

Краткий лекционный курс

Раздел 1 Гармонический анализ

Тема 1 Функциональные пространства

- 1.1 Скалярное произведение функций.
- 1.2 Гильбертовы пространства.
- 1.3 Ортогональные системы функций.
- 1.4 Последовательности тригонометрических многочленов.

1.1 Скалярное произведение функций

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на $[a; b]$, если она непрерывна на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода.

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная на $[a; b]$ функция. В любой точке разрыва $x_0 \in [a; b]$ такой функции существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$. Поэтому на каждом участке непрерывности существуют определенные интегралы Римана $\int_a^b f(x)dx$ и

$\int_a^b f^2(x)dx$. Значит, кусочно-непрерывная на $[a; b]$ функция $f(x)$

интегрируема вместе со своим квадратом на $[a; b]$. Функция $f(x)$ в этом случае называется *функцией с интегрируемым квадратом*.

Так как на множестве кусочно-непрерывных функций определены линейные операции, удовлетворяющие аксиомам линейного пространства, то это множество образует линейное пространство.

Скалярным произведением функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется число

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx.$$

На рассматриваемом множестве скалярное произведение функций (φ, ψ) существует и обладает следующими свойствами:

- $(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)$;
- $(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi)$;

Содержание

Введение.....	4
Учебная программа курса «Математический анализ».....	5
Тематический план.....	8
Краткий лекционный курс.....	
Раздел 1 Гармонический анализ.....	10
Тема 1 Функциональные пространства.....	10
Тема 2 Ряды Фурье в гильбертовых пространствах.....	12
Тема 3 Ряды Фурье по тригонометрической системе.....	16
Вопросы для самоконтроля.....	21
Раздел 2 Функции комплексной переменной.....	23
Тема 1 Функции комплексной переменной.....	23
Тема 2 Аналитические функции.....	32
Тема 3 Конформное отображение.....	35
Тема 4 Интегрирование функции комплексной переменной.....	38
Тема 5 Интегральная формула Коши.....	42
Тема 6 Ряды в комплексной плоскости.....	46
Тема 7 Ряды Тейлора и Лорана.....	52
Тема 8 Классификация изолированных особых точек аналитической функции.....	55
Тема 9 Вычеты.....	58
Тема 10 Приложение вычетов.....	61
Вопросы для самоконтроля.....	65
Раздел 3 Операционное исчисление.....	69
Тема 1 Преобразование Лапласа.....	69
Тема 2 Восстановление оригинала по изображению.....	73
Тема 3 Приложения операционного исчисления.....	77
Вопросы для самоконтроля.....	84
Задания для практических занятий.....	86
Раздел 1 Гармонический анализ.....	86
Раздел 2 Функции комплексной переменной.....	96
Раздел 3 Операционное исчисление.....	144
Тестовые задания для итогового контроля.....	166
Деловые игры.....	169
Задания к контрольным работам.....	171
Примерный перечень вопросов экзамену.....	175
Типовые задачи к экзамену.....	178
Индивидуальные домашние задания.....	181
Литература.....	206

Введение

Данное издание является третьей частью учебно-методического комплекса «Математический анализ» для физических специальностей. В нем рассматривается дифференциальное и интегральное исчисление функции комплексной переменной, ряды Тейлора и Лорана, вычеты и их приложения, элементы операционного исчисления.

Структура учебно-методического комплекса аналогична предыдущим частям:

- примерный тематический план;
- краткий лекционный курс;
- вопросы для самоконтроля;
- примерные задания к практическим занятиям с решениями типовых примеров;
- деловые игры для проведения СУРС;
- примерные задания контрольных работ и тестовые задания для рубежного контроля;
- примерный перечень вопросов и задач к экзамену;

Учебно-методический комплекс предназначен для организации учебного процесса по курсу «Математический анализ» на физическом факультете университета. Изложенные вопросы разделов математического анализа могут быть использованы студентами для самостоятельной подготовки по данному предмету.

2.6	Ряды в комплексной плоскости	4	2	2	–
2.7	Ряды Тейлора и Лорана	4	2	2	–
2.8	Классификация изолированных особых точек аналитической функции	6	2	4	–
2.9	Вычеты	6	2	4	–
2.10	Приложение вычетов	6	2	2	2
3	Раздел 3 Операционное исчисление	14	6	6	2
3.1	Преобразование Лапласа	6	2	2	2
3.2	Восстановление оригинала по изображению	4	2	2	–
3.3	Приложения операционного исчисления	4	2	2	–
3.4	Всего часов за 3-й семестр	70	32	34	4

Тематический план

Учебный процесс по курсу осуществляется в виде лекций, практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, самостоятельной учебной работы студентов. Итоговой формой контроля знаний является экзамен. Распределение часов по разделам и темам в 3-ом семестре представлено в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Примерное распределение часов по разделам и темам курса

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Всего часов	Количество аудиторных часов		
			лекции	практические (семинарские) занятия	СУРС
1	2	3	4	5	6
1	Раздел 1 Гармонический анализ	12	6	6	–
1.1	Функциональные пространства	4	2	2	–
1.2	Ряды Фурье в гильбертовых пространствах	4	2	2	–
1.3	Ряды Фурье по тригонометрической системе	4	2	2	–
2	Раздел 2 Теория функции комплексной переменной	44	20	22	2
2.1	Функции комплексной переменной	4	2	2	–
2.2	Аналитические функции	4	2	2	–
2.3	Конформное отображение	2	2	–	–
2.4	Интегрирование функции комплексной переменной	4	2	2	–
2.5	Интегральная формула Коши	4	2	2	–

Учебная программа курса «Математический анализ»

Раздел 1 Гармонический анализ

Тема 1 Функциональные пространства

Метрические пространства. Линейные пространства. Норма функции. Скалярное произведение функций. Свойства скалярного произведения. Гильбертовы пространства. Ортогональные системы функций. Последовательности тригонометрических многочленов.

