представимо в виде

$$\Delta f(z) = C\cdot\Delta z + \alpha(\Delta z)\cdot\Delta z,$$

где $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Теорема 1 Для того чтобы функция $f(z)$ была дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

люсы первого порядка. При этом в нуле функции $f(z)$ логарифмический вычет равен порядку нуля функции $f(z)$, а в полюсе равен порядку полюса функции $f(z)$, взятому со знаком минус.

Пусть $f(z)$ – мероморфная функция в области D, Γ – замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком лежащий в области D и не проходящий через полюсы и нули функции $f(z)$. *Логарифмическим вычетом* относительно *контура* Γ называется интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Теорема 3 Если N_Γ – сумма кратностей нулей функции $f(z)$, лежащих внутри Γ, P_Γ – сумма кратностей полюсов функции $f(z)$, лежащих внутри Γ, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_\Gamma - P_\Gamma.$$

Тема 10 Приложение вычетов

10.1 Вычисление интегралов по замкнутому контуру.
10.2 Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций.
10.3 Вычисление определенных интегралов от тригонометрических функций.
10.4 Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов.

10.1 Вычисление интегралов по замкнутому контуру

Для вычисления интегралов комплексной переменной по замкнутому контуру используется основная теорема о вычетах.

Теорема 1 (основная теорема о вычетах) Если функция $f(z)$ является аналитической на границе Γ области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k))$$

9.2 Вычет относительно бесконечно удаленной точки

Вычет функции $f(z)$ относительно *бесконечно удаленной точки* $z=\infty$ находится с помощью разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки. Поэтому вычет функции $f(z)$ относительно $z=\infty$ равен взятому с противоположным знаком коэффициенту при первой отрицательной степени в разложении Лорана:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Вычет аналитической функции относительно бесконечно удаленной устранимой особой точки может оказаться отличным от нуля.

9.3 Основная теорема о вычетах

Теорема 1 Если $f(z)$ – функция, аналитическая в каждой точке расширенной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, то

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

9.4 Логарифмический вычет

Логарифмической производной функции $f(z)$ называется функция

$$\left(\ln f(z)\right)' = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Логарифмическим вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке z_0 называется вычет в этой точке логарифмической производной $\left(\ln f(z)\right)'$: $\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left(\ln f(z)\right)'$.

Очевидно, что

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left(\ln f(z)\right)' = \operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Теорема 2 В нулях и полюсах функции $f(z)$, аналитической в области D, логарифмическая производная $\left(\ln f(z)\right)'$ имеет по-

$$\Delta f(z) = f'(z)\cdot\Delta z + \alpha(\Delta z)\cdot\Delta z,$$

где $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha(\Delta z) = 0$.

Величина $f'(z)\Delta z$ называется *дифференциалом* функции $f(z)$ и обозначается $df(z) = f'(z)\Delta z$.

В частности, при $f(z) = z$ получаем $dz = \Delta z$, т. е. дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением. Заменяя приращение Δz на dz, имеем

$$df(z) = f'(z)dz.$$

Таким образом, дифференциал дифференцируемой функции равен произведению ее производной на дифференциал независимой переменной.

2.2 Условия Коши-Римана

Пусть $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ однозначная функция комплексной переменной $z = x+iy$, определенная в области D.

Теорема 2 Для того чтобы в точке $z = x+iy$ функция $f(z) = u(x;y)+iv(x;y)$ была дифференцируемой необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ были дифференцируемы в точке $(x;y)$ как функции двух действительных переменных x и y, и выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2.3 Аналитическая функция

Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* z, если она дифференцируема как в самой точке, так и в ее окрестности. Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* $D \subset \mathbb{C}$, если она аналитична в каждой точке этой области.

Производная аналитической функции находится по формулам:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Поскольку свойства алгебраических действий и правила предельного перехода для функций действительной переменной распространяются и на функцию комплексной переменной, то правила дифференцирования функций действительной переменной справедливы и для функции комплексной переменной:

$$\left(f(z)+g(z)\right)'=f'(z)+g'(z),$$

$$\left(f(z)\cdot g(z)\right)'=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)},\ g(z)\neq 0,$$

$$\left(f(g(z))\right)'=f_g'\cdot g'(z),$$

$$f'(z)=\frac{1}{\left(f^{-1}(z)\right)'}.$$

2.4 Сопряженно-гармонические функции

Функция $g(x;y)$ действительных переменных x и y называется *гармонической*, если она дважды дифференцируема и ее частные производные $\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial y^2}$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial y^2}=0.$$

Теорема 3 Если функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ аналитическая в области $D\subset\mathbb{C}$, то $u(x;y)$ и $v(x;y)$ являются гармоническими в области D.

