Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т.В. ХИЛЬКО

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Действительные числа, функции, предел

Гомель, 2006

От автора

Настоящее пособие предназначено студентам математических специальностей, приступающим к изучению курса математического анализа. В нем рассматриваются начальные главы курса, связанные с построением теории предела, а именно, теория действительных чисел, предел числовой последовательности, предел числовой функции числового аргумента и общая теория предела числовой функции.

Если судить по программе всего курса, то часть, рассматриваемая в пособии мизерна — охватываемый материал составляет то, что принято называть лишь введением в математический анализ. К тому же и времени для рассмотрения этой части курса традиционно отводится только два–два с половиной месяца первого семестра. Тем не менее, она заслуживает отдельного пособия и объясняется это следующим.

В первые месяцы учебы студенту приходится решать массу проблем, среди которых выделим на наш взгляд главную — «как учиться и чему учиться». Уже на первых занятиях в вузе у него возникает много чисто «практических» вопросов, которые он решает случайным образом, по советам (что важнее, лекция или «практика»; как писать конспект, и нужен ли он вообще; зачем записывать материал, который есть в учебнике; стоит ли записывать те вводные предложения, которые лектор произносит в начале лекции или в начале новой темы, нового вопроса, новой теоремы и т.д.; не решил задачу, не понял определение или материал — насколько это плохо; нужно ли решать все; нужно ли готовиться к лекциям и как это делать — читать конспект или материал по учебнику «наперед»? ...). На практике это решение часто сводится к тому, что студент старается записать и «выучить» весь предложенный ему материал, заучить наизусть все непонятные формулировки. (Вряд ли кому из преподавателей анализа незнакома такая ситуация, когда после первой сессии отдельные студенты пребывают в растерянности — «учил, куда же больше, а получил «уд», а кто-то не учил и ...»). В математическом анализе отрыв вуза от школы объективен и наиболее принципиален, ведь изучение его начинается, по существу, с изучения его оснований. Здесь, как ни в какой другой дисциплине, много объективно трудных для понимания мест, связанных с недостаточностью у начинающего студента личного опыта «копания в основах», отсутствия убедительных мотивов такого «копания». Именно понимание важности порядка следования математических терминов и чисто «возрастное» непонимание новых понятий часто толкают студента на зазубривание материала (что вредно не только потому, что отнимает столь ценное время студента на совершенно ненужное занятие, но главным образом потому, что травмирует мышление студента, мешая ему видеть или устанавливать правильные взаимосвязи между различными математическими понятиями, фактами и теориями). Если, ко всему прочему, принять во внимание все увеличивающуюся загруженность преподавателя и тенденцию сокращения числа учебных часов по обсуждаемому курсу, при котором живое, консультационное общение со студентом вовсе не предусматривается, то становится понятно, что в такой ситуации реально помочь студенту может только пособие, корректирующее уже первые его шаги от заучивания непонятного материала к исследованию этого материала.

Цель настоящего пособия — помочь студенту выработать целостное и правильное понимание исходных понятий математического анализа и создать исходную базу его собственной математической культуры. Реально оно оформлено в виде своеобразного «собеседника», показывающего студенту, над какими вопросами ему следует задуматься, какие темы нужно углубить в своем понимании. При этом в пособии приводятся мотивировки появления отдельных новых понятий, разъясняются отдельные ключевые вопросы теории и практики.

Студенту следует иметь в виду, что не все обсуждения и задания пособия будут понятны и посильны ему сразу после первого ознакомления с ними. Как правило, это объясняется сложностью темы и неудачным авторским стилем пособия. Настойчивость и терпение читателя помогут справиться с трудностями. Терпение и настойчивость читателя предполагает и отсутствие жесткой привязки пособия к одному из действующих учебников по математическому анализу. Ориентиром при этом может служить учебник В.А. Зорича или любой другой достаточно подробный учебник. Неизбежные же несогласованности пособия с другими источниками информирования — учебником, курсом лекций и проч. — поначалу, возможно, будут вызывать трудности в организации работы над пособием. Однако следует помнить, что трудностей в обучении все равно не избежать, а лежащее перед Вами пособие — Ваше. Сделаете ли Вы материал его своим и когда — зависит только от Вас, от Вашей настойчивости и труда. Если Вы ставите перед собой цель серьезного занятия математикой, то поработайте над пособием, заранее не ограничивая себя сроком в неделю, месяц или семестр. А напутствием пусть послужат слова знаменитого немецкого педагога А. Дистервега (1790-1866): «Развитие или образование ни одному человеку не могут быть даны или сообщены; всякий, кто желает к ним приобщиться, должен достичь этого собственным напряжением; извне он может получить только возбуждение. Поэтому самодеятельность — средство и одновременно результат образования».

Пособие является результатом многолетнего опыта работы в Гомельском государственном университете им. Ф. Скорины. В процессе его подготовки материал и способы изложения некоторых глав обсуждались с доцентом А.Т. Уссом. Рукопись внимательно прочитали профессоры В.И. Мироненко и Ю.В. Малинковский. Все их замечания и пожелания безусловно способствовали улучшению предлагаемого пособия. Выражаю им искреннюю благодарность.

Т. Хилько

Глава 1

Элементы логики и теории множеств

Понятие множества относится к основным неопределяемым понятиям математики и потому строгое введение его предполагает перечисление большого числа аксиом, отделяющих и связывающих множество с другими неопределяемыми понятиями математики. Мы сейчас, однако, не будем вникать в строгую теорию множеств — для успешного изучения учебного курса математического анализа вполне достаточно тех отдельных сведений из неё, которые обычно обозначают названием «наивная теория множеств». Нам понадобятся только первые и простейшие определения из неё.

Под множеством понимается некоторая (возможно и пустая) совокупность объектов. Объекты, из которых составлено множество, называются его элементами. Задаётся множество либо простым перечислением всех его элементов, например, $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, либо указанием признака, выделяющего все элементы (и только их) задаваемого множества, например,

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 = 0\},$$

$$C = \{f : [0;\ 1] \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ — возрастающая функция } \},$$

либо как результат выполнения некоторых действий (операций) над другими заданными множествами, например, $D = A \setminus B$, $E = A \cup B$, $F = A \cap B$, $G = (A \cup B) \setminus B$ и др.

Уже при задании множества используется знак равенства. Следует понимать, что множества X и Y по определению считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Если же все элементы множества X являются элементами множества Y, то говорят, что X — есть подмножество множества Y, и пишут: $X \subset Y$ или $Y \supset X$.

Напомним определение операций объединения ($\cup$), пересечения ($\cap$) и разности ($\setminus$) множеств X и Y:

$$X \cup Y := \{a \mid a \in X \text{ или } a \in Y\};$$

$$X \cap Y := \{a \mid a \in X \text{ и } a \in Y\};$$

$$X \setminus Y := \{a \mid a \in X \text{ и } a \notin Y\}.$$

Если $X \subset Y$, то разность $Y \setminus X$ обозначается также как $C_Y X$ и называется дополнением множества X до множества Y или в множестве Y.

Упражнения

1. Имеются ли среди заданных выше множеств A, B, C, D, E, F и G равные? Какие из них находятся в порядке включения в качестве подмножества?

2. Перечислите все элементы указанных выше множеств D, E, F, G. Верно ли, что $D = G$?

3. Даны множества: $A = \{2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 0\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \ |x - \frac{5}{2}| < 2\}$. Есть ли равные множества среди них?

4. Построить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если:

а) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \ |x| \leqslant 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 1\}$;

б) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x^2 - 4 < 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 \geqslant 0\}$;

в) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \ |2x - 1| < 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \ |2 - x| > 2\}$.

5. Пусть A и B — подмножества множества M. Изобразите на диаграмме Эйлера-Вена множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

6. Что называется дополнением $C_M A$ множества A в M, если $A \subset M$?

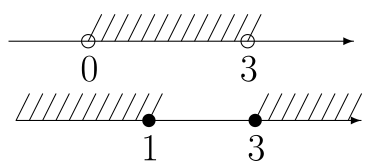
7. Что представляют собой числовые множества $C_{\mathbb{R}} A$, $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$, $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$? Множества A и B — множества из упражнения 4.

Пример 1. Определите множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_{\mathbb{R}} A$, $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$, $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$, если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 \geqslant 0\}$.

► Найдём элементы множеств A и B — ими будут действительные числа, являющиеся решениями неравенств:

$$x^2 - 3x < 0 \Leftrightarrow x(x-3) < 0$$

$$x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \geqslant 0$$



Таким образом,

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[\ \}.$$

Согласно определениям операций объединения, пересечения, разности, получим, что:

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty\};$$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 1\};$$

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\};$$

$$B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leqslant 0;\ 3 \leqslant x < +\infty\};$$

$$C_{\mathbb{R}}A = \mathbb{R} \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leqslant 0;\ 3 \leqslant x < +\infty\};$$

$$C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = \mathbb{R} \setminus (A \cup B) = \varnothing;$$

$$C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = \mathbb{R} \setminus (A \cap B) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leqslant 0;\ 3 \leqslant x < +\infty\}. \blacksquare$$

Пример 2. Доказать, что $A \setminus B = A \cap (C \setminus B)$, если A, B — подмножества множества C.

► Воспользуемся тем, что два множества равны в том и только в том случае, когда всякий элемент одного множества принадлежит второму множеству, а каждый элемент второго множества является элементом первого множества. Поэтому возьмём произвольный элемент $x \in A \setminus B$ и докажем, что $x \in A \cap (C \setminus B)$. Затем возьмём произвольный элемент $y \in A \cap (C \setminus B)$ и покажем, что $y \in A \setminus B$.

