– в результате игры каждый студент получает оценку, состоящую из баллов, полученных за составленное задание, за работу в паре, четверке, восьмерке.

Деловая игра «Карусель» по теме Интеграл Фурье

Ц е л ь :

– сочетать работу в парах;

– усвоить теоретический материал.

К о л и ч е с т в о у ч а с т н и к о в : до 30 человек.

В р е м я п р о в е д е н и я : 45 минут

П р о в е д е н и е :

Шаг 1 Преподаватель предлагает студентам самостоятельно изучить тему «Интеграл Фурье», подробно разобрать доказательства свойств интеграла Фурье, воспользовавшись литературой, приведенной в списке литературы данного пособия.

Шаг 2 По просьбе педагога студенты случайным образом разбиваются на 2 группы. Студенты садятся друг напротив друга, образуя 2 круга – внешний и внутренний. Таким образом у каждого студента есть партнер для общения.

Шаг 3 Преподаватель формулирует одно из свойств интеграла Фурье, предлагает студентам в течение нескольких минут доказать его друг другу.

Шаг 4 Студенты внешнего круга перемещаются на один стул по ходу часовой стрелки и образуют новые пары, в которых снова проводится доказательство того же свойства.

Шаг 5 Студенты внутреннего круга перемечаются на один стул против часовой стрелки. Вновь образуются новые пары. Итак далее несколько раз.

Шаг 6 Предлагается для доказательства следующее свойство интеграла Фурье с последующим выполнение шагов 3, 4, 5.

Шаг 7 После рассмотрения всех свойств интеграла Фурье, преподаватель делит студентов на несколько групп, предлагает каждой группе сформулировать и записать доказательство отдельных свойств (заранее выбранных преподавателем), проводит оценивание записанных доказательств.

а) $f(x)=\begin{cases}\sin x \text{ при } |x|<\pi,\\ 0 \text{ при } |x|\ge\pi,\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}1+x \text{ при } -1<x\le 0,\\ 1-x \text{ при } 0<x\le 1,\\ 0 \text{ при } |x|\ge 1.\end{cases}$

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Используя интегралы Эйлера, вычислить $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Р е ш е н и е . Имеем

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{t},\ t>0,\\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{t}},\\ x=0\Rightarrow t=0,\\ x=2\Rightarrow t=1\end{array}\right]=\int\limits_0^1 4t\cdot\frac{\sqrt{4-4t}}{\sqrt{t}}\,dt=$$

$$=8\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}}\cdot(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt=8\cdot\mathrm{B}\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)=8\cdot\frac{\Gamma(3/2)\cdot\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)}=$$

$$=8\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}=8\cdot\frac{\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}}{2!}=\pi\ .$$

2 Найти косинус- и синус- преобразования Фурье функции $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$, и обратные к ним.

Р е ш е н и е . Функция $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$, – гладкая и абсолютно интегрируемая на интервале $[0;\infty)$. Следовательно, для нее существуют косинус- и синус- преобразования Фурье:

$$F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-t}\cos yt dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-t}\cos yt\Big|_0^B-u\int\limits_0^B e^{-t}\sin yt dt\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-B}\cos yB+1-u\left(-e^{-t}\sin yt\Big|_0^B+u\int\limits_0^B e^{-t}\cos yt dt\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-y^2\int\limits_0^\infty e^{-t}\cos yt dt\right).$$

Отсюда $F_c(y)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{1+y^2}$.

Аналогично получим

$$F_s\left(y\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t}\sin ytdt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{y^2+1}.$$

Обратные косинус- и синус -преобразования Фурье равны:

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos yx}{y^2+1}dy, \qquad e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{y\sin yx}{y^2+1}dy.$$

Деловые игры

Деловая игра «$1\times 2\times 4\times 8$» по теме «Приложения двойных интегралов»

Цель:

– совместить индивидуальную и групповую работу;

– развить умение принимать групповое решение;

– выработать навыки использования двойных интегралов при решении геометрических и физических задач.

Количество участников: до 24 человек.

Проведение:

Шаг 1 Преподаватель заранее предлагает студентам подобрать и решить по 5 задач.

Шаг 2 По просьбе педагога студенты случайным образом разбиваются на 2 группы, в рамках каждой группы рассчитываются на первый-двенадцатый и объединяются в пары: «первый» номер из 1-ой группы с «первым» из 2-ой группы, «второй» номер из 1-ой группы со «вторым» из 2-ой группы и так далее. Студенты в парах обмениваются заданиями и решают. Затем они сверяют полученные решения с готовыми ответами и выставляют друг другу оценки.

Шаг 3 Из имеющихся заданий каждая пара составляет новое задание из 5 задач и обменивается ими с другой случайным образом выбранной парой. Сверяя полученные решения с правильными ответами, каждая пара оценивает соответствующую ей пару.

Шаг 4 Завершив работу по парам, студенты объединяются в «четверки», чтобы выработать новое задание и продолжить процесс дальше.

Шаг 5 На данном этапе «четверки» объединяются в «восьмерки» (всего три группы). Преподаватель предлагает каждой группе по одной новой задаче. В результате обсуждения студенты должны выработать решение. Затем педагог предоставляет слово каждой группе с целью презентации полученного результата.

Примечание:

– преподавателю необходимо четко определить количество времени для проведения каждого этапа;

– желательно контролировать каждый этап;

– задания не должны быть сложными, чтобы студенты могли в течении отведенного времени их решить;

– работу можно остановить на этапе «четверок», если процесс решения задач занимает много времени;

10.9 $\vec{a} = y\vec{i} + (1-x)\vec{j} - z\vec{k}$.

10.10 $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$.

10.11 $\vec{a} = 4x\vec{i} + 2\vec{j} - xy\vec{k}$.

10.12 $\vec{a} = 2y\vec{i} - 3x\vec{j} + z^2\vec{k}$.

10.13 $\vec{a} = -3z\vec{i} + y^2\vec{j} + 2y\vec{k}$.

10.14 $\vec{a} = 2y\vec{i} + 5x\vec{j} + 3z\vec{k}$.

10.15 $\vec{a} = 2y\vec{i} + 2xz\vec{j} - 2yz\vec{k}$.

10.16 $\vec{a} = (x-y)\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$.

10.17 $\vec{a} = xz\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k}$.

10.18 $\vec{a} = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} - x^2\vec{k}$.

10.19 $\vec{a} = 4x\vec{i} - yz\vec{j} + x\vec{k}$.

10.20 $\vec{a} = -y\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

10.21 $\vec{a} = y\vec{i} + 3x\vec{j} + z^2\vec{k}$.

10.22 $\vec{a} = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + y^2\vec{k}$.

10.23 $\vec{a} = xy\vec{i} - yz\vec{j} - xz\vec{k}$.

10.24 $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 3z^2\vec{k}$.

10.25 $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + 2z\vec{k}$.

10.26 $\vec{a} = x^2\vec{i} + yz\vec{j} + 2z\vec{k}$.

10.27 $\vec{a} = y\vec{i} - 2x\vec{j} + z^2\vec{k}$.

10.28 $\vec{a} = 3z\vec{i} - 2y\vec{j} + 2y\vec{k}$.

10.29 $\vec{a} = (x+y)\vec{i} - x\vec{j} + 6\vec{k}$.

10.30 $\vec{a} = 4\vec{i} + 3x\vec{j} + 3xz\vec{k}$.

Тестовые задания для рубежного контроля

Тест 1 Предел и непрерывность функции многих переменных

Вариант 1

1 Расстояние между точками в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется равенством: ________________________.

2 Окрестностью точки $(1;1)$ является множество:

а) $(1;2)\times(1;1)$; б) $[0;2]\times[0;2]$; в) $(0;2)\times(0;2)$.

3 Всякая ли непрерывная функция на $[a;b]$ является ограниченной на нем? _______________.

4 Является ли непрерывной в точке $(0;0)$ функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0?\end{cases}$$ _______________.

5 Является ли ограниченной функция $f(x;y)=\dfrac{x^2}{x^2+y}$ в области определения? ____________________.

6 Предел последовательности $\left(\dfrac{\sin n}{n};\dfrac{n}{2^n};\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ равен:

а) $(1;1;0)$, б) $(0;0;0)$, в) $(1;0;0)$.

7 Предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ равен:

а) 0, б) ∞, в) 1.

8 Повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\pi x+y^2}$ равен:

а) 1, б) π, в) $\dfrac{2}{\pi}$.

9 Областью определения функции $f(x;y)=\dfrac{1}{\sin xy}$ является:

а) $\mathbb{R}^2\backslash\{(0;0)\}$, б) $\mathbb{R}^2\backslash\{\,(x;y)\mid\ x=\pi n,\ y=\pi n,\ n\in\mathbb{N}\ \}$,

в) $\mathbb{R}^2\backslash\{\,(x;y)\mid\ xy=\pi n,\ n\in\mathbb{N}\ \}$.

10 Является ли функция $f(x;y)=\sin xy$ равномерно непрерывной на отрезке [0.1]? _________________.

Вариант 2

1 Длина вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется равенством: _________________________.

2 Окрестностью точки $(-1;1)$ является множество:

а) $(-1;2)\times(-1;1)$; б) $[-2;0]\times[-2;0]$; в) $(-2;0)\times(-2;0)$.

3 Всякая ли ограниченная функция является непрерывной? _______________.

4 Является ли непрерывной в точке $(0;0)$ функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{при } x^2+y^2<1,\\ 0 & \text{при } x^2+y^2\geq 1?\end{cases}$$ _______________.

5 Является ли ограниченной функция $f(x;y)=\arccos xy$ в области определения? ____________________.

6 Предел последовательности $\left(\dfrac{(-1)^n-n}{n^2};\dfrac{n}{3^n};\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ равен:

а) $(0;0;0)$, б) $(1;1;0)$, в) $(1;0;0)$.

7 Предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4-x^3y+y^2}$ равен:

а) ∞, б) 0, в) 1.

8 Повторный предел $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin\pi x}{2x+y^2}$ равен:

а) 1, б) $\dfrac{\pi}{2}$, в) $\dfrac{2}{\pi}$.

9 Областью определения функции $f(x;y)=\dfrac{1}{\sin(x+y)}$ является:

а) $\mathbb{R}^2\backslash\{(0;0)\}$, б) $\mathbb{R}^2\backslash\{\,(x;y)\mid x+y=\dfrac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{N}\,\}$,

в) $\mathbb{R}^2\backslash\{\,(x;y)\mid x+y=\pi n,\ n\in\mathbb{N}\,\}$.