Обратное верно не всегда: если взять за $u(x;y)$ и $v(x;y)$ две произвольные функции, гармонические в области D, то функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ не всегда будет аналитической в этой области, так как две произвольно взятые гармонические функции могут не удовлетворять условиям Коши-Римана.

Две гармонические в области $D\subset\mathbb{C}$ функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$, связанные в области D условиями Коши-Римана, называются *сопряженными*.

Вычет $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ можно найти либо непосредственно по определению

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz,$$

либо используя разложение в ряд Лорана:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}.$$

Рассмотрим вычисление вычетов в различных особых точках.

Пусть z_0 есть устранимая особая точка функции $f(z)$. В этом случае в разложении в ряд Лорана отсутствует главная часть. Поэтому $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=0$.

Пусть точка z_0 является *простым полюсом* функции $f(z)$. Тогда вычет находится по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\cdot f(z)\right].$$

Если функция $f(z)$ есть частное двух аналитических в точке z_0 функций $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, где $g(z_0)\neq 0$, $h(z)$ имеет простой нуль в точке z_0, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)\neq 0$, то точка z_0 является простым полюсом функции $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ и

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{g(z)}{h(z)}==\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Пусть точка z_0 является *полюсом порядка* m функции $f(z)$. Тогда вычет находится по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m\cdot f(z)\right]}{dz^{m-1}}.$$

Пусть точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$. Тогда для вычисления вычета функции $f(z)$ в этой точке непосредственно определяют коэффициент c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана.

– если в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ есть лишь конечное число членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка называется полюсом функции $f(z)$;

– если в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ есть бесконечно много членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка называется существенно особой точкой функции $f(z)$.

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ в бесконечно удаленной точке имеют существенную особенность, так как их разложения в ряд Лорана содержат бесконечное множество положительных степеней z.

Тема 9 Вычеты

9.1 Понятие вычета.
9.2 Вычет относительно бесконечно удаленной точки.
9.3 Основная теорема о вычетах.
9.4 Логарифмический вычет.

9.1 Понятие вычета

Пусть z_0 изолированная особая точка функции $f(z)$. *Вычетом* аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)dz$, взятому в положительном направлении по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ, лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$, и обозначается $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)dz.$$

Вычет функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки z_0 совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$.

Теорема 4 Пусть $D \subset \mathbb{C}$ односвязная область и функция $u(x;y)$ гармоническая в D. Тогда существует такая сопряженная ей гармоническая функция $v(x;y)$, определенная с точностью до постоянного слагаемого, что функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ является аналитической.

Тема 3 Конформное отображение

3.1 Геометрический смысл модуля производной.
3.2 Геометрический смысл аргумента производной.
3.3 Понятие о конформном отображении.
3.4 Критерий конформности.

3.1 Геометрический смысл модуля производной

Пусть функция $w=f(z)$ – аналитическая в некоторой точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$. Модуль производной $|f'(z_0)|$ называется *коэффициентом подобия* в точке z_0 при отображении $w=f(z)$. При $|f'(z_0)|>1$ имеет место *растяжение*, при $|f'(z_0)|<1$ – *сжатие*.

3.2 Геометрический смысл аргумента производной

Аргумент производной $\arg f'(z_0)$ – это угол, на который надо повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой Γ, проходящей через точку z_0 так, чтобы получить касательную в точке $w_0=f(z_0)$ к образу Γ' этой кривой при отображении $w=f(z)$. При этом, если $\arg f'(z_0)>0$, то поворот происходит против часовой стрелки, если $\arg f'(z_0)<0$ – по часовой.

3.3 Понятие о конформном отображении

Взаимно-однозначное отображение области $D\subset\mathbb{C}$ на область $D'\subset \mathrm{W}$, осуществляемое функцией $w=f(z)$, называется *конформным*, если оно в каждой точке области D обладает свойством сохранения углов и постоянством растяжений.

Другими словами, если $w=f(z)$ конформное отображение области $D\subset\mathbb{C}$ в область $D'\subset \mathrm{W}$, то

– величина угла между пересекающимися в точке z_0 кривыми области D равна величине угла между образами этих кривых, пересекающихся в точке $w_0 = f(z_0)$ области D';

– бесконечно малому кругу с центром в точке $z_0 \in D$ соответствует бесконечно малый круг с центром в точке $w_0 = f(z_0) \in D'$.

Если при отображении $w = f(z)$ направление отсчета соответствующих углов одинаковое, то имеет место *конформное отображение 1-го рода*, если направление отсчета углов изменяется на противоположное, то – *конформное отображение 2-го рода*.