Итак, $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ и $x \notin B \Rightarrow x \in A$ и $x \in C \setminus B \Rightarrow x \in A \cap (C \setminus B)$. С другой стороны, $y \in A \cap (C \setminus B) \Rightarrow y \in A$ и $y \in C \setminus B \Rightarrow y \in A$ и $y \notin B \Rightarrow y \in A \setminus B$. Таким образом определение равенства двух множеств выполняется, что означает справедливость (истинность) равенства $A \setminus B = A \cap (C \setminus B)$. $\blacksquare$

Если обратить внимание на текст любой математической книги, то нетрудно заметить, что он состоит из некоторых предложений, кажущихся нам — одно из двух — то ли верными, то ли нет, знаков, символов, соединительных союзов (в которые, кроме обычных «и» и «или» мы относим «если ..., то ...», «для того, чтобы ... необходимо, чтобы ...» и др.). Временами текст сопровождается словами «определение», «теорема», «лемма» и др.

Предложение, которому в точности отвечает одно из двух — истина или ложь, называется в математике **высказыванием**. Примеры высказываний:

1) $1 > 2$— высказывание (ложное);

2) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ — высказывание (истинное);

3) *если* $1 = 2$, *то* $2 = 3$ — высказывание (истинное);

4) *если* $1 = 2$, *то* $1 + 1 = 2$ — высказывание (истинное);

5) *если* $1 + 1 = 2$, *то* $2 = 3$ — высказывание (ложное);

6) *сфера является линейно связным множеством* — высказывание (истинное, если подразумевать, что все используемые в этом предложении понятия строго и «правильно» определены. Всю подразумевающуюся «правильную» информацию принято называть подтекстом или контекстом).

Примеры предложений, не являющихся высказываниями:

7) «если равняется, то прибавить» (для установления истинности не хватает данных);

8) число a — простое (если $a = 2$, то это будет истинное высказывание, а если $a = 4$, то ложное. Значит, не хватает данных для установления истинности);

9) $x - 3y = 1$ (аналогично);

10) если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны (неизвестно о каких прямых идёт речь: лежащих в одной плоскости или лежащих в разных плоскостях).

Из высказываний A и B можно образовать новые высказывания с помощью так называемых логических связок (или логических операций), к которым относят: $\wedge$ — читается **«и»**; $\vee$ — читается **«или»**; $\rceil$ — читается **«не»**; $\Rightarrow$ — читается **«следовательно»** или **«импликация»**; $\Leftrightarrow$ — читается **«эквивалентно»** или **«равносильно»**, или **«эквиваленция»**.

Высказывания $A \wedge B$, $A \vee B$, $\rceil A$, $A \Rightarrow B$ (читается также «из A следует B» или «если A, то B»), $A \Leftrightarrow B$, соответствующие этим операциям, определяются таблицами истинности, в которых просто–напросто перечисляется, каким считается (истинным или ложным) определяемое высказывание для каждого варианта истинности высказываний A и B. Для краткости договорились обозначать истинность высказывания «1» единицей, а ложность «0» нулём. Так, если A — истинное высказывание, то пишут $(A) = 1$, а если A — ложное высказывание, то пишут $(A) = 0$. Тогда таблицы истинности перечисленных выше высказываний имеют следующий вид:

A	B	$\rceil A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Таблицы истинности перечисленных высказываний считаются аксиомами логических связок.

В примерах высказываний утверждалось, что высказывание «если $1 = 2$, то $1 + 1 = 2$» — истинное. Если обозначить через A — высказывание «$1 = 2$», а через B — высказывание «$1 + 1 = 2$», то $(A) = 0$, а $(B) = 1$. Согласно таблице $(A \Rightarrow B) = 1$. Но истинно ли предложение $A \Rightarrow B$ с точки зрения здравого смысла? Оказывается, истинно. Вот одно из математических доказательств этого факта.

Пусть дано, что $1 = 2$. Тогда $2 = 1$. Вычитая из обеих частей последнего равенства по 1, получим, что $1 = 0$. Складывая почленно два равенства: $1 = 2$ и $1 = 0$, получим, что $1 + 1 = 2 + 0$, таким образом $1 + 1 = 2$. Значит, из равенства $1 = 2$ на самом деле можно вывести равенство $1 + 1 = 2$. Высказывание $A \Rightarrow B$ — истинно.

Предложения из примеров 8 - 10 имеют полезное для математики содержание: придавая конкретные значения переменным (неизвестным величинам) в них, мы получаем высказывания. Такие и подобные им предложения в математике называют **предикатами**. В предложении «число a — простое» переменной является «буква a», подразумевающая некоторое число. Задавая конкретное значение a, мы получаем высказывание. Например, «при $a = 2$ число a простое» — истинное высказывание, «при $a = 4$ число a — простое» — ложное. Здесь переменная a — одна, поэтому предикат называют одноместным.

Предикат «$x - 3y = 1$» — двуместный, ибо в нём две переменные — x и y. Чтобы получить высказывание из этого предиката, надо задать значения двум этим переменным. Приведите примеры высказываний, построенных с помощью этого предиката.

Предикат «если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны» — одноместный. Что является переменной в этом предикате?

Пусть $P(x)$ — одноместный предикат с переменной x. Считается, что вместо x в $P(x)$ можно подставлять конкретные объекты из некоторого заданного множества D. Множество D называется областью определения предиката (или областью допустимых значений). Оно разбивается на два подмножества: одно содержит те и только те элементы D, для которых $P(x)$ истинно (его называют множеством истинности); второе подмножество состоит из тех элементов D, для которых предложение $P(x)$ ложно. Подстановка в предикат $P(x)$ вместо буквы x конкретного элемента из D делает предикат высказыванием (этот способ построения высказываний называется «присваиванием значения переменной предиката»). Но есть ещё два высказывания, строящихся с помощью предиката $P(x)$. Это:

а) $\forall x \in E(P(x))$ или $\forall x \in E\ P(x)$; читается «для любого x из множества E(получающееся в результате присваивания значения x переменной предиката высказывание) $P(x)$ истинно». Взятые в скобки слова подразумеваются, и обычно не произносятся.

б) $\exists x \in E(P(x))$ или $\exists x \in EP(x)$; читается «существует значение x из множества E такое, что $P(x)$ истинно. (Подразумевается, что существует значение x, присваивание которого переменной предиката образует истинное высказывание)».

Знак $\forall$ (квантор общности) представляет собой перевёрнутую первую букву английского слова «All» (все).

Знак $\exists$ (квантор существования) представляет собой зеркально отображённую первую букву английского слова «Exist» (существует).

Пример 3. Пусть $P(x)$ — предложение «$x - 1 = 0$», тогда высказывание $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x)$ значит, что для любого действительного числа x выполняется равенство $x - 1 = 0$. Высказывание же $\exists x \in \mathbb{R}\ P(x)$ имеет следующее содержание: найдётся действительное число, удовлетворяющее равенству $x - 1 = 0$.

Предикаты, подобно высказываниям, можно соединять логическими связками. Например, $\rceil P(x)$(ещё пишут $\overline{P(x)}$) обозначает предикат «неверно, что $P(x)$» и называется **отрицанием** предиката $P(x)$. Предикат $P(x) \wedge Q(x)$ обозначает логическое умножение предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ (иначе говорят **конъюнкцию**) и читается «$P(x)$ и $Q(x)$». Предикат $P(x) \vee Q(x)$ обозначает предикат «$P(x)$ или $Q(x)$» и называется **дизъюнкцией** (логическим сложением). Из полученных с помощью логических связок новых предикатов также строятся высказывания операцией присваивания значений переменной или с помощью кванторов общности. Здесь надо иметь в виду, что присваивание значения переменной производится сразу во все предикаты, составляющих сложный предикат. Например, присваивание значения $x = 2$ предикату $(P(x) = (x$ — простое число $)) \wedge ((x - 5)(x + 8) = 0)$ даёт высказывание ((2 — простое число)$\wedge(2 - 5)(2 + 8) = 0)$ — очевидно ложное. Для того же $P(x)$ высказывание $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x)$ означает, что для любого действительного числа x справедливо высказывание «x — простое число и $(x - 5)(x + 8) = 0$». Разумеется, это так же ложное высказывание. А вот высказывание $\exists x \in \mathbb{R}\ P(x)$ — существует действительное число x такое, что справедливо высказывание «x — простое число и $(x - 5)(x + 8) = 0$» — истинное. (Достаточно в качестве «нужного» x взять 5).

Пример 4. Выясним, совпадают ли высказывания $S = \exists x \in E(P(x) \wedge Q(x))$ и $T = \exists x \in E(P(x)) \wedge \exists x \in E(Q(x))$. Высказывания S и T называются равными (равносильными или эквивалентными), если они одновременно истинны или ложны (или из истинности S следует истинность T, и обратно). ▶ Пусть S истинно. Это означает, что для некоторого $x_0 \in E$ присваивание $x = x_0$ образует истинное высказывание $P(x_0) \wedge Q(x_0)$. Но тогда $P(x_0)$ истинно, и $Q(x_0)$ истинно. Отсюда следует, что $\exists x(P(x))$ — истинно и $\exists x(Q(x))$ — истинно. Таким образом, T — истинно.