9.19

$\vec a=(y-z)\vec i+(z-x)\vec j+(x-y)\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=3\cos t,\ \ y=3\sin t,\\ z=2(1-\cos t).\end{cases}$

9.20

$\vec a=2y\vec i-z\vec j+x\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=\sin t,\\ z=4-\cos t-\sin t.\end{cases}$

9.21

$\vec a=xz\vec i+x\vec j+z^2\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=\sin t,\\ z=\sin t.\end{cases}$

9.22

$\vec a=-x^2y^3\vec i+3\vec j+y\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=\sin t.\\ z=5.\end{cases}$

9.23

$\vec a=7z\vec i-x\vec j+yz\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=6\cos t,\ \ y=6\sin t,\\ z=1/3.\end{cases}$

9.24

$\vec a=xy\vec i+x\vec j+y^2\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=\sin t,\\ z=\sin t.\end{cases}$

9.25

$\vec a=(y-z)\vec i+(z-x)\vec j+(x-y)\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\\ z=3(1-\cos t).\end{cases}$

9.26

$\vec a=x\vec i-z^2\vec j+y\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ \ y=3\sin t,\\ z=4\cos t-3\sin t-3.\end{cases}$

9.27

$\vec a=-2z\vec i-x\vec j+x^2\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=(\cos t)/3,\ \ y=(\sin t)/3,\\ z=8.\end{cases}$

9.28

$\vec a=x\vec i-3z^2\vec j+y\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=4\sin t,\\ z=2\cos t-4\sin t+3.\end{cases}$

9.29

$\vec a=x\vec i-2z^2\vec j+y\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=4\sin t.\\ z=6\cos t-4\sin t+1.\end{cases}$

9.30

$\vec a=-x^2y^3\vec i+4\vec j+x\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\\ z=4.\end{cases}$

10 Найти дивергенцию векторного поля $\vec a$:

10.1 $\vec a=(x^2-y)\vec i+x\vec j+\vec k$.

10.2 $\vec a=zx\vec i-\vec j+y\vec k$.

10.3 $\vec a=yz\vec i+2xz\vec j+xy\vec k$.

10.4 $\vec a=x\vec i+yz\vec j-x\vec k$.

10.5 $\vec a=(x-y)\vec i+x\vec j-z\vec k$.

10.6 $\vec a=y\vec i-x\vec j+z^2\vec k$.

10.7 $\vec a=yz\vec i+2xz\vec j+y^2\vec k$.

10.8 $5\vec a=xy\vec i+yz\vec j+xz\vec k$.

9.5

$\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(z-y)\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=4\cos t,\ \ y=4\sin t,\\ z=1-\cos t.\end{cases}$

9.6

$\vec{a}=2y\vec{i}-3x\vec{j}+x\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\\ z=2-2\cos t-2\sin t.\end{cases}$

9.7

$\vec{a}=2z\vec{i}-x\vec{j}+y\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\\ z=1.\end{cases}$

9.8

$\vec{a}=y\vec{i}+-x\vec{j}+z\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=\sin t,\\ z=3.\end{cases}$

9.9

$\vec{a}=x\vec{i}+z^2\vec{j}+y\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=2\sin t,\\ z=2\cos t-2\sin t-1.\end{cases}$

9.10

$\vec{a}=3y\vec{i}-3x\vec{j}+x\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=3\cos t,\ \ y=3\sin t,\\ z=3-3\cos t-3\sin t.\end{cases}$

9.11

$\vec{a}=-x^2y^3\vec{i}+2\vec{j}+xz\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\ \ y=\sqrt{2}\sin t,\\ z=1.\end{cases}$

9.12

$\vec{a}=6z\vec{i}-x\vec{j}+xy\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=3\cos t,\ \ y=3\sin t,\\ z=3.\end{cases}$

9.13

$\vec{a}=z\vec{i}+y^2\vec{j}-x\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\ \ y=2\sin t,\\ z=\sqrt{2}\cos t.\end{cases}$

9.14

$\vec{a}=x\vec{i}+2z^2\vec{j}+y\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=3\sin t,\\ z=2\cos t-3\sin t-2.\end{cases}$

9.15

$\vec{a}=x\vec{i}-\frac{1}{3}z^2\vec{j}+y\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=(\cos t)/2,\ \ y=(\sin t)/3,\\ z=\cos t-(\sin t)/3-1/4.\end{cases}$

9.16

$\vec{a}=4y\vec{i}-3x\vec{j}+x\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=4\cos t,\ \ y=4\sin t,\\ z=4-4\cos t-4\sin t.\end{cases}$

9.17

$\vec{a}=-z\vec{i}-x\vec{j}+zx\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=5\cos t,\ \ y=5\sin t,\\ z=4.\end{cases}$

9.18

$\vec{a}=z\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\\ z=0.\end{cases}$

10 Является ли функция $f(x;y)=\dfrac{x^3}{x^2+y}$ равномерно непрерывной на отрезке [0.1]? ________________.

Тест 2 Дифференцирование функции многих переменных

Вариант 1

1 Условие дифференцируемости функции $f(x_1;x_2;...;x_n)$ в точке $(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ имеет вид ________________________.

2 Всякая ли дифференцируемая функция в точке непрерывна этой точке?

3 Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ функции $f(x;y)$, где $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, находятся по формулам: ______________?

4 Функция Лагранжа для существования условного экстремума функции $f(x;y)$ удовлетворяет условиям:

а) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=1$;

б) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0$;

в) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial L}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=1$.

5 Частные производные 1-го порядка функции $f(x;y)=x^y$ равны:

а) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$;

б) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^y\ln y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=yx^{y-1}$;

в) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y$.

6 Дифференциал 1-го порядка функции $f(x;y)=\operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}$ равен:

а) $df=\dfrac{ydy-xdx}{x^2+y^2}$; б) $df=\dfrac{ydy+xdx}{x^2+y^2}$; в) $df=\dfrac{ydy-xdx}{x^2-y^2}$.

7 Дифференциал 2-го порядка функции $f(x;y)=x^2y^3$ равен ________________.

8 Уравнение касательной плоскости к графику функции $x^2+y^2-z^2=0$ в точке $A(3;4;5)$ имеет вид:

а) $-3x+4y-5z=0$; б) $3x+4y-5z=0$; в) $3x+4y+5z=0$.

9 Минимальное значение функции $f(x;y)=x^2+xy+y^2-13x-11y+7$ равно ________.

10 Значение выражения $(1{,}02)^3(0{,}97)^2$ приближенно равно ______________.

Вариант 2

1 По определению частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ функции $f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ в точке $(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0)$ равна ______________________.

2 Всякая ли непрерывная функция в точке дифференцируема этой точке?

3 Частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $F(x;y;z)=0$ находятся по формулам: ______________?

4 Формула Тейлора для функция $f(x;y)$ имеет вид:

а) $f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta)$;

б) $f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x,y)$;

в) $f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{n!}d^nf(\xi,\eta)$.

5 Частные производные 1-го порядка функции $f(x;y)=\sin xy$ равны:

а) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-y\cdot\sin xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x\sin xy$;

б) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=x\cdot\cos xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\cos xy$;

в) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\cos xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\cos xy$.

8.23

$\vec F=x^2y\,\vec i-xy^2\vec j$,

$L:\ x^2+y^2=4\ (x\ge 0,\ \ y\ge 0)$,

$M(2{,}0),\ N(0{,}2)$.

8.24

$\vec F=(xy-y^2)\vec i-x\,\vec j$,

$L:\ y=2x^2$,

$M(0{,}0),\ N(1{,}2)$.

8.25

$\vec F=(y^2-y)\vec i+(2x+y)\vec j$,

$L:\ x^2+y^2=9\ (\ \ y\ge 0)$,

$M(3{,}0),\ N(-3{,}0)$.

8.26

$\vec F=x\,\vec i+y\,\vec j$,

L: отрезок MN,

$M(1{,}0),\ N(0{,}3)$.

8.27

$\vec F=-x\,\vec i+y\,\vec j$,

$L:\ x^2+\dfrac{y^2}{9}=1(x\ge 0,\ \ y\ge 0)$,

$M(1{,}0),\ N(0{,}3)$.

8.28

$\vec F=(xy-x)\vec i-\dfrac{x^2}{2}\vec j$,

$L:\ y=2\sqrt{x}$,

$M(0{,}0),\ N(1{,}2)$.

8.29

$\vec F=(x^2-y^2)\vec i+(x^2+y^2)\vec j$,

$L:\ x^2/4+y^2/4=1(y\ge 0)$,

$M(0{,}0),\ N(1{,}2)$.

8.30

$\vec F=-y\,\vec i+x\,\vec j$,

$L:\ y=x^3$,

$M(0{,}0),\ N(2{,}8)$.

9 Найти циркуляцию векторного поля $\vec a$ вдоль контура Γ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t):

9.1

$\vec a=y\vec i-x\vec j+z^2\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt2/2\cos t,\ \ y=\sqrt2/2\cos t,\\ z=\sin t.\end{cases}$

9.2

$\vec a=-x^2y^3\vec i+\vec j+z\,\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt[3]{4}\cos t,\ \ y=\sqrt[3]{4}\sin t,\\ z=3.\end{cases}$

9.3

$\vec a=(y-z)\vec i+(z-x)\vec j+(z-y)\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=\sin t,\\ z=2(1-\cos t).\end{cases}$

9.4

$\vec a=x^2\vec i+y\,\vec j-z\,\vec k$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=(\sqrt2\sin t)/2,\\ z=(\sqrt2\cos t)/2.\end{cases}$

8.9

$\vec F=(x+y)\vec i+(x-y)\vec j,$

$L:\ x^2+\frac{y^2}{9}=1\ (x\ge 0,\ \ y\ge 0),$

$M(1,0),\ \ N(0,3).$

8.10

$\vec F=y\vec i-x\vec j,$

$L:\ x^2+y^2=1\ (y\ge 0),$

$M(1,0),\ \ N(-1,0).$

8.11

$\vec F=(x^2+y^2)\vec i+(x^2-y^2)\vec j,$

$L:\begin{cases}x, \text{ при } \ 0\le x\le 1,\\ 2-x, \text{ при } \ 1\le x\le 2,\end{cases}$