Теорема 1 *Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда отображение $w = f(z)$ является конформным в точке z_0.*

3.4 Критерий конформности

Теорема 2 (критерий конформности) Для того, чтобы функция $w = f(z)$ являлась конформным отображением в области D, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была однолистной, аналитической и $f'(z) \neq 0$ всюду в области D.

Для конформного отображения $w = f(z)$ справедливы следующие теоремы.

Теорема 3 (Римана) Всякую односвязную область D плоскости $\mathbb{C}$, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости W.

Теорема 4 Существует единственная функция $w = f(z)$, осуществляющая конформное отображение заданной односвязной области D, граница которой состоит более чем из одной точки, на единичный круг $|w| < 1$ так, что

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha, \; z_0 \in E, \alpha \in □ .$$

Теорема 5 (принцип взаимно однозначного соответствия границ) Пусть в ограниченной односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ с контуром γ задана аналитическая функция $w = f(z)$, непрерывная в $\bar{D}$ и осуществляющая взаимно однознач-

8.2 Разложение функции в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки

Пусть аналитическая функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 разлагается в ряд Лорана:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - z_0)^{-k}, \; c_k \in \mathbb{C}.$$

Теорема 3 Для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана функции $f(z)$ не содержал членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$ (ряд Лорана не содержит главной части).

Теорема 4 Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана функции $f(z)$ содержал конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$ (в главной части ряда содержится конечное число членов).

Теорема 5 Для того чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана содержал бесконечно много членов с отрицательными степенями разности $(z - z_0)$ (в главной части ряда содержится бесконечно много членов с отрицательными показателями).

8.3 Разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

Исследование характера бесконечно удаленной особой точки $z = \infty$ удобнее проводить путем замены $z = \frac{1}{w}$, при которой точка $z = \infty$ переходит в точку $w = 0$. Тогда:

– если в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ нет членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка называется устранимой особой точкой функции $f(z)$;

Теорема 1 Точка z_0 *является нулем порядка* m *функции* $f(z)$, *аналитической в точке* z_0, *тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки* z_0 *имеет место равенство*

$$f(z)=(z-z_0)^m \cdot \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ *аналитична в точке* z_0 *и* $\varphi(z)\neq 0$.

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z=z_0$.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

– *устранимой особой* точкой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a$, $a\neq\infty$;

– *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

– *существенно особой*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Точка z_0 является *полюсом порядка* m, если для функции $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ точка z_0 является нулем порядка m. Полюс порядка $m=1$ называется *простым полюсом*.

Теорема 2 Для того чтобы точка z_0 *являлась полюсом порядка m функции* $f(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы функцию* $f(z)$ *можно было представить в виде:*

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

где функция $\varphi(z)$ *аналитична в точке* z_0 *и* $\varphi(z_0)\neq 0$.

Аналитическая функция $f(z)$ называется *мероморфной* в области $\bar{D}\subset\mathbb{C}$, если $f(z)$ не имеет в ней других особых точек, кроме полюсов.

ное отображение контура γ *на некоторый контур* Γ *плоскости* W. *Тогда, если при заданном отображении контуров сохраняется направление обхода, то функция* $w=f(z)$, *осуществляет конформное отображение* D *на внутреннюю область* $D'\subseteq$ W, *ограниченную контуром* Γ.

Пусть область D содержит в составе своей границы прямолинейный отрезок γ. Область D^*, полученная зеркальным отражением области D относительно прямой, на которой лежит отрезок γ, называется областью, *симметричной* области D относительно γ (рисунок 7).

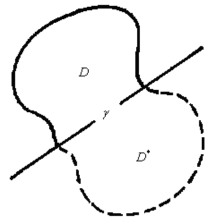

Рисунок 7 – Симметричные области D и D^* относительно γ

Точки z_1 и z_2 называются *симметричными* относительно прямой, если они лежат на перпендикуляре к этой прямой по разные стороны от нее и на равных расстояниях.

Теорема 6 (принцип симметрии Римана-Шварца) Пусть 1) граница области D *содержит прямолинейный отрезок* γ;

2) на множестве $D\cup\gamma$ *определена непрерывная функция* $w=f(z)$, *осуществляющая отображение области* D *на область* D^*;

3) при отображении $w=f(z)$ *прямолинейный отрезок* γ *границы области* D *переходит в прямолинейный отрезок* Γ *границы области* D^*.

Тогда 1) если $f(z)$ *аналитична в области* D, *то она аналитична в области* D^*;

2) области D и D^* *симметричны относительно прямой, содержащей отрезок* γ;

3) различные точки z_1, z_2 из D симметрично отображаются в различные точки w_1 и w_2 из D^* соответственно.