Пусть T истинно, т.е. существует $x = x_1$ такое, что $P(x_1)$ истинно, и существует $x = x_2$ такое, что истинно $Q(x_2)$. Так как вполне может оказаться, что x_1 и x_2 — разные элементы множества E, то получается, что вовсе не обязательно должен существовать один элемент $x_0 \in E$, при котором истинны оба высказывания $P(x_0)$ и $Q(x_0)$. Таким образом, из истинности T не следует, вообще говоря, истинность S. (Оговорка «вообще говоря» означает, что без дополнительных данных относительно $P(x)$ и $Q(x)$ заключение об истинности S сделать нельзя. Так, например, если

$$P(x) = (\text{выполняется неравенство } (x-1)^2 \leq 0),$$

$$Q(x) = (\text{выполняется неравенство } (x-2)^2 \leq 0),$$

то высказывание $T = \exists x \in \mathbb{R}(P(x)) \wedge \exists x \in \mathbb{R}(Q(x))$ истинно, а высказывание $S = \exists x \in \mathbb{R}(P(x) \wedge Q(x))$ ложно; если же

$$P(x) = (x \text{ кратно } 2),$$

$$Q(x) = (x \text{ кратно } 3),$$

то оба высказывания, $T = \exists x \in \mathbb{N}(P(x)) \wedge \exists x \in \mathbb{N}(Q(x))$ и $S = \exists x \in \mathbb{N}(P(x) \wedge Q(x))$, истинны.)

Итак, высказывания S и T не совпадают, но из S следует T (говорят также, что «T есть следствие S»). ■

Рассмотрим «взаимодействие» отрицания и кванторов.

Правила построения отрицания для высказывания, содержащего кванторы всеобщности и существования, даются формулами: $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$; $\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$. Первая формула означает: высказывание $P(x)$ истинно не для всех x тогда и только тогда, когда существует x, для которого $P(x)$ ложно. Вторая формула означает высказывание: не существует x, для которого $P(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ ложно для всех x.

Пример 5. Высказывание «число A есть **предел числовой последовательности** $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$», по определению означает, что для любого положительного числа ε существует такой номер N, что все члены a_n

последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, номера n которых превосходят N, т.е. $n \geqslant N$, удовлетворяют неравенству $| \, a_n - A \, | < \varepsilon$.

Сложное высказывание, подразумевающееся в сформулированном понятии предела числовой последовательности может быть записано в виде следующей формулы: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} (n \geqslant N \Rightarrow | \, a_n - A \, | < \varepsilon)$.

Отрицание его (т.е. высказывание о том, что число A не является пределом числовой последовательности $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$) строится так:

$$\overline{\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} (n \geqslant N \Rightarrow | \, a_n - A \, | < \varepsilon)} =$$
$$\exists \varepsilon > 0 \; \overline{\exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} (n \geqslant N \Rightarrow | \, a_n - A \, | < \varepsilon)} =$$
$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N} \overline{(n \geqslant N \Rightarrow | \, a_n - A \, | < \varepsilon)} =$$
$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N} (n \geqslant N \wedge | \, a_n - A \, | \geqslant \varepsilon).$$

В обычном тексте это звучит так: число A не является пределом числовой последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального числа N найдётся член a_n этой последовательности с $n \geqslant N$, такой, что выполняется неравенство $| \, a_n - A \, | \geqslant \varepsilon)$.

Упражнения

8. Среди следующих предложений выделить те, которые являются высказываниями:

а) число 3 является делителем числа 174;

б) число 3 не является делителем числа 16;

в) трапеция — это четырёхугольник на плоскости, две противоположные стороны которого параллельны;

г) сумма углов треугольника равна 180°;

д) сумма корней любого приведённого квадратного уравнения равна свободному члену;

е) $2 + 2 \neq 5$.

Установите истинность или ложность выделенных высказываний.

9. В чём заключаются высказывания $\rceil P$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$? Определите истинность этих высказываний, если высказывание P — истинно, а Q — ложно.

10. Составьте таблицу истинности для высказывания:

а) $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$;

б) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$;

в) $P \Rightarrow (Q \wedge P)$.

11. Пусть высказывание $P \Rightarrow Q$ — истинно. Что можно сказать о значении высказывания $\rceil P \wedge Q \Leftrightarrow P \vee Q$?

12. Пусть высказывание $P \Leftrightarrow Q$ — истинно. Что можно сказать о значении высказываний $P \Leftrightarrow \rceil Q$ и $\rceil P \Leftrightarrow Q$?

13. Пусть высказывание $P \Leftrightarrow Q$ — ложно. Что можно сказать о значении высказываний $P \Leftrightarrow \rceil Q$ и $\rceil P \Leftrightarrow Q$?

14. Пусть $P(x)$ означает: «x — простое число»; $Q(x)$ означает: «x — чётное число»; $E(x)$ означает: «x — нечётное число». Запишите обычным текстом следующие высказывания:

а) $P(7)$;

б) $E(2) \wedge P(2)$;

в) $\exists x(E(x) \wedge P(x))$;

г) $\exists x(E(x) \wedge P(x)) \wedge \rceil (\exists x)((E(x) \wedge P(x)) \wedge (\exists y)(x \neq y) \wedge E(y) \wedge P(y))$.

15. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — некоторая фиксированная функция с областью определения $X \subset \mathbb{R}$. Какие свойства функции f выделяют следующие высказывания:

а) $\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$;

б) $\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$;

в) $\forall x \in \mathbb{R}(x \in X \Rightarrow (-x \in X \wedge (f(-x) = f(x)))$;

г) $\forall x \in \mathbb{R}(x \in X \Rightarrow (-x \in X \wedge (f(-x) = -f(x)))$;

д) $\exists C \in \{C \in \mathbb{R} \mid C > 0\}\ \forall x \in \mathbb{R}(x \in X \Rightarrow \mid f(x) \mid \leq C)$.

Постройте отрицания этих высказываний и сформулируйте их обычным текстом.

16. Сформулируйте текстом следующее высказывание: $\forall x_1 \in \mathbb{R}\ \forall x_2 \in \mathbb{R}((x_1 \in X) \wedge (x_2 \in X) \wedge (x_1 \neq x_2)) \Rightarrow ((x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}) \wedge (x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a}))$, где через X обозначено множество $X := \{x \in \mathbb{R} \mid ax^2+bx+c = 0\}$. Здесь a, b, c — некоторые фиксированные числа, причём $a \neq 0$. Верно ли это высказывание? Постройте отрицание его и результат запишите обычным текстом.

17. Пусть $f : X \mapsto \mathbb{R}$ — некоторая функция, определённая на $X \subset \mathbb{R}$. Верно ли, что, если для f не выполняется высказывание $\forall x \in \mathbb{R}(x \in X \Rightarrow (-x \in X \wedge (f(-x) = f(x)))$, то выполняется высказывание $\forall x \in \mathbb{R}(x \in X \Rightarrow (-x \in X \wedge (f(-x) = -f(x)))$?

18. Постройте отрицания следующих высказываний:

а) все углы данного шестиугольника тупые;

б) для любого x из множества M выполняется неравенство $x^2 > 4$;

в) некоторые люди — дети;

г) по крайней мере для одного элемента x множества M выполняется равенство $x^2 - 2x + 1 = 0$;

д) все простые числа — нечётные;

е) для любого простого числа p число $2^p - 1$ тоже простое.

Примеры решения задач

Пример 6. Даны два высказывания: P — «число 3 является делителем числа 174» и Q — «идёт дождь». В чём заключается высказывание: $\overline{P}$; $P \vee Q$; $P \wedge Q$; $\overline{P} \Rightarrow Q$; $P \Leftrightarrow \overline{Q}$? Какие из этих высказываний истинны, а какие ложны, если известно, что P — истинно, Q — ложно?

1) $\overline{P}$ или $\rceil P$ — «число 3 не является делителем числа 174».

2) $P \vee Q$ — «число 3 является делителем числа 174 или идёт дождь».

3) $P \wedge Q$ — «число 3 является делителем числа 174 и идёт дождь».

4) $\overline{P} \Rightarrow Q$ — «если число 3 не является делителем числа 174, то идёт дождь».

5) $P \Leftrightarrow \overline{Q}$ — «число 3 является делителем числа 174 тогда и только тогда, когда не идёт дождь».

► Очевидно, что: 1) ложно; 2) истинно; 3) ложно; 4) истинно; 5) ложно. ■

Пример 7. Составить таблицу истинности для высказываний:
а) $S = (P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
б) $S = (P \wedge (Q \Rightarrow P)) \vee \overline{P}$.

► Как обычно, будем обозначать истинные высказывания символом 1, а ложные — символом 0. Каждому из высказываний а), б) отвечает таблица истинности, которая указывает его истинность в зависимости от истинности высказываний P, Q. Составим эти таблицы.

а) $S = (P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$	S
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0

б) $S = (P \wedge (Q \Rightarrow P)) \vee \overline{P}$

P	Q	$Q \Rightarrow P$	$P \wedge (Q \Rightarrow P)$	$\overline{P}$	S
1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1

Как видно из таблицы, рассматриваемое высказывание — тождественно истинное («тавтология», как принято говорить в логике). ■

Пример 8. Доказать, что справедливо соотношение: $\rceil(A \wedge B) \Leftrightarrow \rceil A \vee \rceil B$.

► Расшифруем (т.е. переведём на обычный язык) данное высказывание: «A и B неверно тогда и только тогда, когда неверно или A или B». Это высказывание можно сформулировать и так: «A и B неверно в том и только в том случае, когда неверно A или неверно B».

Пусть «A и B — истинные высказывания, тогда $A \wedge B$ будет также истинно и, следовательно, высказывание $\rceil(A \wedge B)$ — ложно, т.е. высказывание левой части, доказываемого соотношения — ложное.