$M(2,0),\ \ N(0,0).$

8.12

$\vec F=y\vec i-x\vec j,$

$L:\ x^2+y^2=2\ (y\ge 0),$

$M(\sqrt2,0),\ \ N(-\sqrt2,0).$

8.13

$\vec F=xy\vec i+2y\vec j,$

$L:\ x^2+y^2=1\ (x\ge 0,\ y\ge 0),$

$M(1,0),\ \ N(0,1).$

8.14

$\vec F=(x^2+y^2)(\vec i+2\vec j),$

$L:\ x^2+y^2=R^2\ \ (y\ge 0),$

$M(R,0),\ \ N(-R,0).$

8.15

$\vec F=(x+y\sqrt{x^2+y^2})\vec i+(y-x\sqrt{x^2+y^2})\vec j,$

$L:\ x^2+y^2=1\ (x\ge 0,\ \ y\ge 0),$

$M(1,0),\ \ N(-1,0).$

8.16

$\vec F=x^3\vec i-y^3\vec j,$

$L:\ x^2+y^2=4,$

$M(2,0),\ N(0,2).$

8.17

$\vec F=(x+y\sqrt{x^2+y^2})\vec i+(y-x\sqrt{x^2+y^2})\vec j,$

$L:\ x^2+y^2=16\ (x\ge 0,\ \ y\ge 0),$

$M(4,0),\ N(0,4).$

8.18

$F=xy\vec i,$

$L:\ y=\sin x,$

$M(\pi,0),\ \ N(0,0).$

8.19

$\vec F=y^2\vec i-x^2\vec j,$

$L: x^2+y^2=9\ (x\ge 0, y\ge 0),$

$M(3,0),\ \ N(0,3).$

8.20

$\vec F=(x+y)^2\vec i-(x+y)^2\vec j,$

L: отрезок MN,

$M(1,0),\ \ N(0,1).$

8.21

$\vec F=x^2\vec i,$

$L:\ x^2+y^2=9\ (x\ge 0,\ \ y\ge 0),$

$M(3,0),\ \ N(0,3).$

8.22

$\vec F=(x+y)^2\vec i+y^2\vec j,$

L: отрезок MN,

$M(2,0),\ N(0,2).$

6 Дифференциал 1-го порядка функции $f(x;y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ равен:

а) $df=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$; б) $df=\frac{ydy+xdx}{x^2+y^2}$; в) $df=\frac{ydy-xdx}{x^2-y^2}$.

7 Дифференциал 2-го порядка функции $f(x;y)=x^3y^2$ равен ___________________.

8 Уравнение касательной плоскости к графику функции $2x^2+3y^2+4z^2=9$ в точке $A(1;-1;1)$ имеет вид:

а) $2x-3y+4z+9=0$; б) $2x-3y+4z-9=0$; в) $2x-3y+4z=0$.

9 Минимальное значение функции $f(x;y)=x^2+y^2-2x+4y+1$ равно ________.

10 Значение выражения $(1,02)^{3,01}$ приближенно равно _______________.

Тест 3 Криволинейные интегралы

Вариант 1

1 По определению криволинейный интеграл 2-го рода равен:

а) $\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$,

б) $\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$,

в) $\int\limits_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$.

2 Укажите верное равенство:

а) $\int\limits_{AB}f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(r(\varphi)\cos\varphi;r(\varphi)\sin\varphi)\cdot\sqrt{r(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$,

б) $\int\limits_{AB}f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(r(\varphi)\cos\varphi;r(\varphi)\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$,

в) $\int\limits_{AB}f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(r(\varphi)\cos\varphi;r(\varphi)\sin\varphi)\cdot\sqrt{1+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$.

3 Если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то $\int\limits_{AB}P(x;y)dx$ равен ________________________.

4 Интеграл $\int\limits_{AB} y^2 dl$, где $AB=\left\{(x,y)\ |\ x=2\cos t, y=2\sin t, 0\le t\le \frac{\pi}{2}\right\}$ равен:

а) 2π, б) π, в) 3π.

5 Интеграл $\int\limits_{AB} ydl$, где $AB=\left\{(x,y)\ |\ y^2=2x,\ 0\le x\le 2\right\}$, равен:

а) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}+1)$, б) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$, в) $\frac{1}{2}(5\sqrt{2}-1)$.

6 Интеграл $\int\limits_{AB} (x^2+y)dx+xydy$, где $AB=\left\{(x,y)\ |\ y=x,\ 0\le x\le 1\right\}$ равен:

а) $\frac{7}{6}$, б) $\frac{7}{5}$, в) $\frac{7}{3}$.

7 Интеграл $\int\limits_{AB} xdx+xydy$, где $AB=\left\{(x,y)\ |\ x^2+y^2=1, x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$ равен:

а) 1, б) $-\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{6}$.

8 Длина дуги $AB=\left\{(x,y,z)\ |\ x=t, y=\frac{\sqrt{2}}{2}t^2, z=\frac{1}{3}t^3,\ 0\le t\le 1\right\}$ равна ______________________.

9 Работа, произведенная силой $\vec{F}=4x^6\vec{i}+xy\vec{j}$ вдоль дуги $AB=\left\{(x,y)\ |\ y=x^3,\ 0\le x\le 1\right\}$ равна ___________________.

10 Масса материальной дуги кривой $y=x^2+1$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$, если линейная плотность в каждой точке дуги прямо пропорциональна абсциссе этой точки, равна ____________.

Вариант 2

1 По определению криволинейный интеграл 1-го рода равен:

а) $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k$,

б) $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k$,

в) $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k$.

2 Укажите верное равенство:

7.28 $\vec{a}=(3yz-x)\vec{i}+(x^2-y)\vec{j}+(6z-1)\vec{k}$,
$\Omega:\ \begin{cases} z^2=9(x^2+y^2), \\ z=3. \end{cases}$

7.29 $\vec{a}=(yz-2x)\vec{i}+(\sin x+y)\vec{j}+(x-2z)\vec{k}$,
$\Omega:\ \begin{cases} x+2y-3z=6, \\ x=0,\quad y=0.\quad z=0. \end{cases}$

7.30 $\vec{a}=(8x+1)\vec{i}+(zx-4y)\vec{j}+(e^x-z)\vec{k}$,
$\Omega:\ x^2+y^2+z^2=2y.$

8 Найти работу силы $\vec{F}=P(x;y)\vec{i}+Q(x;y)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии L от точки $M(x;y)$ к точке $N(x;y)$:

8.1
$\vec{F}=(x^2-2y)\vec{i}+(y^2-2x)\vec{j}$,
L: отрезок MN,
$M(-4,0)$, $N(0,2)$.

8.2
$\vec{F}=(x-y)\vec{i}+\vec{j}$,
L: $x^2+y^2=4\ (y\ge 0)$,
$M(2,0)$, $N(-2,0)$.

8.3
$\vec{F}=(x^2+2y)\vec{i}+(y^2+2x)j$,
L: отрезок MN,
$M(-4,0)$, $N(0,2)$.

8.4
$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+2x\vec{j}$,
L: $x^2+y^2=4(y\ge 0)$,
$M(2,0)$, $N(-2,0)$.

8.5
$\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}$,
L: $2x^2+y^2=1\ (y\ge 0)$,
$M(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $N(\frac{-1}{\sqrt{2}},0)$.

8.6
$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$,
L: $y=x^2$,
$M(-1,1)$, $N(1,1)$.

8.7
$\vec{F}=(2xy-y)\vec{i}+(x^2+x)\vec{j}$,
L: $x^2+y^2=9(y\ge 0)$,
$M(3,0)$, $N(-3,0)$.

8.8
$\vec{F}=x^2y\vec{i}-y\vec{j}$,
L: отрезок MN,
$M(-1,0)$, $N(0,1)$.

7.16 $\vec{a} = (x + y^2)\vec{i} + (xz + y)\vec{j} + (\sqrt{x^2+1} + z)\vec{k}$,

$\Omega:\quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 2, \quad z = 3.$

7.17 $\vec{a} = (e^y + 2x)\vec{i} + (xz - y)\vec{j} + (1/4)(e^{xy} - z)\vec{k}$,

$\Omega:\quad x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3.$

7.18 $\vec{a} = (\sqrt{z} + y)\vec{i} + 3x\,\vec{j} + (3z + 5x)\vec{k}$,

$\Omega:\quad z^2 = 8(x^2 + y^2), \quad z = 2.$

7.19 $\vec{a} = (8yz - x)\vec{i} + (x^2 - 1)\vec{j} + (xy - 2z)\vec{k}$,

$\Omega:\quad 2x + 3y - z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

7.20 $\vec{a} = (y + z^2)\vec{i} + (x^2 + 3y)\vec{j} + xy\,\vec{k}$,

$\Omega:\quad x^2 + y^2 + z^2 = 2x.$

7.21 $\vec{a} = (2yz - x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + (x^2 + z)\vec{k}$,

$\Omega:\quad x - y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

7.22 $\vec{a} = (\sin z + 2x)\vec{i} + (\sin x - 3y)\vec{j} + (\sin y + 2z)\vec{k}$,

$\Omega:\quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 3, \quad z = 6.$

7.23 $\vec{a} = (\cos z + x/4)\vec{i} + (e^x + y/4)\vec{j} + (z/4 - 1)\vec{k}$,

$\Omega:\quad x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3.$

7.24 $\vec{a} = (\sqrt{x} + 1 + x)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (\sin x + z)\vec{k}$,

$\Omega:\quad \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$

7.25 $\vec{a} = (5x - 6y)\vec{i} + (11x^2 + 2y)\vec{j} + (x^2 - 4z)\vec{k}$,

$\Omega:\quad \begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$

7.26 $\vec{a} = (y^2 + z^2 + 6x)\vec{i} + (e^z - 2y + x)\vec{j} + (x + y - z)\vec{k}$,

$\Omega:\quad \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 1, \quad z = 3. \end{cases}$

7.27 $\vec{a} = \dfrac{1}{2}(x + z)\vec{i} + \dfrac{1}{4}(xz + y)\vec{j} + (xy - 2)\vec{k}$,

$\Omega:\quad x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y + 4z - 8.$

а) $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_a^b f\left(x; y(x)\right) \cdot \sqrt{y^2(x) + y'^2(x)}\,dx$,

б) $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_a^b f\left(x; y(x)\right) \cdot \sqrt{1 + y'(x)}\,dx$,

в) $\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_a^b f\left(x; y(x)\right) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$.