Тема 4 Интегрирование функции комплексной переменной

4.1 Интеграл от функции комплексной переменной.
4.2 Свойства интегралов по комплексной переменной.
4.3 Основная теорема Коши.
4.4 Теорема Коши для многосвязной области

4.1 Интеграл от функции комплексной переменной

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция комплексной переменной z, определенная на некоторой гладкой кривой Γ с началом в точке z_0 и концом в точке z_1. Кривая Γ может быть как замкнутой, так и незамкнутой. Направление движения по кривой Γ от начальной точки z_0 к конечной точке z_1 называется *положительным* направлением на кривой Γ и обозначается через Γ^+. Противоположное направление на кривой Γ называется *отрицательным* и обозначается Γ^-.

Разобьем кривую Γ на n частичных дуг произвольно выбранными точками ξ_0, ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{n-1}, ξ_n, $\xi_n = z_1$, расположенными последовательно в положительном направлении кривой Γ причем $\xi_0 = z_0$, (рисунок 8). На каждой частичной дуге $\xi_k\xi_{k+1}$, $k = 0,1,\cdots,n-1$, выберем произвольную точку ξ_κ^* и составим интегральную сумму $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_\kappa$, где $\Delta\xi_\kappa = \xi_{\kappa+1} - \xi_\kappa$.

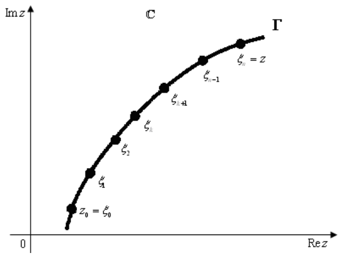

Рисунок 8 – Разбиение кривой Γ

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

сходящийся в кольце $R < |z| < \infty$.

При преобразовании $z = \frac{1}{w}$ точка $z = \infty$ отображается в точку $w = 0$ и окрестность бесконечно удаленной точки – в окрестность точки $w = 0$. В окрестности точки $w = 0$ функция $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ является аналитической и ее разложение в ряд Лорана есть $g(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k' w^k$. Возвращаясь к прежней переменной $z = \frac{1}{w}$, получаем ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$:

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

где $c_k = c_{-k}'$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Тема 8 Классификация изолированных особых точек аналитической функции

8.1 Классификация изолированных особых точек аналитической функции.
8.2 Разложение функции в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки.
8.3 Разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

8.1 Классификация изолированных особых точек аналитической функции

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0. Точка z_0 называется *нулем* функции $f(z)$ порядка m, если выполняются условия

$$f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(m-1)}(z_0) = 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

При $m = 1$ точка z_0 называется *простым* нулем.

7.4 Область сходимости ряда Лорана

Заменой переменной $\xi = \dfrac{1}{z - z_0}$ главная часть ряда Лорана преобразуется в степенной ряд, который сходится к аналитической функции $\varphi(\xi)$ в круге $|\xi| < \rho$. Возвращаясь к переменной z, имеем, что главная часть сходится к функции $f_1(z) = \varphi\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right)$ в области $|z - z_0| > \dfrac{1}{\rho}$. Область сходимости представляет собой внешность круга радиуса $R_1 = \dfrac{1}{\rho}$ с центром в точке z_0.

Правильная часть ряда Лорана представляет собой степенной ряд, поэтому его областью сходимости является круг радиуса R_2 с центром в точке z_0. Внутри этого круга ряд сходится к некоторой аналитической функции $f_2(z)$.

Если $R_1 < R_2$, то существует общая область сходимости рядов, составляющих ряд Лорана. Внутри кольца $R_1 < |z - z_0| < R_2$ ряд Лорана сходится к некоторой аналитической функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$. Если $R_1 > R_2$, то ряд Лорана расходится.

Областью сходимости ряда Лорана называется общая часть сходимости его главной и правильной частей.

Теорема 3 Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, однозначно представляется в этом кольце рядом Лорана $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, где коэффициенты c_k вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

Γ – любой замкнутый контур в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, содержащий точку z_0 внутри.

Рядом Лорана для аналитической функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ называется ряд

Интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой Γ в выбранном направлении называется предел $\lim\limits_{\max|\Delta\xi_\kappa| \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_\kappa^*) \Delta\xi_k$, не зависящий от способа разбиения кривой Γ на частичные дуги $\xi_\kappa \xi_{\kappa+1}$ и от выбора точек ξ_κ^*, $k = 0, 1, \cdots, n-1$:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\max|\Delta\xi_\kappa| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_\kappa^*) \Delta\xi_k .$$

Если для функции $f(z)$, определенной на кривой Γ, данный предел существует, то говорят, что функция $f(z)$ *интегрируема по кривой* Γ. Кривая Γ называется *путем* или *контуром* интегрирования.