Рассмотрим теперь высказывание правой части доказываемого соотношения: если A и B — истинные высказывания, то $\rceil A$, $\rceil B$ — ложные высказывания, тогда высказывание $\rceil A \vee \rceil B$ — ложное.

Получили и в правой части доказываемого соотношения ложное высказывание. Таким образом, соотношение верно в случае A, B — истинных высказываний.

Пусть A — ложное высказывание, B — истинное. Тогда в левой части соотношения $A \wedge B$ — ложное, а $\rceil(A \wedge B)$ — истинное высказывание. Если же рассмотреть правую часть соотношения, то имеем: $\rceil A$ — истинно, $\rceil B$

— ложно, и $\rceil A \vee \rceil B$ будет истинным высказыванием. Следовательно, $\rceil(A \wedge B) \Leftrightarrow \rceil A \vee \rceil B$ истинно.

Пусть A — истинно, а B — ложно, тогда имеем: $A \wedge B$ — ложно, $\rceil(A \wedge B)$ — истинно. С другой стороны $\rceil A$ — ложно, $\rceil B$ — истинно и $\rceil A \vee \rceil B$ — истинно. Доказываемое соотношение — верное.

Наконец, последнее: пусть A, B — ложные высказывания, тогда $A \wedge B$ — ложно, а $\rceil(A \wedge B)$ истинно. Справа: $\rceil A$, $\rceil B$ — истинно, тогда $\rceil A \vee \rceil B$ — истинно тоже. Значит высказывание $\rceil(A \wedge B) \Leftrightarrow \rceil A \vee \rceil B$ и в этом случае верно. Таким образом, высказывание $\rceil(A \wedge B) \Leftrightarrow \rceil A \vee \rceil B$ истинно всегда. ■

Пример 9. Установить истинность или ложность высказываний. Построить отрицания к этим высказываниям.

а) $\exists a \, \forall x \, (x^2 - a > 0)$; б) $\exists a \, \forall x \, (x + a > 0)$;
в) $\forall x \, \exists a \, (x^2 - a > 0)$; г) $\forall x \, \exists a \, (x + a > 0)$;
д) $\forall a \, \exists x \, (x^2 - a > 0)$; е) $\forall a \, \exists x \, (x + a > 0)$;
ж) $\exists x \, \forall a \, (x^2 - a > 0)$; з) $\exists x \, \forall a \, (x + a > 0)$.

► а) Расшифруем записанное в символах высказывание: существует такое a, что для любых x выполняется неравенство $x^2 - a > 0$. Таким образом, задача определения истинности этого высказывания сводится к нахождению таких a , что $x^2 - a > 0$ верно для любых x. Очевидно, что $x^2 - a > 0$ при $a < 0$ — есть истинное высказывание. Таким образом, высказывание $\exists a \forall x (x^2 - a > 0)$ — верное.

Аналогично устанавливается истинность или ложность других высказываний.

Построим отрицания к приведённым в задаче высказываниям, для чего воспользуемся формулой:

$$\overline{\forall x P(x)} = \rceil(\forall x P(x)) = \exists x (\rceil P(x)).$$

а) $\forall a \, \exists x \, (x^2 - a \leqslant 0)$; б) $\forall a \, \exists x \, (x + a \leqslant 0)$; в) $\exists x \, \forall a \, (x^2 - a \leqslant 0)$;
г) $\exists x \, \forall a \, (x + a \leqslant 0)$; д) $\exists a \, \forall x \, (x^2 - a \leqslant 0)$; е) $\exists a \, \forall x \, (x + a \leqslant 0)$;
ж) $\forall x \, \exists a \, (x^2 - a \leqslant 0)$; з) $\forall x \, \exists a \, (x + a \leqslant 0)$. ■

Изучаемые объекты в математике и, в частности, в математическом анализе отличаются от объектов изучения многих других наук тем, что их нельзя увидеть в реальном мире, они существуют только в воображении человека. Говоря строго, объекты в математике представляют собой абстракции наблюдаемых в природе количественных отношений и пространственных форм.

Математический объект — это некоторое понятие, смысл и свойства которого объясняются с помощью других математических терминов и, возможно, слов, используемых человеком для обозначения его представлений об отдельных сторонах окружающей действительности. Объяснение смысла одного понятия с помощью других называется **определением** этого понятия.

Обычные «нематематические» объяснения могут проводиться как с соблюдением каких-либо правил (например, этикета), так и без соблюдения их, могут использовать разные языки и разные жаргоны, причём не только звуки, но и жесты, и мимику, заменяющие многие из них. Математические же объяснения - это специальный набор предложений, составленный из слов или символов, обозначающих математические и только математические объекты. При таком жёстком подходе к построению объяснений в математике обязаны быть, и имеются, понятия, которые нельзя объяснить с помощью только математических объектов. Их называют «исходными» или «неопределяемыми» (неопределяемыми, разумеется, со специальной математической точки зрения). Таковыми являются, например, «точка», «число», «множество» и др. Чтобы различать исходные понятия между собой и установить взаимосвязи между ними, в математике принимаются (то есть считаются истинными) некоторые «исходные предложения» — **аксиомы**. Например, «один прибавить один равняется два», «имеется точка, не лежащая на данной прямой» и др. Затем, с формальной точки зрения, из «исходных» истинных предложений (аксиом) с помощью специальных логических связок (операций) образуются новые истинные высказывания, называемые **теоремами**.

Для удобства получения новых теорем, да и просто для более краткого формулирования старых, некоторые неоднократно встречающиеся наборы математических терминов обозначают новыми словами. Например, вместо слов «пусть функция f такова, что большему значению аргумента сопоставляется большее её значение» — принято говорить: «пусть f — возрастающая функция». Так возникают новые, уже не «исходные», а «производные» математические понятия.

Несмотря на всяческие сокращения формулировок высказываний в математике, задача полного изучения отдельным человеком всех имеющихся в ней фактов стала неразрешимой. Но необходимости знать исключительно все исходные понятия и аксиомы математики нет. Математика, на сегодняшний день, состоит из большого числа разделов и можно работать по тематике одного из них, приняв в качестве «аксиом» все известные факты других её разделов. (Таким «аксиоматическим» подходом иногда пытаются воспользоваться студенты, не успевшие подготовиться к экзамену и заучившие лишь («для тройки») формулировки наиболее важных утверждений экзаменационного курса).

Теорему принято разбивать на две части: утверждение и доказательство. Таким образом, теорема, с точки зрения математики, есть «утверждение с доказательством» или «доказанное утверждение». Это, с одной стороны, позволяет упрощать повторную запись теоремы, сводя её к записи утверждения, а с другой стороны, позволяет уменьшить число всевозможных теорем, рассматривая как одну и ту же те из них, которые совпадают своими утверждениями, но отличаются доказательствами. Кроме того, доказательства позволяют заметить повторяющиеся логические конструкции, используемые в различных теоремах. Такие конструкции называют методами доказательств. Например, метод доказательства от противного, метод математической индукции и др. Разумеется, они могут быть использованы и применяются для получения новых теорем.

Итак, теорема — есть полное предложение, связывающее в логическую цепь высказывания $A_1, A_2, \dots, A_n$ (посылка) и высказывание B(заключение): $A_1, A_2, \dots, A_n \;\Rightarrow\; B$. Всё, что обозначается стрелкой $\Rightarrow$ есть цепь заключений — то, что называется доказательством теоремы. Со временем часто доказательства стали опускаться, а под теоремой стали понимать высказывание:

«Истинным является предложение: при истинности определённых высказываний $A_1, A_2, \dots, A_n$ истинным оказывается высказывание B».

Если обозначить через A высказывание $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$, то теорему можно символически записать так: $((A = 1) \Rightarrow (B = 1)) = 1$.

Высказывание об истинности предложения $A = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ называют **условием** (посылкой) теоремы; высказывание об истинности предложения B — **утверждением** или **заключением** теоремы. Вместо записи (1) чаще пишут $A \Rightarrow B$ и читают «из A следует B» или «если A, то B». (При этом получается, что теорема обозначена точно так же, как и высказывание $A \Rightarrow B$).

Упражнения

19. Укажите условия и заключения в следующих теоремах:

а) если дискриминант квадратного трёхчлена отрицателен, то этот трёхчлен не имеет действительных корней;

б) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;

в) каждое простое число, большее 2, является нечётным числом;

г) сумма квадратов длин катетов прямоугольного треугольника равна квадрату длины его гипотенузы;

д) сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

Если условие и заключение теоремы поменять местами, то получится теорема, **обратная** исходной (исходная теорема называется также «**прямой**»). Например:

а). Прямая теорема — если последняя значащая цифра числа a есть 4, то число a делится на 2. Обратная теорема — если число a делится на 2, то последняя значащая цифра числа a есть 4.

б). Прямая теорема — диагонали параллелограмма делятся пополам своей точкой пересечения; обратная теорема — если диагонали четырёхугольника своей точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

20. Сформулируйте обратную теорему к каждой из следующих. Укажите, какие из перечисляемых теорем истинны (справедливы), а какие нет.

а) Если $f(x)$ — периодическая функция, то каждое своё значение она принимает на бесконечном множестве точек;

б) если функция $f(x)$ является чётной и нечётной, то она — постоянная функция;

в) если число a оканчивается цифрой 2, то его квадрат оканчивается цифрой 4;

г) в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы;

д) диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Ещё одна «новинка» в терминологии. Если теорема $A \Rightarrow B$ оказалась верной, то условие A называется **достаточным условием** для B, а заключение B — **необходимым условием** для A. Например, можно сказать:

а) для того, чтобы точка плоскости лежала на серединном перпендикуляре к отрезку, необходимо, чтобы она была равноудалена от концов отрезка;

б) чтобы функция $f(x)$ не являлась периодической, достаточно, чтобы она была возрастающей.