Тема 2 Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

Приближение функций в среднем. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость тригонометрической системы. Сходимость рядов Фурье. Равномерная сходимость ряда Фурье. Сходимость в среднем. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье.

Тема 3 Ряды Фурье по тригонометрической системе

Основная тригонометрическая система. Тригонометрические ряды Фурье. Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье. Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций. Разложение непериодических функций в тригонометрический ряд Фурье. Комплексная форма ряда Фурье.

Раздел 2 Теория функции комплексной переменной

Тема 1 Функции комплексной переменной

Множества, области, кривые. Односвязные многосвязные области. Последовательности комплексных чисел. Предел последовательности комплексных чисел. Понятие функции комплексной переменной. Предел и непрерывность функции комплексной переменной. Основные элементарные функции комплексной переменной.

Тема 2 Аналитические функции

Определение производной. Дифференцирование функции комплексной переменной. Дифференциал. Условия Коши-Римана. Аналитическая функция. Гармонические функции. Сопряженно-гармонические функции.

Тема 3 Конформное отображение

Геометрический смысл модуля производной. Коэффициент подобия. Геометрический смысл аргумента производной. Понятие о конформном отображении. Конформное отображение 1-го рода.

Конформное отображение 2-го рода. Критерий конформности. Принцип взаимно-однозначного соответствия границ. Принцип симметрии Римана-Шварца. Примеры функций, задающих конформное отображение.

Тема 4 Интегрирование функции комплексной переменной

Определение интеграла от функции комплексной переменной. Связь интеграла комплексной переменной с криволинейным интегралом 2-го рода. Свойства интегралов по комплексной переменной. Оценка интеграла от функции комплексной переменной. Основная теорема Коши. Теорема Коши для многосвязной области.

Тема 5 Интегральная формула Коши

Первообразная и неопределенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Интеграл Коши. Теорема о среднем для аналитических функций. Принцип максимума модуля аналитической функции. Интеграл типа Коши. Теорема Коши-Лиувилля. Теорема Морера.

Тема 6 Ряды в комплексной плоскости

Числовые ряды с комплексными членами. Частичная сумма ряда. Остаток ряда. Необходимое условие сходимости. Достаточное условие сходимости. Функциональные ряды. Точка сходимости. Область сходимости. Равномерная сходимость функциональных рядов. Степенные ряды. Круг и радиус сходимости степенного ряда.

Тема 7 Ряды Тейлора и Лорана

Ряд Тейлора. Разложение в ряд Тейлора некоторых элементарных функций комплексной переменной. Формулы Эйлера. Голоморфные функции. Нули аналитической функции. Ряд Лорана. Область сходимости ряда Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.

Тема 8 Классификация изолированных особых точек аналитической функции

Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Устранимая особая точка. Полнос. Порядок полюса. Существенно особая точка. Теорема Сохотского. Разложение аналитической функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Тема 9 Вычеты

Понятие вычета. Основная теорема о вычетах. Вычисление вычетов для простого полюса. Вычисление вычетов для полюса порядка n . Логарифмический вычет. Вычет относительно бесконечно удаленной точки. Теорема о сумме вычетов.

Тема 10 Приложение вычетов

Вычисление интегралов по замкнутому контуру. Вычисление с помощью вычетов определенных интегралов от рациональных функций действительной переменной. Вычисление с помощью вычетов определенных интегралов от тригонометрических функций. Вычисление с помощью вычетов несобственных интегралов от функций действительной переменной. Лемма Жордана. Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов.

Раздел 3 Элементы операционного исчисления

Тема 1 Преобразование Лапласа

Оригиналы и их свойства. Преобразование Лапласа. Свойства преобразования Лапласа. Существование, непрерывность, единственность. Свойства линейности, подобия, запаздывания, опережения. Изображение периодической функции. Затухание. Дифференцирование оригинала и изображения. Интегрирование оригинала. Интегрирование изображения. Таблица оригиналов и изображений.

Тема 2 Восстановление оригинала по изображению

Свертка функций. Умножение изображений. Интеграл Дюамеля. Теоремы разложения. Обращение преобразования Лапласа. Формула Римана-Меллина. Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье. Формула обращения.

Тема 3 Приложение операционного исчисления

Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений. Примеры решения дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа. Применение операционного исчисления к решению систем дифференциальных уравнений. Примеры решения систем дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа. Использование операционного исчисления в электротехнике. Переходные значения тока и напряжений в цепи.