

10 Двумерные случайные величины

1. Игральная кость подбрасывается дважды. Случайная величина ξ — количество выпадений четного числа очков. Случайная величина η — количество выпадений единиц. Построить одномерные функции распределения случайных величин ξ и η , двумерную функцию распределения (ξ, η) . Проверить, будут ли ξ и η независимыми. Найти функцию распределения случайной величины $\tau = \xi - \eta$.
2. Два стрелка стреляют по два раза по мишени. Вероятность попадания в цель при одном выстреле первым стрелком равна 0.7, вторым — 0.4. Случайная величина ξ — количество попаданий в цель первым стрелком. Случайная величина η — количество попаданий в цель вторым стрелком. Построить одномерные функции распределения случайных величин ξ и η , двумерную функцию распределения (ξ, η) . Проверить, будут ли ξ и η независимыми. Найти функцию распределения суммы попаданий в цель первого и второго стрелка.
3. Игральная кость размечена таким образом, что сумма числа очков, выпавших на верхней и нижней гранях, равна 7. Игральная кость подбрасывается один раз. Случайная величина ξ — количество очков, выпавших на верхней грани, случайная величина η — количество очков, выпавших на нижней грани. Найти одномерные распределения случайных величин ξ и η и двумерное распределение (ξ, η) . Проверить, будут ли ξ и η независимыми.
4. Распределение дискретной двумерной случайной величины (ξ, η) задано таблицей:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-1	0.25	0.05	0.1
2	0.1	0.4	0.1

Найти одномерные распределения. Проверить, будут ли ξ и η независимыми. Найти функцию распределения случайной величины $\tau = \xi + \eta$.

5. Распределение дискретной двумерной случайной величины (ξ, η) задано таблицей:

$\xi \setminus \eta$	-2	2	4
0	0	0.1	0.2
1	0.4	0.1	0.2

Найти одномерные распределения, функции распределения. Проверить, будут ли ξ и η независимыми. Найти функцию распределения случайной величины $\tau = \xi - 2\eta$.

6. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет равномерное распределение в $[-1; 2] \times [1; 3]$. Найти плотности распределения вероятностей и функции распределения случайных величин ξ и η , двумерную плотность и функцию распределения (ξ, η) . Будут ли ξ и η независимыми?
7. Функция распределения случайного вектора (ξ, η) имеет вид:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } y < 0, \\ 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность распределения вероятностей, одномерные функции распределения и плотности. Проверить, будут ли ξ и η независимыми. Найти вероятность попадания (ξ, η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 1, x = 2, y = 3, y = 5$.

8. Функция распределения случайного вектора (ξ, η) имеет вид:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } y < 0, \\ (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}), & x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность распределения вероятностей, одномерные функции распределения и плотности. Проверить, будут ли ξ и η независимыми. Найти вероятность попадания (ξ, η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0, x = 3, y = -1, y = 1$.

9. Задана двумерная плотность распределения вероятностей случайного вектора (ξ, η) :

$$f(x, y) = \frac{20}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Найти функцию распределения (ξ, η) , одномерные функции распределения и плотности.

10. Задана двумерная плотность распределения вероятностей случайного вектора (ξ, η) :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin [0; \frac{\pi}{2}] \times [0; \frac{\pi}{2}], \\ \frac{1}{2} \sin(x + y), & (x, y) \in [0; \frac{\pi}{2}] \times [0; \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Найти функцию распределения (ξ, η) , одномерные функции распределения и плотности.

В задачах 11-14 случайные величины ξ и η независимы, найти плотность распределения вероятностей случайной величины $\tau = \xi + \eta$.

11. ξ и η имеют показательное распределение с параметрами 2 и 5 соответственно.
12. ξ и η имеют равномерное распределение на отрезках $[0; 2]$ и $[0; 3]$ соответственно.
13. ξ имеет равномерное распределение на $[1; 3]$, η имеет показательное распределение с параметром 4.
14. ξ имеет показательное распределение с параметром 2, η имеет равномерное распределение на $[-1; 3]$.