Если верны как прямая теорема $A \Rightarrow B$, так и её обратная $B \Rightarrow A$, то говорят, что A является **необходимым и достаточным** для B(равно как и B является необходимым и достаточным для A). Теоремы с использованием слов «необходимо» и «достаточно» встречаются часто.

21. Какие из следующих высказываний верны?

а) Для того, чтобы целое число a делилось на 5 без остатка необходимо, чтобы последняя цифра его была 5;

б) для того, чтобы целое число a делилось на 5 без остатка достаточно, чтобы последняя цифра его была 5;

в) для того, чтобы ромб являлся квадратом необходимо, чтобы его диагонали были равны;

г) для того, чтобы ромб являлся квадратом достаточно, чтобы его диагонали были равны;

д) для того, чтобы четырёхугольник являлся прямоугольником необходимо, чтобы противоположные стороны его были попарно параллельны;

е) для того, чтобы четырёхугольник являлся прямоугольником достаточно, чтобы противоположные стороны его были попарно параллельны.

22. Переформулируйте теоремы из упражнения 19 с помощью слов «необходимо» и «достаточно».

И в заключение, рассмотрим один вид рассуждений в математике, который называют доказательством теоремы **методом от противного**. Так как $(A \Rightarrow B) = (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$(см. таблицу истинности), то теорему $A \Rightarrow B$ можно записать: $((\rceil(B = 1)) \Rightarrow \rceil(A = 1)) = 1$, то есть $((B = 0) \Rightarrow (A = 0)) = 1$. Это означает, что для доказательства теоремы $A \Rightarrow B$ достаточно установить, что из ложности B следует ложность A.

A	$\rceil A$	B	$\rceil B$	$A \Rightarrow B$	$\rceil B \Rightarrow \rceil A$
1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1

Докажем например, что, если две прямые, лежащие в некоторой плоскости, параллельны третьей прямой, лежащей в этой же плоскости, то они параллельны друг другу.

Доказательство. Допустим противное, т.е. то, что прямые a и b не параллельны друг другу. Это означает, что они пересекаются в некоторой точке C. Тогда выходит, что через точку C проходят две прямые a и b, параллельные третьей прямой d. Но, согласно одной из аксиом геометрии, через точку C, не лежащую на прямой d можно провести не более одной прямой, параллельной d. Противоречие. Следовательно, наше допущение неверно, т.е. прямые a и b не могут быть непараллельными. Значит, прямые a и b параллельны.

23. Применяя метод доказательства от противного, докажите следующие утверждения:

а) при любом натуральном k равенство $k(k+1) = 27381$ неверно;

б) не существует треугольника: 1) с углами 40°, 60°, 70°; 2) со сторонами 7, 10, 18 см.;

в) не существует такого целого числа, которое при делении на 21 даёт в остатке 1, а при делении на 11 даёт в остатке 3;

г) если натуральное число m таково, что m^2 нечётно, то m — нечётное число;

д) если натуральные числа m и n таковы, что mn — нечётное число, то m и n — нечётные числа;

е) если $f(x)$ — возрастающая функция, то из неравенства $f(x_2) \leqslant f(x_1)$ следует неравенство $x_2 \leqslant x_1$.

Задачи для решения

1. Построить множества $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если:

а) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 6x + 8 < 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x < 0\}$;

б) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 <\mid x-3 \mid \leqslant 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \ 2 \mid x \mid < 3\}$;

в) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid \ |x-3| \leqslant 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid \mid 2x-3 \mid < 10\}$.

2. Доказать, что для любых множеств A,B,C справедливо:
а)$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; б)$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
в)$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; г)$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
д)$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

3. Установите, в каком отношении ($X \subset Y$, $X \supset Y$ или $X = Y$) находятся множества X и Y, если:
а)$X = A \setminus (B \cup C)$; $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
б)$X = (A \cap B) \setminus C)$; $Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;
в)$X = A \cup (B \setminus C)$; $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
г)$X = A \setminus (B \cup C)$; $Y = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

4. Докажите, что:
а)$(X \subset Y) \Leftrightarrow (X \cup Y = Y) \Leftrightarrow (X \cap Y = X)$;
б)$(X \subset Z) \wedge (Y \subset Z) \Leftrightarrow (X \cup Y) \subset Z$;
в)$(Z \subset X) \wedge (Z \subset Y) \Leftrightarrow Z \subset (X \cap Y)$.

5. По мишени произведено три выстрела. Пусть P_k — высказывание «мишень поражена k–м выстрелом». Что означают следующие высказывания?
а)$P_1 \vee P_2 \vee P_3$; б)$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$; в)$(\overline{P_1} \vee \overline{P_2}) \wedge \overline{P_3}$.

6. Какие из высказываний P,Q,R должны быть истинными, а какие ложными, чтобы высказывание $(\overline{(P \vee P)} \wedge Q) \Rightarrow R$ было истинным?

7. На вопрос, кто из трёх студентов изучал логику, был получен правильный ответ: если изучал логику первый студент, то её изучал и третий, и неверно что, если изучал логику второй студент, то изучал её и третий? Кто изучал логику?

8. На множестве однозначных натуральных чисел даны два предиката: $P(n)$ =(число 3 — делитель числа n); $Q(n) = (n \leqslant 6)$. Найти множество истинности предложений:

а)$P(n) \vee Q(n)$; б)$P(n) \wedge \overline{Q(n)}$; в)$\overline{P(n) \Rightarrow Q(n)}$.

Глава 2

Действительные числа

Построение математической теории немыслимо без принятия некоторых исходных предложений в качестве аксиом. Математический анализ основывается (помимо теории множеств, которую мы не рассматриваем, ограничиваясь «наивными» сведениями о них) на аксиомах действительных чисел. Единства в перечислении этих аксиом нет, да и вряд ли оно будет когда-либо достигнуто, ибо дело вкуса — принять в качестве аксиомы одно предложение или равносильное ему другое. Имеются два подхода в описании теории действительных чисел. Первый из них основывается на аксиоматике множества натуральных чисел, а во втором в качестве аксиом сразу берутся «самые главные» свойства чисел. Первый путь более трудоёмок для начинающего изучать математический анализ и без обстоятельного мотивирования не очень ему интересен, поскольку приходится («необоснованно трудно») доказывать много фактов, «хорошо известных» и «понятных» каждому школьнику. К тому же, на этом пути приходится принимать в качестве аксиом принцип Архимеда и, в особенности, принцип математической индукции, которые воспринимаются не легче аксиомы непрерывности множества действительных чисел. Мы будем опираться на аксиомы сразу всего множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Не станем перечислять все аксиомы $\mathbb{R}$. Все они, за исключением одной, аксиомы непрерывности $\mathbb{R}$, позволяют, в полном соответствии со школьными правилами, складывать, умножать, и делить числа (при том же школьном ограничении: на 0 делить нельзя), сравнивать их между собой отношениями «больше», «меньше» или «равно». На аксиоме же непрерывности $\mathbb{R}$ следует остановиться подробнее по двум причинам. Во–первых, она не упоминалась в школе. А, во–вторых, все главные теоремы математического анализа существенным образом опираются именно на эту аксиому.

> **Аксиома непрерывности $\mathbb{R}$.** *Пусть X и Y — два подмножества множества $\mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим условиям:*
> 1) $X \neq \varnothing$ *и* $Y \neq \varnothing$;
> 2) *если* $x \in X$ *и* $y \in Y$, *то* $x \leqslant y$.
> *Тогда существует число $c \in \mathbb{R}$, обладающее свойством: если $x \in X$ и $y \in Y$, то $x \leqslant c \leqslant y$.*

Число c, о котором говорится в сформулированной аксиоме, удобно называть **числом, разделяющим множества X и Y**. Удобно также пользоваться «образным» описанием условий 1) и 2), говоря, что **непустое множество X лежит левее непустого множества Y**. С учётом всех этих сокращений аксиому непрерывности $\mathbb{R}$ кратко можно сформулировать следующим образом:

> *для каждых двух непустых подмножеств X и Y множества $\mathbb{R}$, таких, что X лежит левее Y, существует число $c \in \mathbb{R}$, разделяющее эти множества.*

Выше уже утверждалась важность этой аксиомы для курса анализа. Но, чтобы убедиться в её исключительности уже сейчас, сделаем отступление от общей теории к вычислительной практике.

Как известно, ещё из школы, арифметическим квадратным корнем из числа a называется такое неотрицательное число b, для которого $b^2 = a$. Поскольку $b^2 \geqslant 0$(рассматриваются числа, изучаемые в школе), то ясно, что арифметический корень из отрицательного числа a не существует. Поэтому, если при вычислении $\sqrt{a}$ из числа $a = 10^{-6}$ допустить малую абсолютную погрешность, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-6}$ и взять $a = -10^{-6}$, то задача из разрешимой обратится в неразрешимую. Таким образом мы приходим к выводу, что в задаче нахождения $\sqrt{a}$ нужно быть точным при выборе числа a, ибо погрешность выбора может сделать задачу неразрешимой.

Приняв к сведению полученный вывод, обратимся к «вычислению» $\sqrt{2}$. Как мы знаем, существуют $\sqrt{1}$ и $\sqrt{4}$. При замене 1 или 4 на 2 мы допускаем абсолютную погрешность, значительно большую, чем в приведённом выше примере. Почему же такая погрешность, в тысячи раз большая, чем в первом примере, оставляет задачу извлечения корня разрешимой? — это вопрос, на который школа не даёт ответа.