Интеграл от функции $f(z)$ в положительном направлении кривой Γ обозначается $\int\limits_{\Gamma^+} f(z) dz$, в отрицательном – $\int\limits_{\Gamma^-} f(z) dz$, в случае замкнутого контура Γ – $\oint\limits_{\Gamma} f(z) dz$.

Теорема 1 Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой Γ, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, а начальная и конечная точка дуги соответствуют значениям $t = \alpha$ и $t = \beta$, то интеграл существует $\int\limits_{\Gamma} f(z) dz$ и справедлива формула

$$\int\limits_{\Gamma} f(z) dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt, \quad z(t) = x(t) + iy(t).$$

Теорема 2 (связь с криволинейным интегралом 2-го рода) Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой Γ, то интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z) dz$ существует и справедлива формула

$$\int\limits_{\Gamma} f(z) dz = \int\limits_{\Gamma} u(x,y) dx - v(x,y) dy + i \int\limits_{\Gamma} v(x,y) dx + u(x,y) dy .$$

4.2 Свойства интегралов по комплексной переменной

Интегралы от функций комплексной переменной обладают свойствами:

– *линейность:* если функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой Γ, то для любых c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ имеет место равенство:

$$\int_\Gamma \left[c_1 f(z) \pm c_2 g(z)\right] dz = c_1 \int_\Gamma f(z)\,dz \pm c_2 \int_\Gamma g(z)\,dz\ ;$$

– *ориентированность*: пусть Γ^+ и Γ^- – один и тот же путь интегрирования, проходимый соответственно в положительном или отрицательном направлении кусочно-гладкой кривой Γ, и функция $f(z)$ непрерывна на этой кривой. Тогда

$$\int_{\Gamma^+} f(z)\,dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)\,dz\ ;$$

– *аддитивность*: пусть кривая Γ состоит из кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ и функция $f(z)$ непрерывна на Γ. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\Gamma_n} f(z)\,dz\ ;$$

причем направление на кривых Γ_k, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, совпадает с направлением на кривой Γ;

– если Γ произвольная кусочно-гладкая кривая с началом z_0 и концом z_1, то $\int_\Gamma dz = z_1 - z_0$;

– если Γ гладкая кривая, замкнутая или незамкнутая, имеющая длину L, то $\int_\Gamma |dz| = L$;

– *оценка интеграла*: для любой функции $f(z)$, непрерывной на гладкой кривой Γ, справедливо неравенство:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\Gamma |f(z)|\,|dz|\ ;$$

– если $|f(z)| \le M$, то во всех точках гладкой кривой Γ длины L справедливо неравенство: $\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le M \cdot L$.

Разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций комплексной переменной аналогичны разложениям в ряд Тейлора функций действительной переменной:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \frac{z^n}{n!} + \dots,\ z \in \mathbb{C},$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,\ z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots,\ z \in \mathbb{C},$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots,\ |z| < 1,$$

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!} z + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \dots,\ |z| < 1.$$

Ряд Тейлора для многозначной функции получается из разложения соответствующей однозначной функции путем прибавления к нему чисел $2\pi i k$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 2 (формула Эйлера) Для функции e^{iz} справедливо равенство:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z\,.$$

7.3 Ряд Лорана

Ряд вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k\,,$$

называется *рядом Лорана.* Здесь $k \in \mathbb{N}$, z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости; z – переменная точка; $c_k \in \mathbb{C}$ – *коэффициенты* ряда.

Ряд Лорана представляет собой сумму двух рядов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k\,.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - z_0)^{-k}$ называется *главной частью*, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ – *правильной частью* ряда Лорана.

Тема 7 Ряды Тейлора и Лорана

7.1 Ряд Тейлора.
7.2 Основные разложения элементарных функций в ряд Маклорена.
7.3 Ряд Лорана.
7.4 Область сходимости ряда Лорана.

7.1 Ряд Тейлора

Теорема 1 (Тейлора) Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, единственным образом разлагается в этом круге в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k,$$

где $c_0=f(z_0)$, $c_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$.

Коэффициенты c_k, учитывая интеграл типа Коши (практическое занятие 5), можно вычислять по формулам

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}},\ k=1,2,\ldots,$$

где c_ρ – произвольная окружность с центром в точке z_0.

Говорят, что функция $f(z)$ *голоморфна в точке* z_0, если она в некоторой окрестности этой точки раскладывается в ряд по степеням ($z-z_0$). Функция, голоморфная в каждой точке области D, называется *голоморфной в этой области*.