3 Изменяется ли знак криволинейного интеграла 2-го рода при изменении направления пути интегрирования? __________________

4 Интеграл $\int\limits_{AB} xy^2 dl$, где $AB = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x = 3\cos t, y = 3\sin t, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$ равен:

а) $\dfrac{27}{4}$, б) 27, в) 28.

5 Интеграл $\int\limits_{AB} \sqrt{1 + x^2}\,dl$, где $AB = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 2y - x^2 = 0,\ 0 \le x \le 3 \right\}$, равен:

а) $\dfrac{32}{5}$, б) $\dfrac{32}{3}$, в) 32.

6 Интеграл $\int\limits_{AB} x^3 dx + x^2 dy$, где $AB = \left\{ (x,y) \;\middle|\; y = x^2, 1 \le x \le 3 \right\}$ равен:

а) 50, б) 60, в) 55.

7 Интеграл $\int\limits_{AB} y^2 dx + x^2 dy$ по дуге AB, где $AB = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x = t - \sin t, y - 1 - \cos t, 0 \le t \le 2\pi \right\}$ равен:

а) $\pi(5 - 2\pi)$, б) $\pi(5 + 2\pi)$, в) $5 - 2\pi$.

8 Длина дуги $AB = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t,\ 0 \le t \le 2\pi \right\}$ равна ______________________.

9 Работа, произведенная силой $\vec{F} = \left(x^2 + y\right)\vec{i} + \left(x + y^2\right)\vec{j}$ вдоль дуги $AB = \left\{ (x,y) \;\middle|\; y = x, -1 \le x \le 0 \right\}$ равна ___________________.

10 Масса материальной дуги кривой $3y = x^3$ между точками $A(0;0)$ и $B\left(1; \dfrac{1}{3}\right)$, если линейная плотность в каждой точке дуги прямо пропорциональна кубу абсциссы этой точки, равна __________________.

Тест 4 Двойной интеграл

Вариант 1

1 Укажите верную формулу

а) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$;

б) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dx$;

в) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b f(x,y)dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$.

2 Полярные координаты имеют вид:

а) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $-\infty < r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

б) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

в) $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

3 Укажите верное равенство

а) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{4}^{x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{y} f(x.y)dx$;

b) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x.y)dx$;

c) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{4}^{x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x.y)dx$ ·

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_1^6 dx \int\limits_{6/x}^{7-x} f(x,y)dy$:

а) $\int\limits_1^6 dy \int\limits_{6/y}^{7-y} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_{y/6}^{7-x} dy \int\limits_1^6 f(x,y)dx$;в) $\int\limits_{6/y}^{7-x} dy \int\limits_1^6 f(x,y)dx$.

5 Двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}dxdy$ по прямоугольнику $D = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2,\ 4 \le y \le 6\}$ равен:

а) 0,125; б) 0,115; в) 0,135.

7.3 $\vec{a} = (\ln y + 7x)\vec{i} + (\sin z - 2y)\vec{j} + (e^y - 2z)\vec{k}$,
$\Omega:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2.$

7.4 $\vec{a} = (\cos z + 3x)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + (3z - y^2)\vec{k}$,
$\Omega:\ z^2 = 36(x^2 + y^2),\quad z = 6.$

7.5 $\vec{a} = (e^{-z} - x)\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k}$,
$\Omega:\ 2x + y + z = 2,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0.$

7.6 $\vec{a} = (6x - \cos y)\vec{i} - (e^x + z)\vec{j} - (2y + 3z)\vec{k}$,
$\Omega:\ x^2 + y^2 = z^2,\quad z = 1,\quad z = 2.$

7.7 $\vec{a} = (4x - 2y^2)\vec{i} + (\ln z - 4y)\vec{j} + (x + 3z/4)\vec{k}$,
$\Omega:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3.$

7.8 $\vec{a} = (1 + \sqrt{z})\vec{i} + (4y - \sqrt{x})\vec{j} + xy\vec{k}$,
$\Omega:\ z^2 = 4(x^2 + y^2),\quad z = 3.$

7.9 $\vec{a} = (\sqrt{z} - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (y^2 - z)\vec{k}$,
$\Omega:\ 3x - 2y + z = 6,\quad x = 0.\quad y = 0.\quad z = 0.$

7.10 $\vec{a} = (yz + x)\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + (xy^2 + z)\vec{k}$,
$\Omega:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2z,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0.$

7.11 $\vec{a} = (e^{2y} + x)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + (y^2 + 3z)\vec{k}$,
$\Omega:\ x - y + z = 1,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0.$

7.12 $\vec{a} = (\sqrt{z} - 2x)\vec{i} + (e^x + 3y)\vec{j} + \sqrt{y + x}\,\vec{k}$,
$\Omega:\ x^2 + y^2 = z^2,\quad z = 2,\quad z = 5.$

7.13 $\vec{a} = (e^z + x/4)\vec{i} + (\ln x + y/4)\vec{j} + z/4\vec{k}$,
$\Omega:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 2z - 2.$

7.14 $\vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (z - 2y)\vec{j} + (1 + 2z)\vec{k}$,
$\Omega:\ z^2 = 4(x^2 + y^2),\quad z = 2.$

7.15 $\vec{a} = (e^y + 2x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (2z - 1)\vec{k}$,
$\Omega:\ x + 2y + z = 2,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0.$

6.17

$\vec a = \pi y\,\vec j + (1-2z)\,\vec k,$

$P:\quad x/4 + y/3 + z = 1.$

6.18

$\vec a = (5y+3)\,\vec j + 11\pi z\,\vec k,$

$P:\quad x + y/3 + 4z = 1.$

6.19

$\vec a = \pi x\,\vec i + 2\vec j + 2\pi z\,\vec k,$

$P:\quad x/2 + y/3 + z = 1.$

6.20

$\vec a = 4\pi x\,\vec i + 7\pi y\,\vec j + (2z+1)\,\vec k,$

$P:\quad 2x + y/3 + 2z = 1.$

6.21

$\vec a = 3\pi x\,\vec i + 6\pi y\,\vec j + 10\,\vec k,$

$P:\quad 2x + y + z/3 = 1.$

6.22

$\vec a = \pi x\, i - 2y\,\vec j + \vec k,$

$P:\quad 2x + y/6 + z = 1.$

6.23

$\vec a = (21\pi - 1)\,\vec i + 62\pi y\,\vec j + (1-2\pi z)\,\vec k,$

$P:\quad 8x + y/2 + z/3 = 1.$

6.24

$\vec a = \pi x\,\vec i + 2\pi y\,\vec j + 2\vec k,$

$P:\quad x/2 + y/4 + z/3 = 1.$

6.25

$\vec a = 9\pi x\,\vec i + 2\pi y\,\vec j + 8\vec k,$

$P:\quad 2x + 8y + z/3 = 1.$

6.26

$\vec a = 7\pi x\,\vec i + (4y+1)\,\vec j + 2\pi z\,\vec k,$

$P:\quad x/3 + 2y + z = 1.$

6.27

$\vec a = (\pi - 1)x\,\vec i + 2\pi y\,\vec j + (1-\pi z)\,\vec k,$

$P:\quad x/4 + y/2 + z/3 = 1.$

6.28

$\vec a = 6\pi x\,\vec i + 3\pi y\,\vec j + 10\vec k,$

$P:\quad 2x + y/2 + z/3 = 1.$

6.29

$\vec a = \dfrac{\pi}{2}x\,\vec i + \pi y\,\vec j + (4-2z)\,\vec k,$

$P:\quad x + y/3 + z/4 = 1.$

6.30

$\vec a = 7\pi x\,\vec i + 4\pi y\,\vec j + 2(z+1)\,\vec k,$

$P:\quad x/3 + y/4 + z = 1.$

7 Найти поток векторного поля $\vec a$ через замкнутую поверхность Ω (нормаль внешняя):

7.1 $\vec a = (e^z + 2x)\vec i + e^x\vec j + e^y\vec k,$
$\Omega:\quad x + y + z = 1,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0.$

7.2 $\vec a = (3z^2 + x)\vec i + (e^x - 2y)\vec j + (2z - xy)\vec k,$
$\Omega:\quad x^2 + y^2 = z^2,\quad z = 1,\quad z = 4.$

6 Двойной интеграл $\iint\limits_G (x+2y)dxdy$ по области G, ограниченной прямыми $y = 4x + 6$, $y = \dfrac{1}{2}x - 1$, $x = -1$ равен:

а) $-4\dfrac{1}{10}$; б) $-4\dfrac{1}{12}$; в) $-4\dfrac{1}{14}$.

7 Двойной интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ равен:

а) 12π; б) 6π; в) $\dfrac{16\pi}{3}$.

8 Объем тела, ограниченного поверхностями $x + 2y - z = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $x = -1$, $x = 3$, $z = 0$ равен: ____________________.

9 Масса плоской пластинки ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$) с плотностью $\rho(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ равна: __________________.

10 Площадь фигуры, ограниченная линиями $(x^2+y^2)^2 = 8(x^2-y^2)$, $x^2 + y^2 = 4$ равна ______________________.

Вариант 2

1 Укажите верную формулу

а) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G^*} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,J\,dudv$;

б) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_G f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|\,dudv$;

в) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G^*} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,|J|\,dudv$.

2 Якобиан перехода от декартовых координат к полярным равен:

а) $J = r^2$; б) $J = r$; в) $J = r\sin\varphi$.

3 Укажите верное равенство

а) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^{3/2}}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y^{2/3}}^{y^{2/3}} f(x.y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^{3/2}}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y^{2/3}}^{y^{2/3}} f(x.y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$;

c) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^{2/3}}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y^{2/3}}^{y^{2/3}} f(x.y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$.

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_1^c dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)dy$:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_e^{e^y} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_0^{\ln x} dy \int\limits_e^{e^y} f(x,y)dx$; в) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.

5 Двойной интеграл $\iint\limits_D x\,y^2\,dxdy$ по прямоугольнику $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ равен:

а) 1,5; б) 0,5; в) 1/3.

6 Двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ по области G, ограниченной прямыми $y = x$, $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ равен:

а) 5; б) 7; в) 3.

7 Двойной интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2\le 16} \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$ равен:

а) 2π; б) 4π; в) π.

8 Объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$ равен: ____________________.

9 Масса плоской пластинки ограниченной линиями $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=0$, $4x-y=0$ с плотностью $\rho(x,y)=(x+y)^2$ равна: _________________.

10 Площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2 = 3(x^3-3xy^2)$ равна ______________________.