Условие $a \geqslant 0$ существования арифметического корня, как мы видели, является необходимым, но, строго говоря, не обязано быть достаточным. Во всяком случае достаточность его требует доказательства. О невозможности указать число b такое, что $b^2 = 2$, говорит и весь школьный практический опыт: какую бы дробь мы не взяли в качестве b, точного равенства $b^2 = 2$ не будет, это знали ещё древние греки. Правда, в школе, говорилось, что есть некая «бесконечная десятичная непериодическая дробь», квадрат которой даёт точное равенство. Но всё равно остаётся неясным, как доказать существование этой дроби. То, что речь должна вестись именно о доказательстве понятно, ибо предъявить упомянутую дробь записью невозможно — процесс выписывания «значащих цифр» по времени растянется на такой срок, которым не располагает человечество, не говоря уже об отдельном человеке.

Итак, ещё раз подчеркнём, доказать существование числа $\sqrt{2}$, пользуясь одними только аксиомами сложения, вычитания, умножения, сравнения чисел и их связей, нельзя, ибо все эти аксиомы справедливы и для множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а число $\sqrt{2}$ если и существует, то уж точно не является рациональным числом (докажите это). Значит, гарантировать существование $\sqrt{2}$ должно ещё какое-то аксиоматическое свойство множества $\mathbb{R}$. Таким свойством как раз и является аксиома непрерывности $\mathbb{R}$.

Отступление в сторону школы продемонстрировало отличие «строгих» рассуждений математического анализа от обычных школьных. Теперь придётся научиться обосновывать многие «очевидные» для школы утверждения. Например,

$$(a + b) + (c + d) = a + (b + c + d) = ((a + b) + c) + d.$$

Если сказанное не повергло Вас в ужас, то Вы не удивитесь тому, что в теме «Действительные числа» большинство задач — теоретические. С вычислениями уже немало пришлось повозиться в школе, а сейчас следует постараться обосновать их правильность и разумность.

Пример 1. Доказать, что $(a + b + c) + d = (a + b) + (c + d)$.
► Согласно аксиоме ассоциативности сложения, $(x + y) + z = x + (y + z)$. Считая в последнем равенстве, что $x = a + b$, $y = c$, $z = d$, будем иметь:

$$(a + b + c) + d = ((a + b) + c) + d = (a + b) + (c + d),$$

то есть

$$(a + b + c) + d = (a + b) + (c + d). \blacksquare$$

Пример 2. Доказать, что $(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$.
► Используя уже доказанное равенство примера 1 и свойство коммутативности операции сложения для двух слагаемых, будем иметь:

$(a+b)+(c+d) = [\text{пример1}] = (a+b+c)+d = [\text{ассоциативность сложения}] =$

$= (a + (b + c)) + d =$ [коммутативность двух слагаемых] $= (a + (c + b)) + d =$
$=$ [ассоциативность сложения] $= (a+c+b)+d =$ [пример1] $= (a+c)+(b+d)$. ■

> *Подмножество E множества действительных чисел называется* **индуктивным**, *если оно с каждым своим элементом $x \in E$ содержит в качестве элемента число $x + 1$.* **Пересечение** *всех индуктивных подмножеств множества $\mathbb{R}$, содержащих 1 в качестве элемента, называется множеством натуральных чисел и обозначается через $\mathbb{N}$.*

Из последнего определения следует утверждение, которое называют **принципом математической индукции**: если $E \subset \mathbb{R}$ таково, что 1) $1 \in E$ и 2) множество E — индуктивное, то $\mathbb{N} \subset E$ (т.е. E содержит все натуральные числа).

Каждый элемент множества $\mathbb{N}$ называется натуральным числом. Согласно определению $\mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}$, т.е. число 1 — натуральное. Натуральным является число $1+1$, которое обозначается 2; число $2+1$ обозначается через 3, и т.д. Таким образом, по определению $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$; $4 = 3 + 1$; $5 = 4 + 1$, и т.д. Условно пишут: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Пример 3. Доказать, что $2 + 3 = 5$.
► Пользуясь определением 2, 4, 5, а также аксиомами коммутативности и ассоциативности операции сложения, будем иметь:

$$2 + 3 = 3 + 2 = 3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1 = 4 + 1 = 5. \blacksquare$$

Пример 4. Доказать, что сумма двух натуральных чисел является числом натуральным, т.е. если $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, то $m + n \in \mathbb{N}$.
► Для произвольного фиксированного числа $n \in \mathbb{N}$ положим $E = \{m \in \mathbb{N} \mid n + m \in \mathbb{N}\}$. Тогда $1 \in \mathbb{N}$, так как в силу индуктивности $\mathbb{N}$, $n + 1 \in \mathbb{N}$. Покажем, что E — индуктивное множество.

Пусть $x \in E$, т.е. $x \in \mathbb{N}$ и $n + x \in \mathbb{N}$. Рассмотрим число $n + (x + 1)$. Согласно аксиоме ассоциативности сложения $n + (x + 1) = (n + x) + 1$. Так как $n + x \in \mathbb{N}$, а множество $\mathbb{N}$ — индуктивно, то $(n + x) + 1 \in \mathbb{N}$. Значит, $n + (x + 1) \in \mathbb{N}$. Кроме того, из включения $x \in \mathbb{N}$ и индуктивности $\mathbb{N}$ следует, что $x + 1 \in \mathbb{N}$. Таким образом, мы доказали, что если $x \in \mathbb{N}$, то $x+1 \in \mathbb{N}$ и $n+(x+1) \in \mathbb{N}$. Выполнение двух последних включений означает, согласно определению множества E, что $x + 1 \in E$. Итак, из $x \in E$ следует, что $x + 1 \in E$. Значит, множество E — индуктивное. Но тогда, согласно принципу математической индукции, $\mathbb{N} \subset E$. С другой стороны, согласно определению E, $E \subset \mathbb{N}$. Таким образом, $E = \mathbb{N}$, т.е. $n + m \in \mathbb{N}$ при каждом $m \in \mathbb{N}$. ■

Пример 5. Доказать **принцип Архимеда**: для каждого действительного числа a существует такое натуральное число n, что $a < n$.
▶ Предположим противное, т.е. пусть существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $a > n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда множество $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}(y \geqslant n)\}$ не является пустым (поскольку $a \in Y$). Положим $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}(x < n)\}$.

Ясно, что $X \neq \varnothing$ (например, $1 \in X$, поскольку $\exists n = 2$, большее 1). Каждое действительное число z принадлежит либо X либо Y, т.е. $X \cup Y = \mathbb{R}$.

Легко проверить, что X лежит левее множества Y. В самом деле, пусть $x \in X$ и $y \in Y$. Так как $x \in X$, то и $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $x < n$. С другой стороны, из включения $y \in Y$ следует, что $y \geqslant m$ для $\forall m \in \mathbb{N}$ и, в частности, $y \geqslant n$. Остаётся воспользоваться транзитивностью отношения $\leqslant$: $x < n$ и $n \leqslant y \Rightarrow x < y$ (равенство $x = y$ ведёт к противоречию: $n < n$).

Согласно аксиоме непрерывности, существует число $c \in \mathbb{R}$, разделяющее множества X и Y, т.е. такое, что $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant c \leqslant y$. Рассмотрим число $(c - 1)$. Оно не может принадлежать Y (от противного: если $y = c - 1 \in Y$, то в силу неравенства $c \leqslant y$, $c \leqslant c - 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 0$, что неверно). Значит, $c - 1 \in X$ и, следовательно, существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что $c - 1 < n \Leftrightarrow c < n + 1$.

С другой стороны, рассмотрим число $c + 1$. Оно не может принадлежать X и, значит, принадлежит Y. Следовательно, для любого $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $m \leqslant c + 1$, т.е. $m - 1 \leqslant c$. Полагая $m = n + 2$, где n — число, выбранное выше, получаем, что $n + 1 \leqslant c$. Таким образом, $n + 1 \leqslant c$ и $c < n + 1$, т.е. $n + 1 < n + 1$. Противоречие. Оно было получено из предположения, что $Y \neq \varnothing$. Следовательно, $Y = \varnothing$. А так как $X \cup Y = \mathbb{R}$, то $X = \mathbb{R}$, т.е. свойство, характеризующее элементы множества X, выполняется для всех действительных чисел. ■

Пример 6. Доказать, что для каждого положительного числа ε существует такое натуральное число n_0, что для всех натуральных чисел n, удовлетворяющих условию $n \geqslant n_0$, выполняется неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
▶ Согласно принципу Архимеда, существует натуральное число n_0, такое, что $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. Если n — другое натуральное число, большее или равное n_0, то $n \geqslant n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ и, значит, $n > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\frac{1}{\varepsilon} < n$. ■

Пример 7. Доказать, что существует такое действительное положительное число s, что $s^2 = 2$.

▶ Пусть

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0 \text{ и } x^2 \leqslant 2\} \quad \text{и} \quad Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \text{ и } y^2 \leqslant 2\}.$$

Так как $1 \in X$ и $2 \in Y$, то X и Y — непустые множества. Далее, если $x \in X$ и $y \in Y$, то $x^2 \leqslant 2$ и $2 \leqslant y^2$, т.е. $x^2 - y^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) \leqslant 0$. Поскольку $x \geqslant 0$ и $y > 0$, то $x + y > 0$ и, следовательно $x - y \leqslant 0$, т.е. $x \leqslant y$. Таким образом, множество X лежит левее множества Y. Согласно аксиоме непрерывности $\mathbb{R}$ существует число s, разделяющее множества X и Y, т.е. такое число, что для каждого $x \in X$ и каждого $y \in Y$ выполняются неравенства $x \leqslant s \leqslant y$.