Особой точкой функции $f(z)$ называется точка, в которой функция не является аналитической.

7.2 *Основные разложения элементарных функций в ряд Маклорена*

При $z_0=0$ имеет место ряд Маклорена:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot z^k.$$

4.3 Основная теорема Коши

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D.

Теорема 3 (Коши) Если функция $f(z)$ аналитическая в области D, ограниченной контуром Γ, и γ – замкнутый контур в D, то $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$.

Если при этом $f(z)$ непрерывна в $\bar{D}$, то $\oint_{\Gamma} f(z)dz=0$.

4.4 Теорема Коши для многосвязной области

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в n-связной области D, внешней границей которой является замкнутый кусочно-гладкий контур γ_0. И пусть $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1}$ – система замкнутых кусочно-гладких кривых, лежащих в области D и удовлетворяющих следующим условиям:

– кривые γ_k, $k=0,1,\cdots,n-1$, принадлежат внутренности γ_0;

– для любого m, $m=0,1,\cdots,n-1$, кривые γ_k при $k\neq m$ лежат во внешности γ_m;

– многосвязная область D получается из односвязной области, ограниченной замкнутой кривой γ_0, если из нее удалить односвязные области, ограниченные замкнутыми кривыми γ_k.

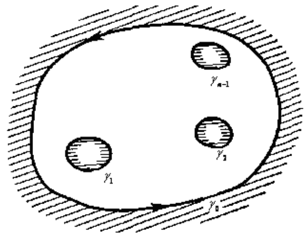

Рисунок 9 – Многосвязная область D

Обозначим через Γ систему контуров, составленную из замкнутой кривой γ_0, проходимой в положительном направлении, и замкнутых кривых γ_k, $k=0,1,\cdots,n-1$, проходимых в отрицательном направлении (рисунок 9):

$$\Gamma = \gamma_0^+ + \gamma_1^- + \gamma_2^- + \cdots + \gamma_{n-1}^-.$$

Т е о р е м а 4 Пусть функция $f(z)$ является:

1) аналитической функцией в многосвязной области D, ограниченной системой контуров $\Gamma = \gamma_0^+ + \gamma_1^- + \gamma_2^- + \cdots + \gamma_{n-1}^-$,

2) непрерывной в $\overline{D}$.

Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Из теоремы 4 следует:

$$\oint_{\gamma_0^+} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2^+} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\gamma_{n-1}^+} f(z)\,dz.$$

Т е о р е м а 5 Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D. Тогда интеграл от функции $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки z пути интегрирования.

Тема 5 Интегральная формула Коши

5.1 Первообразная и неопределенный интеграл.
5.2 Формула Ньютона-Лейбница.
5.3 Интегральная формула Коши.
5.4 Интеграл типа Коши.

5.1 П е р в о о б р а з н а я и н е о п р е д е л е н н ы й и н т е г р а л

Пусть функция $f(z)$ определена в области D (односвязной или многосвязной). *Первообразной* функции $f(z)$ в области D называется такая функция $F(z)$, что в каждой точке $z \in D$ выполняется равенство $F'(z) = f(z)$.

Т е о р е м а 1 Если $F(z)$ – первообразная функции $f(z)$ в области D, то совокупность всех первообразных функции $f(z)$ определяется формулой $F(z)+c$, где $c \in \mathbb{C}$.

Для степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$, имеющего как точки сходимости (кроме z_0, где ряд всегда сходится), так и точки расходимости, всегда существует такое действительное число $R > 0$, что внутри круга $|z - z_0| < R$ ряд сходится, а вне этого круга – расходится.

Область $|z - z_0| < R$ называется *кругом сходимости*, а число R – *радиусом сходимости* степенного ряда.

Радиус сходимости R вычисляется:

– по формуле Коши-Адамара $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}}$,

– по формуле $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{c_k}{c_{k+1}} \right|$, если этот предел существует.

Если $R = 0$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ сходится лишь в точке z_0; если $R = \infty$, то ряд сходится на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Внутри круга сходимости $|z - z_0| < R$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ сходится к аналитической функции.

Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и почленно дифференцировать любое число раз. При этом радиус сходимости каждого вновь полученного ряда равен радиусу сходимости исходного ряда, а над суммой ряда выполняется то же действие, что и над самим рядом.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *мажорантным* рядом для $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$.

Равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают *свойствами*:

– *непрерывность*: сумма равномерно сходящегося в области D ряда, состоящего из непрерывных функций, есть функция, непрерывная в области D;

– *интегрирование*: равномерно сходящийся в области D ряд непрерывных функций можно интегрировать вдоль любой кусочно-гладкой кривой Γ, целиком лежащей в области D, и справедлива формула

$$\int_{\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right)dz = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Gamma} u_k(z)\,dz;$$

– *дифференцирование* равномерно сходящийся в области D ряд аналитических функций можно дифференцировать любое число раз в области D и справедлива формула

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)}(z).$$

6.4 Степенные ряды

Ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

называется *степенным рядом* по степеням $(z-z_0)$. Здесь $c_k \in \mathbb{C}$ – коэффициенты ряда, $z_0 \in \mathbb{C}$ – фиксированная точка.

Теорема 3 (Абеля) Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ *сходится в точке* z_1, *то он сходится во всех точках* z, *удовлетворяющих условию* $|z-z_0| < |z_1-z_0|$, *причем сходимость будет равномерной в любом круге* $|z-z_0| \le R$, $R < |z_1-z_0|$. *Если степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ *расходится в точке* z_2, *то он расходится во всех точках* z, *удовлетворяющих условию* $|z-z_0| > |z_2-z_0|$.

Совокупность всех первообразных $F(z)$, функции $f(z)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(z)$ и обозначается: $\int f(z)dz = F(z)+c$.

5.2 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 2 (формула Ньютона-Лейбница) Если функция $f(z)$ *является аналитической в односвязной области* D, *то интеграл от* $f(z)$ *вдоль любого кусочно-гладкого контура, соединяющего две любые точки* z_0 *и* z_1 *этой области и лежащего целиком в ней, равен*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_0).$$

Интегралы от элементарных функций комплексной переменной в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в случае действительной переменной.

Замена переменной в интегралах от функций комплексной переменной производится аналогично случаю функции действительной переменной. Пусть аналитическая функция $z = \varphi(w)$ отображает взаимно однозначно контур γ в плоскости W на контур Γ в плоскости $\mathbb{C}$. Тогда справедлива формула замены переменной:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(\varphi(w))\varphi'(w)dw$$

Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки z_0, или окружностью с центром в точке z_0, то целесообразно использовать замену $z - z_0 = re^{i\varphi}$. В первом случае $\varphi = \text{const}$, а r – действительная переменная интегрирования, во втором случае $r = \text{const}$, а φ – действительная переменная интегрирования.

Теорема 3 (интегральная формула Коши) Пусть функция $f(z)$ *аналитична в области* D. *Тогда для любой точки* $z_0 \in D$ *справедливо равенство*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz,$$

где Γ *– кусочно-гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в области* D *и охватывающий точку* z_0.

Интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$, стоящий в правой части равенства теоремы 1, называется *интегралом Коши* функции $f(z)$.

Если в условиях теоремы точка z_0 расположена вне области, ограниченной контуром Γ, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=0.$$

Теорема 4 (о среднем) Значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0 области D, в которой функция $f(z)$ является аналитической, равно среднему арифметическому ее значений на любой окружности с центром в точке z_0, целиком лежащей в области D.

Пусть функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитическая в односвязной области D. Если в области D постоянна действительная часть $u(x,y)$ функции $f(z)$ или постоянен модуль функции $f(z)$, то функция $f(z)$ постоянна в области D.

Теорема 5 (о максимуме модуля) Пусть функция $f(z)$, не равная тождественно постоянной, является аналитической в области D и непрерывна в $\bar{D}$. Тогда максимальное (минимальное) значение модуля $|f(z)|$ достигается только на границе области $\bar{D}$.

Другими словами, модуль $|f(z)|$ не может достигать максимума (минимума) внутри области D кроме случая, когда $f(z)=\text{const}$.

Другими словами, функция $f(z)$ является суммой функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ в точке z_0 области D, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, что $\left|f(z_0)-\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)\right|<\varepsilon$ при $n>N$. В общем случае номер N зависит от выбора значений ε и точек z_0.

6.3 Равномерная сходимость функциональных рядов

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ называется *равномерно сходящимся* к функции $f(z)$ в области D, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, что $\left|f(z_0)-\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)\right|<\varepsilon$ при $n>N$ и $\forall\ z\in D$. Значение N зависит только от ε и одинаково для любых $z\in D$.

Теорема 1 (критерий Коши) Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ равномерно сходится в области D тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N\in\mathbb{N}$, что для любых $k>N$ и $p\in\mathbb{N}$ выполняются неравенства:

$$\left|u_{k+1}(z)+u_{k+2}(z)+\ldots+u_{k+p}(z)\right|<\varepsilon,\quad \forall\ z\in D.$$

Теорема 2 (признак Вейерштрасса) Пусть

1) функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ сходится в области D;

2) члены ряда удовлетворяют неравенствам

$$|u_k(z)|\le a_k,\ \forall\ k\in\mathbb{N},\ \forall\ z\in D;$$

3) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится.