Тест 5 Тройной интеграл

Вариант 1

1 Укажите верную формулу

а) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$;

6 Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz):

6.1

$\vec{a} = 7x\vec{i} + (5\pi y+2)\vec{j} + 4\pi z\vec{k}$,

$P:\ x + y/2 + 4z = 1$.

6.2

$\vec{a} = 9\pi x\vec{i} + j + 3z\vec{k}$,

$P:\ x/3 + y + z = 1$.

6.3

$\vec{a} = 2\pi x\vec{i} + (7y+2)\vec{j} + 7\pi z\vec{k}$,

$P: x + y/2 + z/3 = 1$.

6.4

$\vec{a} = (2x+1)\vec{i} + y\vec{j} + 3\pi z\vec{k}$,

$P:\ x/3 + y + 2z = 1$.

6.5

$\vec{a} = 7x\vec{i} + 9\pi y\vec{j} + \vec{k}$,

$P:\ x + y/3 + z = 1$.

6.6

$\vec{a} = \vec{i} + 5y\vec{j} + 11\pi z\vec{k}$,

$P:\ x + y + z/3 = 1$.

6.7

$\vec{a} = 5\pi x\vec{i} + (9y+1)\vec{j} + 4\pi z\vec{k}$,

$P:\ x/2 + y/3 + z/2 = 1$.

6.8

$\vec{a} = x\vec{i} + (\pi z - 1)\vec{k}$,

$P:\ 2x + y/2 + z/3 = 1$.

6.9

$\vec{a} = 2\vec{i} - y\vec{j} + \frac{3\pi z}{2}\vec{k}$,

$P:\ x/3 + y + z/4 = 1$.

6.10

$\vec{a} = 9\pi x\vec{i} + (5y+1)\vec{j} + 2\pi z\vec{k}$,

$P:\ 3x + y + z/9 = 1$.

6.11

$\vec{a} = 7\pi x\vec{i} + 2\pi y\vec{j} + (7z+2)\vec{k}$,

$P:\ x + y + z/2 = 1$.

6.12

$\vec{a} = \pi y\vec{j} + (4z-2)\vec{k}$,

$P:\ 2x + y/3 + z/4 = 1$.

6.13

$\vec{a} = (3\pi-1)x\vec{i} + (9\pi y+1)\vec{j} + 6\pi z\vec{k}$,

$P:\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{9} = 1$.

6.14

$\vec{a} = \pi x\vec{i} + \frac{\pi}{2}y\vec{j} + (4z-2)\vec{k}$,

$P:\ x + y/3 + z/4 = 1$.

6.15

$\vec{a} = (27\pi-1)\vec{i} + (34\pi y+3)\vec{j} + 20\pi z\vec{k}$,

$P:\ 3x + y/9 + z = 1$.

6.16

$\vec{a} = 9\pi y\vec{j} + (7z+1)\vec{k}$,

$P:\ x + y + z = 1$.

5.9 $x+y=6, x=\sqrt{3y}, z=4x/5, z=0.$

5.10 $x=19\sqrt{2y}, x=4\sqrt{2y}, z=0, z+y=2.$

5.11 $x^2+y^2=8, x=\sqrt{2y}, x=0, \ z=30y/11, z=0.$

5.12 $x+y=4, x=\sqrt{2y}, z=3x/5, z=0.$

5.13 $y=6\sqrt{3x}, y=\sqrt{3x}, z=0, x+z=3.$

5.14 $y=\dfrac{5}{6}\sqrt{x}, y=\dfrac{5}{18}x, z=0, z=\dfrac{5}{18}(3+\sqrt{x}).$

5.15 $x^2+y^2=18, y=\sqrt{3x}, y=0, z=0, z=5x/11.$

5.16 $x+y=6, y=\sqrt{3x}, z=4y, z=0.$

5.17 $x=7\sqrt{3y}, x=2\sqrt{3y}, z=0, z+y=3.$

5.18 $x=5\sqrt{y/3}, x=5y/9, z=0, z=5(3+\sqrt{y})/9.$

5.19 $x^2+y^2=18, x=\sqrt{3y}, x=0, z=0, z=10y/11.$

5.20 $x=17\sqrt{2y}, x=2\sqrt{2y}, z=0, z+y=1/2.$

5.21 $y=\sqrt{15x}, y=\sqrt{15x}, z=0, z=\sqrt{15}(1+\sqrt{x}).$

5.22 $x^2+y^2=50, y=\sqrt{5x}, y=0, z=0, z=3x/11.$

5.23 $x+y=8, y=\sqrt{4x}, z=3y, z=0.$

5.24 $x=16\sqrt{2y}, x=\sqrt{2y}, z+y=2, z=0.$

5.25 $x=15\sqrt{y}, x=15y, z=0, z=15(1+\sqrt{y}).$

5.26 $x^2+y^2=50, x=\sqrt{5y}, x=0, z=0, z=6y/11.$

5.27 $x^2+y^2=2y, z=\dfrac{13}{4}-x \ , z=0.$

5.28 $x^2+y^2=2y, z=\dfrac{9}{4}-x^2, z=0.$

5.29 $x^2+y^2=8\sqrt{2x}, z=x^2+y^2-64, z=0, (z\geq 0).$

5.30 $x^2+y^2=2y, z=5/4-x^2, z=0.$

б) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dz\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dy$;

в) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_a^b f(x,y,z)\,dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dz$.

2 Сферические координаты имеют вид:

а) $x=r\cos\theta\sin\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\varphi$, $0\leq r<+\infty$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $0\leq\theta\leq\pi$;

б) $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $0\leq r<+\infty$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $0\leq\theta\leq\pi$;

в) $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $-\infty<r<+\infty$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $0\leq\theta\leq\pi$.

3 Укажите верное равенство

а) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{x+y}f(x,y,z)dz=\int\limits_0^1 dy\left\{\int\limits_0^y dz\int\limits_0^{1-z}f(x,y,z)dx+\int\limits_x^1 dz\int\limits_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dx\right\}$;

б) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{x+y}f(x,y,z)dz=\int\limits_0^1 dz\left\{\int\limits_0^z dy\int\limits_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dx+\int\limits_x^1 dy\int\limits_0^{1-y}f(x,y,z)dx\right\}$;

в) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{x+y}f(x,y,z)dz=\int\limits_0^1 dy\left\{\int\limits_0^y dz\int\limits_0^{1-z}f(x,y,z)dx+\int\limits_x^1 dz\int\limits_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dx\right\}$.

4 Повторный интеграл $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}(x+y+z)dz$ равен:

а) 0,125; б) 0,15; в) 0,25.

5 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q(6x+8y+4z+5)dxdydz$ по кубу $Q=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1, 0\leq z\leq 1\right\}$ равен:

а) 10; б) 14; в) 15.

6 Объем тела, ограниченного поверхностями $2y+3z=6$, $x=0$, $x=4$, $y=0$, $z=0$, равен ______________________.

7 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ по области, ограниченной поверхностями $y^2+z^2=4$, $x=0$, $x=2$, равен:

а) $\dfrac{40\pi}{3}$; б) $\dfrac{80\pi}{9}$; в) $\dfrac{80\pi}{3}$.

8 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dxdydz$ по области, ограниченной поверхностью $x^2+y^2+z^2=9$, $z\ge 0$, равен:

а) $\dfrac{81\pi}{2}$; б) $\dfrac{27\pi}{2}$; в) 243π.

9 Масса тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=2$, с плотностью $\rho(x,y,z)=(x^2+y^2+z)^2$ равна _____________.

10 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 dxdydz$ по области Q, ограниченной поверхностью $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ равен:

а) $\dfrac{4\pi abc}{7}$; б) $\dfrac{\pi abc}{4}$; в) $\dfrac{3\pi abc}{4}$.

Вариант 2

1 Укажите верную формулу

а) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{Q^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)|J|\,dudvdw$;

б) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{Q^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)dudvdw$;

в) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{Q^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)J\,dudvdw$.

2 Цилиндрические координаты имеют вид:

а) $x=r\sin\varphi$, $y=r\cos\varphi$, $z=r$, $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$;

б) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $-\infty<r<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$;

в) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

3 Укажите верное равенство

а) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz=\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{|y|}^{y}dx\int\limits_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}}f(x,y,z)dz$;

б) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz=\int\limits_{0}^{1}dz\int\limits_{-z}^{z}dy\int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx$;

в) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz=\int\limits_{0}^{1}dz\int\limits_{-1}^{z}dy\int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{1}f(x,y,z)dx$.

4.17 D: $x^2+y^2/25\le 1$, $y\ge 0$, $\rho=7x^4y$.

4.18 D: $x^2+y^2/9\le 1$, $y\ge 0$, $\rho=35x^4y^3$.

4.19 D: $x^2/4+y^2/9\le 1$, $\rho=x^2$.

4.20 D: $1\le x^2+y^2/16\le 9$, $y\le 0, y\le 4x$, $\rho=y/x^3$.

4.21 D: $x^2/9+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $\rho=11xy^8$.

4.22 D: $1\le x^2/4+y^2/16\le 5$, $x\ge 0, y\ge 2x$, $\rho=x/y$.

4.23 D: $1\le x^2/9+y^2/4\le 5$, $x\ge 0, y\ge 2x/3$, $\rho=x/y$.

4.24 D: $x^2/4+y^2/9\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=x^5y$.

4.25 D: $x^2/4+y^2/25\le 1$, $\rho=x^4$.

4.26 D: $x^2+y^2/16\le 9$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=15x^5y^3$.

4.27 D: $1\le x^2/4+y^2/9\le 36$, $x\ge 0, y\ge \dfrac{3}{2}x$, $\rho=9x/y^3$.

4.28 D: $x^2/100+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=6xy^9$.

4.29 D: $x^2/16+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=105x^3y^9$.

4.30 D: $1\le x^2/9+y^2/16\le 2$, $y\ge 0, y\le \dfrac{4}{3}x$, $\rho=27y/x^5$.

5 Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

5.1 $x+y=4, y=\sqrt{2x}, z=3y, z=0.$

5.2 $y=16\sqrt{2x}, y=\sqrt{2x}, z=0, x+z=2.$

5.3 $x^2+y^2=2, y=\sqrt{x}, y=0, z=0, z=15x.$

5.4 $y=5\sqrt{x}, y=5x/3, z=0, z=5+5\sqrt{x/3}.$

5.5 $x+y=2, y=\sqrt{x}, z=12y, z=0.$

5.6 $x=20\sqrt{2y}, x=5\sqrt{2y}, z=0, z+y=1/2.$

5.7 $x=5\sqrt{y/2}, x=5y/6, z=0, z=\dfrac{5}{6}(3+\sqrt{y}).$

5.8 $x=\dfrac{5}{6}\sqrt{y}, x=\dfrac{5}{18}y, z=0, z=\dfrac{5}{18}(3+\sqrt{y})$

3.26 $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0 (x\ge 0, y\le 0)$,
$\rho=(3x-y)/(x^2+y^2)$.