Так как $s \geqslant 1$(ибо $1 \in X$), то число s — положительное. Пусть n — произвольное натуральное число. Тогда $\frac{1}{n} \leqslant 1$ и, следовательно, $s - \frac{1}{n} \geqslant 0$. Каждое неотрицательное действительное число принадлежит либо X, либо Y. Но $s - \frac{1}{n}$ не может принадлежать Y(поскольку, в противном случае, было бы верным неравенство $s \leqslant s - \frac{1}{n}$, то есть $\frac{1}{n} \leqslant 0$, что неверно). Значит, $s - \frac{1}{n} \in X$, и, следовательно,

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant 2 \Leftrightarrow s^2 - \frac{2}{n} \cdot s + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 \Rightarrow s^2 - \frac{2s}{n} < 2 \Rightarrow s^2 - 2 < \frac{2s}{n} \Rightarrow \frac{s^2-2}{2s} < \frac{1}{n}.$$

Итак, для любого натурального числа n выполняется неравенство $\frac{s^2-2}{2s} < \frac{1}{n}$. Согласно примеру 6, для любого положительного числа ε существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Значит, $\frac{s^2-2}{2s} < \varepsilon$, где ε — любое положительное число. Отсюда следует, что $\frac{s^2-2}{2s} \leqslant 0$ (от противного: если бы $\frac{s^2-2}{2s}$ было положительным, то взяв $\varepsilon = \frac{s^2-2}{2s}$, мы получили бы невозможное неравенство $\varepsilon < \varepsilon$). Таким образом, заключаем, что: $s^2 - 2 \leqslant 0$, т.е., $s^2 \leqslant 2$.

С другой стороны, при любом натуральном n, $s + \frac{1}{n} \in Y$(так как $s + \frac{1}{n}$ не может принадлежать X) и, следовательно,

$$\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 \geqslant 2 \Leftrightarrow s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \geqslant 2 \Leftrightarrow s^2 + \frac{2s}{n} \geqslant 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2 + \frac{3s}{n} \geqslant 2 \Leftrightarrow \frac{s^2-2}{3s} \geqslant -\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{2-s^2}{3s} \leqslant \frac{1}{n}.$$

(Мы воспользуемся тем, что $\frac{1}{n} \leqslant 1$ и $1 \leqslant s$, а потому $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{s}{n}$). Из последнего неравенства, справедливого при любом $n \in \mathbb{N}$, с помощью примера 6 заключаем, что $\frac{2-s^2}{3s} \leqslant 0$, т.е. $2 - s^2 \leqslant 0$ или $s^2 \geqslant 2$. Итак, $s^2 \leqslant 2$ и $s^2 \geqslant 2$. Значит $s^2 = 2$, и требуемое утверждение доказано. ■

Пример 8. Доказать, что существует единственное положительное число s, квадрат которого равен 2.(Конечно же это число называется арифметическим корнем из 2 и обозначается $\sqrt{2}$).

► Существование числа s было доказано в примере 7. Поэтому остаётся доказать лишь его единственность. Предположим противное, т.е. предположим, что найдётся ещё одно положительное число t такое, что $t^2 = 2$. Из равенств $s^2 = 2$ и $t^2 = 2$ следует, что $s^2 - t^2 = 0$, т.е. $(s+t)(s-t) = 0$ Так как $s > 0$ и $t > 0$, то $s + t > 0$, т.е. $s + t \neq 0$ Из предположения, что $t \neq s$ следует, что $(s+t)(s-t) \neq 0$, т.е. $0 \neq 0$. Противоречие. Значит, допущение неверно, и, следовательно, существует единственное положительное число $s = t$, квадрат которого равен 2. ■

Если a и b — произвольные действительные числа, то, согласно аксиоме сравнения, $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Если выполняются оба неравенства $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ то, согласно аксиоме тождества, $a = b$. Значит, если a и b — два неравных друг другу действительных числа, то выполняется в точности одно из двух неравенств $a < b$ или $b < a$. Следовательно, для любых двух неравных действительных чисел a и b одно из этих чисел больше второго. Это число называется наибольшим из чисел a и b. Оно обозначается $\max\{a, b\}$. По определению также считается, что $\max\{a, a\}$=$\max\{a\} = a$. Таким образом, для любых двух чисел a и b определено единственное число $\max\{a, b\}$.

Из определения $\max\{a, b\}$ следует, что $\max\{a, b\} \geqslant a$ и $\max\{a, b\} \geqslant b$.

Для трёх чисел a, b и c по определению считается, что

$$\max\{a, b, c\} = \max\{\max\{a, b\}, c\}.$$

Это определение корректно, так как

$$\max\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{\max\{a, c\}, b\} = \dots$$

(убедитесь сами в справедливости выписанных равенств). И вообще, по индукции, считается, что

$$\max\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\} = \max\{\max\{a_1, \dots, a_{n-1}\}, a_n\} \qquad (2.1)$$

Очевидное существование (устанавливается по индукции) числа

$$\max\{\max\{a_1, \dots, a_{n-1}\}, a_n\}$$

и возможность определения

$$\max\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$$

равенством (2.1) говорит о справедливости следующего утверждения:

Предложение 1. *Каждое конечное множество действительных чисел имеет наибольшее число.*

В частности, отсюда заключаем, что каждое конечное подмножество множества натуральных чисел имеет наибольшее натуральное число.

В общем случае, если $E \subset \mathbb{R}$, то **наибольшим числом** на множестве E называется такое число $s \in \mathbb{R}$, что:

1) $s \in E$ и

2) если $x \in E$, то $x \leqslant s$.

Наибольшее число на множестве E, если оно существует, обозначается через $\max E$.

Разумеется, наибольшее число существует не для каждого множества $E \subset \mathbb{R}$. Например, если $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, то наибольшего числа на множестве E нет (докажите это).

Предлагаем в качестве упражнения сформулировать определение наименьшего числа на множестве E (обозначается $\min E$) и доказать, что каждое конечное множество действительных чисел имеет наименьшее число.

Напомним, что множество E называется **конечным**, если существует натуральное $n \in \mathbb{N}$ такое, что множество E биективно множеству

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте принцип Архимеда.

2. Опираясь на принцип Архимеда, докажите, что каждое действительное число имеет **целую** часть, т.е. для $\forall a \in \mathbb{R}$ существует целое число $n := [a]$ такое, что $n \leqslant a < n + 1$.

Замечание. Для целой части a используется и другое обозначение $E(a)$. (E — первая буква от Enter — целый).

3. Докажите единственность целой части числа $a \in \mathbb{R}$.

4. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Согласно утверждению задачи 2, существует, притом единственная, целая часть числа $10^m \cdot a$, т.е. существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $n \leqslant 10^m \cdot a < n + 1$. Следовательно, $n \cdot 10^{-m} \leqslant a < n \cdot 10^{-m} + 10^{-m}$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

Продумайте сказанное и убедитесь, что с каждым действительным числом a можно связать две последовательности $(r_m)_{m=1}^{\infty}$, $(r'_m)_{m=1}^{\infty}$, рациональных чисел r_m и $r'_m \in \mathbb{Q}$ такие, что:

1) при каждом $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство неравенство $r_m \leqslant a \leqslant r'_m$;

2) последовательность $(r_m)_{m=1}^{\infty}$ — неубывающая, т.е. для $\forall m \in \mathbb{N}(r_m \leqslant r_{m+1})$, а последовательность $(r'_m)_{m=1}^{\infty}$ — невозрастающая, т.е. для $\forall m \in \mathbb{N}(r'_m \geqslant r'_{m+1})$;

3) при каждом $m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $r'_m \leqslant r_m + 10^{-m}$;

4) для каждого $\varepsilon > 0$ неравенству $|r'_m - r_m| < \varepsilon$ не удовлетворяет разве лишь конечная совокупность из чисел r_1, r'_1, r_2, r'_2, $\ldots$, т.е. существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при каждом $m \geqslant N$ выполняется неравенство $|r'_m - r_m| < \varepsilon$.

Последовательности $(r_m)_{m=1}^{\infty}$ и $(r'_m)_{m=1}^{\infty}$, существование которых утверждается в задаче 4, называются соответственно последовательностью **нижних** и последовательностью **верхних рациональных приближений действительного числа** a.

5. Число вида $n \cdot 10^{-m}$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$, называется **десятичной дробью**. Ясно, что десятичная дробь $r = n \cdot 10^{-m}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}_+$) является рациональным числом. Если, к тому же, число r — целое, то говорят, что **десятичная дробь** r **имеет ранг ноль**. В случае, если десятичная дробь $r = n \cdot 10^{-m}$ не является целым числом, то её **рангом** называется наименьшее натуральное число k , при котором число $r \cdot 10^k$ является целым.

а) Установить, какие из следующих чисел являются десятичными дробями:
$$-12;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{5};\ -1,4;\ 0,235;\ 0,1(2);\ 210 \cdot 10^{-2}.$$

б) Указать ранг каждой десятичной дроби из задания а).

в) Доказать, что для каждого действительного числа a и для каждого неотрицательного целого числа k существует, притом единственная десятичная дробь r_k ранга k такая, что $r_k \leqslant a < r_k + 10^{-k}$.