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ сходится абсолютно и равномерно в области D.

Очевидно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\beta_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$. При этом $S = S_1 + iS_2$, где S_1 – сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$, S_2 – сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$.

Данное утверждение позволяет проводить исследование сходимости рядов с комплексными членами, основываясь на сходимости рядов с действительными членами. Для исследования применяются признаки сравнения рядов, Даламбера, Коши и другие достаточные признаки сходимости рядов.

6.2 Функциональные ряды

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$, членами которого являются функции $u_k(z)$ комплексной переменной z , называется *функциональным* рядом.

Точка z_0 называется *точкой сходимости* ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$, если сходится соответствующий числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ называется *сходящимся в области* D, если он сходится в каждой точке этой области. Совокупность всех точек сходимости называется *областью сходимости* функционального ряда. В общем случае область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ может быть многосвязной и замкнутой.

Суммой функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ в области D называется функция $f(z)$, которая в каждой точке $z_0 \in D$ равна значению соответствующего числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$:

$$f(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0) .$$

5.4 Интеграл типа Коши

Пусть в плоскости $\mathbb{C}$ задана произвольная кусочно-гладкая кривая Γ (замкнутая или незамкнутая) и на ней – произвольная непрерывная функция $f(z)$.

Интеграл

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz ,$$

где ζ – произвольная точка комплексной плоскости, не лежащая на кривой Γ, называется *интегралом типа Коши*. Интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши.

Теорема 6 Пусть Γ *– кусочно-гладкая кривая, расположенная в комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *и* $f(z)$ *– непрерывная функция на этой кривой. Тогда функция* $\Phi(\zeta)$ *является: а) аналитической в любой области* D *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$*, не содержащей точек кривой* Γ*, б) бесконечно дифференцируемой в области* D*, причем ее производная любого порядка* n *может быть получена по формуле*

$$\Phi^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}dz .$$

Следствие 1 Производные любого порядка от функции $\Phi(\zeta)$*, аналитической в области* D*, также являются аналитическими в этой области.*

Следствие 2 Пусть $f(z)$ *аналитическая в области* D *функция и на ее границе* Γ*. Тогда функция* $f(z)$ *бесконечно дифференцируема в этой области и ее производная* n*-го порядка в точке* $z_0 \in D$ *находится по формуле*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz ,\ n = 1,\ 2, \ldots .$$

Следствие 3 В любой точке z *области* D*, в которой функция* $f(z)$ *является аналитической, справедливы неравенства Коши*

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!\cdot M(\rho)}{\rho^n} ,\ n = 1,\ 2, \ldots ,$$

где ρ *— радиус произвольной окружности* c_ρ *с центром в точке* z_0*, целиком лежащей в области* D*;* $M(\rho)$ *– наибольшее значение модуля функции* $f(z)$ *на окружности* c_ρ*.*

Теорема 7 (Коши-Лиувилля) Если функция $f(z)$ *аналитична во всей комплексной плоскости* □ *и ограничена по модулю, то она постоянна.*

Теорема 8 (Морера) Если функция $f(z)$ *непрерывна в области* D *и интеграл* $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ *по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру* Γ*, лежащему в области* D*, то* $f(z)$ *является аналитической функцией в области* D*.*

Из условия теоремы следует, что в области D интеграл $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ не зависит от пути Γ интегрирования, соединяющего фиксированную точку z_0 с произвольной точкой z (z_0 и z лежат в области D) и определяет аналитическую функцию z

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta ,$$

для которой $F'(z) = f(z)$, $z \in D$.

Тема 6 Ряды аналитических функций

6.1 Числовые ряды с комплексными членами.
6.2 Функциональные ряды.
6.3 Равномерная сходимость функциональных рядов.
6.4 Степенные ряды.

6.1 Числовые ряды с комплексными членами

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots ,$$

где $a_k \in \mathbb{C}$, называется *числовым рядом с комплексными членами*, a_k – общим членом ряда.

Если положить $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, α_k, $\beta_k \in \mathbb{C}$, то ряд с комплексными членами запишется в виде $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$.

Сумма $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i\beta_k$ называется *частичной* суммой ряда, а сумма $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ называется *остатком* ряда.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ называется *сходящимся*, если существует предел последовательности частичных сумм (S_n):

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S ,$$

комплексное число S называется *суммой* ряда.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ сходится, то его общий член $\alpha_k + i\beta_k$ стремится к нулю при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha_k + i\beta_k) = 0 .$$

В случае сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ его остаток r_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Добавление или отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд с действительными положительными членами $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k + i\beta_k|$. В случае абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ имеем абсолютную сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$.