3.27 $D: x=2, y=0, y^2=x/2$, $\rho=4x+6y^2$.

3.28 $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0)$,
$\rho=\left(y-4x\right)/\left(x^2+y^2\right)$.

3.29 $D: x=1/2, y=0, y^2=2x (y\ge 0)$, $\rho=4x+9y^2$.

3.30 $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0)$,
$\rho=-2x/\left(x^2+y^2\right)$.

4 Найти массу пластинки D, заданной неравенствами, с поверхностной плотностью ρ:

4.1 $D: x^2+y^2/4\le 0$, $\rho=y^2$.

4.2 $D: 1\le x^2/9+y^2/4\le 2$, $y\ge 0, y\le \dfrac{2}{3}x$, $\rho=y/x$.

4.3 $D: 1\le x^2/4+y^2\le 25$, $x\ge 0, y\ge x/2$, $\rho=x/y^3$.

4.4 $D: x^2/9+y^2/25\le 1$, $y\ge 0$, $\rho=x^2y$.

4.5 $D: x^2/9+y^2/25\le 1$, $y\ge 0$, $\rho=7x^2y/18$.

4.6 $D: 1\le x^2/4+y^2\le 4$, $y\ge 0, y\ge x/2$, $\rho=8y/x^3$.

4.7 $D: x^2/9+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $\rho=7xy^6$.

4.8 $D: x^2/4+y^2\le 1$, $\rho=4y^4$.

4.9 $D: 1\le x^2/4+y^2/9\le 4$, $x\ge 0, y\ge 3x/2$, $\rho=x/y$.

4.10 $D: 1\le x^2/16+y^2/4\le 4$, $x\ge 0, y\ge x/2$, $\rho=x/y$.

4.11 $D: x^2/4+y^2/9\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=x^3y$.

4.12 $D: x^2/4+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=6x^3y^3$.

4.13 $D: x^2/9+y^2/4\le 1$, $\rho=x^2y^2$.

4.14 $D: x^2/16+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=5xy^7$.

4.15 $D: x^2/4+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=30x^3y^7$.

4.16 $D: 1\le x^2/9+y^2/4\le 3$, $y\ge 0, y\le \dfrac{2}{3}x$, $\rho=y/x$.

4 Повторный интеграл $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-1-x}^{0}dy\int\limits_{-1-x-y}^{0}\dfrac{dz}{(4x+3y+z+2)^5}$ равен:

а) 0; б) 10; в) 7.

5 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q}(7x-5y+3z+1)dxdydz$ по параллелепипеду $Q=\left\{\left(x,y,z\right)\ \middle|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\right\}$ равен:

а) 156; б) 56; в) 140.

6 Объем тела, ограниченного поверхностями $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$, $z=3$, $z=0$, равен ______________________.

7 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q}(x^2+y^2+z^2)^3\,dxdydz$ по области, ограниченной поверхностями $y^2+z^2=1$, $y=0$, $y=1$, равен:

а) 431π; б) 422π; в) 420π.

8 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ по области, ограниченной поверхностью $x^2+y^2+z^2=9$, равен:

а) $\dfrac{972\pi}{7}$; б) $\dfrac{927\pi}{2}$; в) $\dfrac{972\pi}{5}$.

9 Масса тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=4$ с плотностью $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z$ равна _____________.

10 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q}\dfrac{dxdydz}{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+1}$ по области Q, ограниченной поверхностью $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $z\ge 0$, равен:

а) $\dfrac{4-\pi}{4}$; б) $\dfrac{4-\pi}{8}abc$; в) $\dfrac{2-\pi}{2}abc$.

Тест 6 Поверхностный интеграл

Вариант 1

1 По определению поверхностный интеграл 1-го рода равен:

а) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$,

б) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$,

в) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$.

2 Укажите верное равенство:

а) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{G} f(x,y,z)\frac{1}{|F'_z|}\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}\,dxdy$,

б) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{G} f(x,y,z)\frac{1}{|F'_x|}\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}\,dxdy$,

в) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{G} f(x,y,z)\frac{1}{F'_z}\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}\,dxdy$.

3 Изменяется ли знак поверхностного интеграла 2-го рода при выборе ориентации поверхности? ________________

4 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}(x-3y+2z)\,dS$, где поверхность $\Omega=\{(x,y,z)\ |\ 4x+3y+2z-4=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ равен:

а) $\frac{\sqrt{29}}{9}$, б) $\frac{\sqrt{29}}{8}$, в) $\sqrt{29}$.

5 Площадь поверхности $z=x^2+y^2$, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$, равна:

а) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-3)$, б) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$, в) $\frac{\pi}{3}(5\sqrt{5}+1)$.

6 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dS$ по верхней половине сферы $x^2+y^2+z^2=25$ равен:

а) $\frac{25}{3}\pi$, б) $\frac{100}{3}\pi$, в) $\frac{95}{3}\pi$.

7 Интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz+ydzdx+zdxdy$ по верхней стороне плоскости $x+z-1=0$, отсеченной плоскостями $y=0$ и $y=4$ равен:

3.8 $D:\ x^2+y^2=4, x^2+y^2=25,\ x=0, y=0, (x\ge 0, y\le 0)$,
$\rho=(2x-3y)/(x^2+y^2)$.

3.9 $D:\ x=1, y=0, y^2=4x (y\ge 0)$, $\rho=x+3y$.

3.10 $D:\ x^2+y^2=1, x^2+y^2=9,\ x=0, y=0 (x\ge 0, y\le 0)$,
$\rho=(x-y)/(x^2+y^2)$.

3.11 $D:\ x=1, y=0, y^2=x (y\ge 0)$, $\rho=3x+6y^2$.

3.12 $D:\ x^2+y^2=9, x^2+y^2=25,\ x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0)$,
$\rho=(2y-x)/(x^2+y^2)$.

3.13 $D:\ x=2$, $y=0$, $y^2=x/2$, ($y\ge 0$), $\rho=2x+3y^2$.

3.14 $D:\ x^2+y^2=4, x^2+y^2=16,\ x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0)$,
$\rho=(2y-3x)/(x^2+y^2)$.

3.15 $D:\ x=1/2, y=0, y^2=8x (y\ge 0)$, $\rho=7x+3y^2$.

3.16 $D:\ x^2+y^2=9, x^2+y^2=16,\ x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0)$,
$\rho=(2y-5x)/(x^2+y^2)$.

3.17 $D:\ x=1, y=0, y^2=4x$, $\rho=7x^2+2y$.

3.18 $D:\ x^2+y^2=1, x^2+y^2=16,\ x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0)$,
$\rho=(x+3y)/(x^2+y^2)$.

3.19 $D:\ x=2, y^2=2x, y=0 (y\ge 0)$, $\rho=7x^2/4+y/2$.

3.20 $D:\ x^2+y^2=1, x^2+y^2=4,\ x=0, y=0 (x\ge 0, y\ge 0)$,
$\rho=(x+2y)/(x^2+y^2)$.

3.21 $D:\ x=2, y=0, y^2=2x (y\ge 0)$, $\rho=7x^2/4+y$.

3.22 $D:\ x^2+y^2=1, x^2+y^2=9,\ x=0, y=0 (x\ge 0, y\le 0)$,
$\rho=(2x-y)/(x^2+y^2)$.

3.23 $D:\ x=2, y=0, y^2=x/2 (y\ge 0)$, $\rho=7x^2/2+8y$.

3.24 $D:\ x^2+y^2=1, x^2+y^2=25,\ x=0, y=0 (x\ge 0, y\le 0)$,
$\rho=(x-4y)/(x^2+y^2)$.

3.25 $D:\ x=1, y=0, y^2=4x (y\ge 0)$, $\rho=6x+3y^2$.

2.23 части сферы $x^2+y^2+z^2=25$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=5z$.

2.24 части конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=4$.

2.25 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

2.26 части сферы $x^2+y^2+z^2=9$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=3x$.

2.27 части конуса $2z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4$.

2.28 части сферы $x^2+y^2+z^2=36$, заключенной внутри конуса $y^2+z^2=x^2$.

2.29 части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=z$.

2.30 части конуса $3z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=9$.

3 Найти массу, статические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции пластинки D, ограниченной кривыми с поверхностной плотностью ρ:

3.1 D: $x=1, y=0, y^2=4x\ (y\ge 0)$, $\rho=7x^2+y.$

3.2 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4,\ x=0, y=0,\ x\ge 0, y\ge 0$,
$\rho=(x+y)/(x^2+y^2)$.

3.3 D: $x=1, y=0, y^2=4x (y\ge 0)$, $\rho=7x^2/2+5y$.

3.4 D: $x^2+y^2=9, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0 (x\ge 0, y\ge 0)$,
$\rho=(2x+5y)/(x^2+y^2)$.

3.5 D: $x=2, y=0, y^2=2x (y\ge 0)$, $\rho=7x^2/8+2y$.

3.6 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0, (x\ge 0, y\ge 0)$,
$\rho=(x+y)/(x^2+y^2)$.

3.7 D: $x=2, y=0, y^2=x/2 (y\ge 0)$, $\rho=7x^2/2+6y$.

а) 4, б) 3, в) 5.

8 Интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz+(y+z)dzdx+(z-y)dxdy$, где Ω внешняя часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=2$, равен:

а) π, б) 2π, в) 4π.

9 С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить интеграл $\oint\!\!\int\limits_{\Omega} xdydz+ydzdx+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

10 С помощью формулы Стокса вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} x^2y^3dx+dy+zdz$, где $\Gamma=\{(x,y,z)\ |\ x^2+y^2=R^2, z=0\}$, используя в качестве поверхности верхнюю часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

__________________.

Вариант 2

1 По определению поверхностный интеграл 2-го рода равен:

а) $\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Omega_k)_{xy}$,

б) $\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Omega_k)_{xy}$,

в) $\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Omega_k)_{yz}$.

2 Укажите верное равенство:

а) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$,

б) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{G} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_y'+z_y'}dxdy$,

в) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{G} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$.

3 Изменяется ли знак поверхностного интеграла 1-го рода при выборе ориентации поверхности? __________________

4 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dS$, где поверхность $\Omega=\{(x,y,z)\ |\ z=1-x^2-y^2, z=0\}$ равен:

а) 3π , б) π , в) 4π .

5 Площадь поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, равна:

а) $\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$, б) $\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$, в) $2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$.

6 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}(3x^2+5y^2+3z^2-2)dS$ по поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостью $y=1$, равен:

а) $\sqrt{2}\pi$, б) $3\sqrt{2}\pi$, в) $2\sqrt{2}\pi$.

7 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}\left(5x^2+5y^2+3z^2\right)dxdy$ по верхней стороне поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$ и $z=1$ равен:

а) -4π , б) -3π , в) 4π .

8 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy$, где Ω внешняя часть поверхности $z=4-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$, отсекаемая плоскостью $z=0$, равен:

а) 90π , б) 96π , в) -96π .

9 С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить $\iint\limits_{\Omega}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где Ω – часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, отсекаемая плоскостями $z=0$, $z=4$.

10 С помощью формулы Стокса вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}ydx+zdy+xdz$, где Γ – окружность, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox, $\Gamma=\left\{\left(x,y,z\right)\ \middle|\ x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0\right\}$.

2.9 части сферы $x^2+y^2+z^2=25$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

2.10 части конуса $x=\sqrt{y^2+z^2}$, заключенной внутри цилиндра $y^2+z^2=1$.

2.11 части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=y$.

2.12 части конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=4$.

2.13 части сферы $x^2+y^2+z^2=16$, заключенной внутри конуса $x^2+z^2=y^2$.

2.14 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

2.15 части конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=9$.

2.16 части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

2.17 части сферы $x^2+y^2+z^2=16$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4x$.

2.18 части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=16$.

2.19 части сферы $x^2+y^2+z^2=25$, заключенной внутри конуса $y^2+z^2=x^2$.

2.20 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=2z$.

2.21 части конуса $x=\sqrt{y^2+z^2}$, заключенной внутри цилиндра $y^2+z^2=1$.

2.22 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри конуса $x^2+z^2=y^2$.

1.26 а) $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}, y=\frac{3}{2x}, x=4$;

б) $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=x/2, y=2x.$

1.27 а) $y=\sin x, y=\cos x, x=0 (x\le 0)$;

б) $y^2-4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=3x, x=0.$

1.28 а) $y=\frac{1}{x}, y=6e^x, y=1, y=6$;

б) $x^2-4x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=x/4, y=4x.$

1.29 а) $y=3\sqrt{x}, y=3/x, x=9$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x/2, x=0.$

1.30 а) $y=11-x^2, y=-10x$;

б) $x^2-6x+y^2=0, x^2-10x+y^2=0, y=x/3, y=3x.$

2 Найти площади:

2.1 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2y$.

2.2 части сферы $x^2+y^2+z^2=9$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

2.3 части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.

2.4 части сферы $x^2+y^2+z^2=9$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=3y$.

2.5 части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2$.

2.6 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

2.7 части сферы $x^2+y^2+z^2=16$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4y$.

2.8 части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4$.

Тест 7 Элементы векторного анализа

Вариант 1

1 Линия, для которой в каждой ее точке M вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к данной линии, называется ________________.

2 Векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$ называется соленоидальным, если в любой точке M справедливо равенство ________________.

3 Укажите верную формулу:

а) $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$;

б) $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$;

в) $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$.

4 Выбрать верное утверждение:

а) для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$ было потенциальным в односвязной области Q, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{grad}\vec{a}(M)=0$;

б) для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$ было потенциальным в односвязной области Q, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$;

в) для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$ было потенциальным в односвязной области Q, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0$;

5 Линии уровня скалярного поля $U=x^2+y^2$ имеют вид ________________.

6 Поверхности уровня скалярного поля $U=x+y+z$ имеют вид ________________.

7 Производная функции $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $P=(1,1,1)$ по направлению вектора $\vec{l}=(2,1,0)$ равна:

а) 1; б) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ **;** в) $\frac{\sqrt{14}}{5}$.

8 Градиент скалярного поля $U = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy$ в точке $P(1;-1;1)$ равен:

а) $2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$; б) $2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$; 4 в) $2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$.

9 Циркуляция векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$ вдоль замкнутой линии Γ, образованной осями координат и частью астроиды $\vec{r} = R\cos^3 t\,\vec{i} + R\sin^3 t\,\vec{j}$, лежащей в первой четверти, равна:

а) $-\dfrac{3}{16\pi R^2}$ **;** б) $\dfrac{3}{16\pi R^2}$ **;** в) $\dfrac{3}{14\pi R^2}$.

10 Поток векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$ через часть плоскости $2x + y + z = 2$, лежащей в первом октанте равен _____________________.

Вариант 2

1 Множество точек скалярного поля, в каждой из которых потенциал сохраняет постоянное значение, называется _________.

2 Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называется потенциальным, если существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(M)$ такая, что __________________.

3 Укажите верную формулу:

а) $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$;

б) $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}$;

в) $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial Y}{\partial z} + \dfrac{\partial Z}{\partial x}$.

4 Выбрать верное утверждение:

а) если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность равен нулю;

б) векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное тогда и только тогда, когда поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность равен нулю;

в) если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую поверхность равен нулю;

1.12 а) $y = \sin x, y = \cos x, x = 0 (x \ge 0)$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = x/3, y = 3x.$

1.13 а) $y = 20 - x^2, y = -8x$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0, y = x/4, y = 4x.$

1.14 а) $y = \sqrt{18 - x^2}, y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}$;

б) $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0, y = 3x, x = 0.$

1.15 а) $y = 32 - x^2, y = -4x$;

б) $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = x/4, x = 0.$

1.16 а) $y = 2/x, y = 5e^x, y = 2, y = 5$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = 0, y = x/3.$

1.17 а) $x^2 + y^2 = 36, 3\sqrt{2y} = x^2 (y \ge 0)$;

б) $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = x/2, y = 2x.$

1.18 а) $y = 3\sqrt{x}, y = 3/x, x = 4$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0, y = 0, y = x/2.$

1.19 а) $y = 6 - \sqrt{36 - x^2}, y = \sqrt{36 - x^2}, x = 0 (x \ge 0)$;

б) $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = x/5, y = 5x.$

1.20 а) $y = 25/-x^2, y = x - 5/2$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0, y = 0, y = x.$

1.21 а) $y = \sqrt{x}, y = 1/x, x = 16$;

б) $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0, y = x, x = 0.$

1.22 а) $y = 2/x, y = 7e^x, y = 2, y = 7$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = 0, y = 4x.$

1.23 а) $x = 27 - y^2, x = -6y$;

б) $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = 2x.$

1.24 а) $\sqrt{72 - y^2}, 6x = y^2, y = 0 (y \ge 0)$;

б) $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = x, x = 0.$

1.25 а) $y = \sqrt{6 - x^2}, y = \sqrt{6} - \sqrt{6 - x^2}$;

б) $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = x, x = 0.$

Индивидуальные домашние задания по теме «Приложения двойных интегралов»

1 Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1.1 а) $y=3/x, y=4e^x, y=3, y=4$;

б) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x$.

1.2 а) $x=\sqrt{36-y^2}, x=6-\sqrt{36-y^2}$;

б) $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=x/\sqrt{3}$.

1.3 а) $x^2+y^2=72, 6y=-x^2 (y\le 0)$;

б) $y^2-6y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=x/\sqrt{2}, y=\sqrt{2}x$.

1.4 а) $x=8-y^2, x=-2y$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=x$.

1.5 а) $y=\dfrac{3}{x}, y=8e^x, y=3, y=8$;

б) $y^2-8y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=\dfrac{x}{2}, y=2x$.

1.6 а) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}, y=\dfrac{1}{2x}, x=16$;

б) $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=x$.

1.7 а) $x=5-y^2, x=-4y$;

б) $y^2-4y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=x, x=0$.

1.8 а) $x^2+y^2=12, -\sqrt{6y}=x^2 (y\le 0)$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-10x+y^2=0, y=x, y=2x$.

1.9 а) $y=\sqrt{12-x^2}, y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}, x=0 (x\ge 0)$;

б) $y^2-6y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x, x=0$.

1.10 а) $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}, y=\dfrac{3}{2x}, x=9$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=x/5, y=5x$.

1.11 а) $y=\sqrt{24-x^2}, 2\sqrt{3y}=x^2, x=0 (x\ge 0)$;

б) $y^2-4y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=2x, x=0$.

5 Линии уровня скалярного поля $U=x^2-y^2$ имеют вид ____________________.

6 Поверхности уровня скалярного поля $U=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ имеют вид ____________________.

7 Производная функции $f=x^2y+xz^2-2$ в точке $P=(1,1,-1)$ по направлению вектора $\vec{l}=(1,-2,4)$ равна:

а) 1; б) 9; в) -9.

8 Градиент скалярного поля $U=x^2-2y^2+4z^2-2xz+yz-2xy$ в точке $P(-1;1;1)$ равен:

а) $-6\vec{i}-\vec{j}+11\vec{k}$; б) $6\vec{i}-\vec{j}+11\vec{k}$; 4 в) $-6\vec{i}+\vec{j}-11\vec{k}$.

9 Циркуляция векторного поля $\vec{a}=y^2\vec{i}$ вдоль замкнутой линии Γ, образованной правой половиной эллипса $\vec{r}=b\cos t\,\vec{i}+c\sin t\,\vec{j}$ и осью Oy, равна:

а) 1; б) 0; в) – 1.

10 Поток векторного поля $\vec{a}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$ через поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ равен ________________________.

Задания к контрольным работам

Контрольная работа по разделу «Дифференциальное исчисление функции многих переменных»

Вариант 1

1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y}$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y}$.

2 Найти дифференциал 1-го порядка в точке $M(0;0;2)$ функции $z(x;y)$, заданной уравнением $z^3+3xyz=8$.

3 Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$ до членов 2-го порядка функции $z(x;y)=e^x\sin y$.

4 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z(x;y)=x^2+2xy-y^2-4x$ на компакте $\overline{D}$, ограниченном кривыми $x-y+1=0$, $x=3$, $y=0$.

5 Решить дифференциальное уравнение $y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0$ с помощью замены переменных $\xi=x$, $\eta=x^2+y^2$.

Вариант 2

1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\frac{x^2+y}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+y}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}$.

2 Найти дифференциал 1-го порядка в точке $M(0;0;1)$ функции $z(x;y)$, заданной уравнением $e^z-xyz=e$.

3 Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$ до членов 2-го порядка функции $z(x;y)=e^x\cos y$.

32 Найти ротор векторного поля $\vec{a}=xyz\cdot\vec{i}+(2x+3y-z)\cdot\vec{j}+(x^2+y^2)\cdot\vec{k}$.

33 Найти $F'(y)$ для функции $F(y)=\int\limits_{y}^{y^2}e^{-yx^2}dx$.

34 Исследовать равномерную сходимость интеграла $F(y)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos yx}{1+x^2}dx$.

35 Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-2x}$, $x\ge 0$.

22 Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \sin^2 x dx + y^2 dy$, где $\Gamma = \left\{ (x;y) \middle| y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi \right\}$

23 Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} ydx - xdy\, dl$, где

$\Gamma = \left\{ (x;y) \middle|\ x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

24 Используя формулу Грина, вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} (1 - x^2) ydx + x(1 + y^2) dy$, где $\Gamma = \left\{ (x;y) \middle| x^2 + y^2 = 9 \right\}$.

25 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) ds$ по поверхности $\Omega = \left\{ (x;y;z) \middle| z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \right\}$.

26 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2) dxdy$ по верхней стороне поверхности $\Omega = \left\{ (x;y;z) \middle| z = \sqrt{25 - x^2}, 0 \le y \le 4 \right\}$.

27 Используя формулу Остроградского-Гаусса, вычислить интеграл $\oiint\limits_{\Omega^+} 4x^3 dydz + 4y^3 dxdz - 6z^4 dxdy$ по внешней стороне поверхности $\Omega = \left\{ (x;y;z) \middle| x^2 + y^2 = 25,\ 0 \le z \le 4 \right\}$.

28 Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} ydx + z^2 dy + x^2 dz$, где Γ – пересечение плоскостей $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $z = \sqrt{3}$.

29 Вычислить производную по направлению функции $z = x^2 y - 3xy$ в направлении вектора от точки $O(0;0)$ к точке $A(2;1)$.

30 Найти градиент функции $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке $A(2;-1;3)$.

31 Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = xyz \cdot \vec{i} + (3x^2 + 3y^2) \cdot \vec{j} + (x + 2y - z) \cdot \vec{k}$.

4 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z(x;y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$ на компакте $\overline{D}$, ограниченном кривыми $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

5 Решить дифференциальное уравнение $\dfrac{du}{dx} + \dfrac{du}{dy} + \dfrac{du}{dz} = 0$ с помощью замены переменных $\xi = x$, $\eta = x - y$, $\zeta = z - x$.

Контрольная работа по разделу «Интегральное исчисление функции многих переменных»

Вариант 1

1 Найти массу материальной кривой $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, с плотностью $\rho(x;y) = x$.

2 Найти работу A переменной силы $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ вдоль дуги астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

3 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 25$.

4 Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, если его плотность $\rho(x;y;z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

5 Найти площадь части поверхности параболоида $x = 1 - y^2 - z^2$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = 1$.

6 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности куба $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

7 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ вдоль контура $\Gamma = \left\{ (x;y;z) \middle|\ x = \cos t; y = \sin t; z = 2 \right\}$.

8 Выяснить, является ли соленоидальным и потенциальным векторное поле $\vec{a} = x^2 z\vec{i} + y^2\vec{j} - xz^2\vec{k}$.

9 Найти производную $\dfrac{dF}{dy}$ функции $F(y) = \int\limits_{y^2}^{\sin y} \ln(2y^2 - x) dx$.

10 С помощью интегралов Эйлера вычислить $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x}}{(1 + x)^2} dx$.

Вариант 2

1 Найти массу материальной кривой $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$, с плотностью $\rho(x;y)=2x$.

2 Найти работу A переменной силы $\vec{F}=y\vec{i}-3x\vec{j}$ вдоль дуги астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{6}$.

3 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $x^2+y^2=16$, $x^2+y^2=9$.

4 Найти массу шара $x^2+y^2+z^2\le 9$, если его плотность $\rho(x;y;z)=\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$.

5 Найти площадь части поверхности параболоида $y=1-x^2-z^2$, вырезанной цилиндром $x^2+z^2=1$.

6 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} x^2dydz-y^2dzdx-z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$.

7 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}+x\vec{j}-z\vec{k}$ вдоль контура $\Gamma=\left\{(x;y;z)\mid\ x=\cos t; y=\sin t; z=3\right\}$.

8 Выяснить, является ли соленоидальным и потенциальным векторное поле $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

9 Найти производную $\frac{dF}{dy}$ функции $F(y)=\int\limits_{y^2}^{\sin y}\ln\left(x+y^2\right)dx$.

10 С помощью интегралов Эйлера вычислить $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^3}dx$.

13 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x;y)dy$.

14 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G\sqrt{25-x^2-y^2}\,dxdy$, где $G=\left\{(x;y)\middle|x^2+y^2\le 16\right\}$.

15 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G\left(x^2+y^2\right)dxdy$, где $G=\left\{(x;y)\middle|x^2+y^2\le 16,\ x^2+y^2\ge 4\right\}$.

16 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_Q\frac{dxdydz}{(2x+y-3z)^2}$ по области $Q=\left\{(x;y;z)\mid\ x+y+z=1, x=0, y=0, z=0\right\}$.

17 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_Q\left(x^2+y^2+z^2\right)^2dxdydz$ по области $Q=\left\{\ (x;y;z)\mid\ x^2+y^2=4, z=0, z=4\ \right\}$, переходя к цилиндрическим координатам.

18 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_Q\left(x^2+y^2+z^2\right)^2dxdydz$ по области $Q=\left\{\ (x;y;z)\mid\ x^2+y^2+z^2\le 4\ \right\}$, переходя к сферическим координатам.

19 Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma ydl$, где $\Gamma=\left\{(x;y)\mid\ y=2x, 1\le x\le 2\right\}$.

20 Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, где $\Gamma=\left\{(x;y)\middle|\ x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

21 Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma\sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где Γ нижняя половина кардиоиды $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

Типовые задачи к экзамену

1 Найти область определения функции $z=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.

2 Построить линии уровня функции $z=4x^2+9y^2$.

3 Вычислить предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin 2xy}{y}$.

4 Вычислить повторные пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+3y^2}{x^2+y^3}$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3y^2}{x^2+y^3}$.

5 Найти частные производные функции 2-го порядка $z=y^2\cos(x+2y)$.

6 Найти полный дифференциал функции $z=2x^2y^4-2xy$ в точке $M(1;3)$.

7 Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z=5u^2+uv^2$, где $u=x^3+\cos y$, $v=xy-\sin x$.

8 Найти уравнения касательной и нормали к поверхности Ω, заданной уравнением $x^2+4y^2+z^2-8z-4y+8=0$ в точке $M(3;1;-1)$.

9 Проверить, удовлетворяет ли уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ функция $u=\dfrac{y}{x}$.

10 Исследовать на локальный экстремум функцию $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

11 Найти экстремум функции $z=x^2-y^2$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $y=2x-6$.

12 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x+y-xy$ в области $\bar{D}=\left\{(x;y)\middle|\, y=x,\ y=4,\ x=0\right\}$.

Примерный перечень вопросов к экзамену

(* отмечены вопросы, содержащие теорему с доказательством)

1 Определение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, сходимость последовательности точек в $\mathbb{R}^n$.

2 Подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, компакт.

3 Предел функции многих переменных.

4* Повторные пределы.

5 Непрерывность функции.

6 Частные и полные приращения функции многих переменных.

7 Частные производные функции двух переменных и их геометрический и механический смысл.

8* Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

9* Дифференцируемость функций многих переменных, необходимое условие дифференцируемости.

10* Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных.

11.* Дифференцирование сложной функции многих переменных.

12 Полный дифференциал функции двух переменных и его геометрический смысл.

13* Теорема о равенстве смешанных производных.

14. Дифференциалы высших порядков функции двух переменных.

15* Формула Тейлора для функции двух переменных.

16* Локальный экстремум функции многих переменных, необходимые условия локального экстремума.

17* Достаточные условия локального экстремума функции двух переменных.

18 Неявные функции двух переменных, определяемые одним уравнением, теоремы существования и дифференцирования.

19 Неявные функции многих переменных, определяемые системой уравнений, достаточное условие независимости.

20 Условный экстремум, метод исключения части переменных.

21* Необходимое условие Лагранжа условного экстремума.

22 Глобальный экстремум функции двух переменных на компакте.

23 Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла 1-го рода.

24 Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода.

25 Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода.
26 Задача о работе переменной силы.
27 Определение и свойства криволинейного интеграла 2-го рода.
28 Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.
29* Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода.
30 Множества, измеримые по Жордану, критерий измеримости.
31 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
32 Определение и свойства двойного интеграла.
33* Вычисление двойного интеграла (случай прямоугольной области).
34* Вычисление двойного интеграла (случай криволинейной области).
35* Формула Грина.
36* Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.
37* Замена переменных в двойном интеграле, полярные координаты.
38 Задача о массе пространственного тела.
39 Определение и свойства тройного интеграла.
40 Вычисление тройного интеграла.
41 Замена переменных в тройном интеграле, цилиндрические координаты.
42 Замена переменных в тройном интеграле, сферические координаты.
43 Способы задания поверхности, простые поверхности, особые точки поверхности.
44 Касательная и нормаль к поверхности.
45 Площадь поверхности
46 Ориентация поверхности, односторонние и двусторонние поверхности.
47 Задача о массе изогнутой пластины.
48 Определение и свойства поверхностного интеграла 1-го рода.
49 Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода.
50 Задача о потоке жидкости.
51 Определение и свойства поверхностного интеграла 2-го рода.
52 Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода.
53 Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го родов.
54* Формула Остроградского-Гаусса.
55* Формула Стокса.
56 Поверхности и линии уровня скалярного поля.

57. Производная по направлению скалярного поля, градиент.
58 Определение векторного поля, векторные линии.
59 Дивергенция векторного поля.
60 Циркуляция векторного поля и ее физический смысл.
61 Ротор векторного поля.
62* Определение и непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра.
63* Дифференцирование и интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра.
64 Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.
65* Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.
66* Признак Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.
67 Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра (непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость).
68. Определение и свойства гамма-функции.
69 Определение и свойства бета-функции.
70* Преобразование Фурье и его свойства.