Обсуждение задачи. Существование десятичной дроби r_k ранга k фактически уже доказано в задаче 4, так что от Вас требуется только повторить некоторые рассуждения. Иное дело — единственность дроби r_k. Здесь изначальная ссылка на единственность целой части действительного числа не подходит, ибо целая часть даёт один способ нахождения дроби r_k, и нет гарантии в том, что другой какой-нибудь способ не приведёт ещё к одной дроби r'_k. Вообще следует заметить, что если r_k и r'_k — две десятичные дроби такие, что $r_k \leqslant a < r_k + 10^{-k}$ и $r'_k \leqslant a < r'_k + 10^{-k}$, то равенство $r_k = r'_k$ не обязано иметь место. Но если дополнительно известно, как в обсуждаемой задаче, что дроби r_k и r'_k имеют один и тот же ранг k, то равенство $r_k = r'_k$ выполняется. Именно это и предлагается в задаче доказать. ∎

6. Пусть a и b — два действительных числа, $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел такая, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $r_k \leqslant a < r_k + 10^{-k}$ и $r_k \leqslant b < r_k + 10^{-k}$. Доказать, что $a = b$.

Указание. Докажите, что при любом $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|a - b| < 10^{-k}$, а затем с помощью принципа Архимеда установите, что $|a - b| < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. (Напомним, **модулем** действительного числа x называется число $|x| := \max\{x; -x\}$.) ∎

7. Утверждения задач 5 и 6 позволяют взаимно однозначно связать с каждым действительным числом a последовательность $(r_k)_{k=0}^{\infty}$ десятичных дробей r_k ранга k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, такую, что при любом $k \in \mathbb{Z}_+$ выполняются неравенства: $r_k \leqslant a < r_k + 10^{-k}$. Рациональные числа r_k и $r'_k := r_k + 10^{-k}$ называются, соответственно, **нижним** и **верхним десятичными приближениями ранга** k для числа a. Укажите такие приближения рангов $k = 0$, $k = 1$ и $k = 2$ для каждого из чисел, указанных в задании 5 а).

8. Пусть a — фиксированное действительное число. Обозначим через a_0 целую часть этого числа ($a_0 := [a]$). По свойству целой части, $a_0 \leqslant a < a_0 + 1$, и, значит, число $a - a_0$ является является неотрицательным и строго меньше 1. Поэтому число $10 \cdot (a - a_0)$ — неотрицательное и строго меньше 10. Следовательно, его целая часть $a_1 := [10 \cdot (a - a_0)]$ находится среди чисел $0, 1, \ldots, 9$, т.е. $a_1 \in \{0,\ 1,\ \ldots, 9\}$. В силу свойства целой части выполняются неравенства

$$a_1 \leqslant 10 \cdot (a - a_0) < a_1 + 1 \;\Leftrightarrow\; a_0 + \frac{a_1}{10} \leqslant a < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}.$$

Из этих неравенств следует, что

$$0 \leqslant a - a_0 - \frac{a_1}{10} < \frac{1}{10}, \text{ т.е. } 0 \leqslant 10^2 \cdot (a - a_0 - a_1 \cdot 10^{-1}) < 10.$$

Пусть $a_2 := [10^2 \cdot (a - a_0 - a_1 \cdot 10^{-1})]$ — целая часть числа $10^2 \cdot (a - a_0 - a_1 \cdot 10^{-1})$. Тогда $a_2 \in \{0,\ 1,\ \ldots, 9\}$ и, в силу свойства целой части, справедливы неравенства:

$$a_2 \leqslant 10^2 \cdot (a - a_0 - a_1 \cdot 10^{-1}) < a_2 + 1 \Leftrightarrow a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leqslant a < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}.$$

Построение последующих чисел a_3, a_4 и т.д. ($a_k \in \{0,\ 1,\ \ldots, 9\}$ при $k \in \mathbb{N}$) проведём по индукции: если числа $a_1, \ldots, a_k \in \{0,\ 1,\ \ldots, 9\}$, обладающие тем свойством, что

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k}{10^k} \leqslant a < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k + 1}{10^k},$$

уже построены, то по определению считаем

$$a_{k+1} := [10^{k+1} \cdot (a - a_0 - a_1 \cdot 10^{-1} - \cdots - a_k \cdot 10^{-k})].$$

а) Покажите, что $a_{k+1} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ и выполняются неравенства

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} \leqslant a < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_{k+1} + 1}{10^{k+1}}.$$

б) Напомним, что полуинтервалом $[\alpha; \beta[$ на $\mathbb{R}$, где α и β — фиксированные действительные числа, называется множество

$$[\alpha; \beta[:= \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leqslant x < \beta\}.$$

Опишите геометрическим языком способ построения введённых выше чисел $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $k \in \mathbb{N}$ (их называют **цифрами**, точнее, **значащими цифрами дробной части числа** a; почему — станет ясно после упражнения 10). Верно ли, что число a_{k+1} есть уменьшенный на 1 номер той десятой части полуинтервала

$$[a - a_0 - a_1 \cdot 10^{-1} - \cdots - a_k \cdot 10^{-k}; \; a - a_0 - a_1 \cdot 10^{-1} - \cdots - (a_k + 1) \cdot 10^{-k}[,$$

которая содержит число a?

в) Если изначально выбранное число a — положительное, то, в соответствии со школьными обозначениями десятичных дробей, можно записать

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} = a_0, a_1 \ldots a_k.$$

Докажите, что если $a > 0$, то числа $r_k := a_0, a_1 \ldots a_k$ и $r'_k := r_k + 10^{-k}$ можно трактовать как, соответственно, нижнее и верхнее десятичные приближения ранга k для числа a.

г) Найдите первые три нижних и первые три верхних десятичных приближения чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}/3$.

9. Пусть заданы некоторые целое число $a_0 \in \mathbb{Z}$ и целые неотрицательные числа a_1, a_2, …, такие, что $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ при $k \in \mathbb{N}$. Введём множества

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{N}(x \leqslant a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + \cdots + a_k \cdot 10^{-k})\},$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{N}(a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + \cdots + a_k \cdot 10^{-k} < y)\}.$$

а) Докажите, что множества X и Y — непустые и множество X лежит левее множества Y.

б) Пусть $a \in \mathbb{R}$ — то число, которое разделяет множества X и Y. Докажите, что:

(i) число a — единственное, т.е. если $b \in \mathbb{R}$ — ещё одно число, разделяющее X и Y, то $a = b$;

(ii) $a_0 = [a]$;

(iii) числа a_1, a_2, ..., являются значащими цифрами числа дробной части числа a.

Обсуждение задач 8 и 9. Задачи 8 и 9 показывают, что множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех упорядоченных наборов вида $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$, в которых $a_0 \in \mathbb{Z}$ и $a_k \in \{0,\ 1,\ \dots, 9\}$ при $k \in \mathbb{N}$. А именно, набор $(a_0, a_1, \dots)$, сопоставляемый числу $a \in \mathbb{R}$, строится индуктивно:

$$\begin{aligned}
&a_0 = [a],\\
&a_1 = [10 \cdot (a - a_0)],\\
&a_2 = [10^2 \cdot (a - a_0 - a_1 \cdot 10^{-1})],\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&a_k = [10^k \cdot (a - a_0 - a_1 \cdot 10^{-1} - a_2 \cdot 10^{-2} \cdots - a_{k-1} \cdot 10^{-k+1})], \text{ и т.д.}
\end{aligned}$$

Все числа a_0, a_1, a_2, ..., составляющие указанный набор, можно разделить на две группы. Первая из них состоит всего лишь из одного числа a_0 — целой части числа a. Во вторую отнесём числа a_1, a_2, a_3, ...; все они, в отличие от a_0, обязательно неотрицательны и не превосходят 9. Если теперь условиться отделять указанные группы занятой и договориться записывать a_1 на первом месте после запятой, a_2 — на втором и т.д., а число a_0 записывать слева от запятой, то вместо набора $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ у нас возникает запись

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_k \dots \tag{2.2}$$

очень похожая на школьную запись десятичной дроби, только содержащая бесконечное множество чисел после запятой. Ввиду похожести выражения (2.2) на десятичную дробь, его принято называть **бесконечной десятичной дробью**. Учитывая указанное выше взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех наборов

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots) =: a_0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$$

описанного выше типа, можно отождествлять (что часто и делается) действительное число a с бесконечной десятичной дробью $a_0, a_1a_2 \dots a_k \dots$, однозначно представляющей это число. ■

10. Пусть a — некоторое действительное число и $[a]$ — его целая часть. Число $\{a\} := a - [a]$ называется **дробной частью** числа a. (Иногда дробную часть числа a обозначают $F(a)$; F — первая буква от англ. fraction — дробь).

а) Найдите целую и дробную части следующих чисел: $1,2$; $-1,2$; $1/3$; $-1/3$.

б) Докажите, что если действительное число a представляется бесконечной десятичной дробью $a_0, a_1a_2 \dots a_k \dots$, то дробная часть $\{a\}$ числа a представляется бесконечной десятичной дробью вида $0, a_1a_2 \dots a_k \dots$.

11. Докажите следующее *свойство плотности множества рациональных чисел*: для каждого $a \in \mathbb{R}$ и при любом $\varepsilon > 0$ существует рациональное число $r \in \mathbb{Q}$ такое, что $|a - r| < \varepsilon$.

Обсуждение задачи. Если x и y — два действительных числа, то $|x - y|$ трактуется как расстояние между точками (т.е. числами) x и y. С таким пониманием модуля свойство плотности $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$ означает, что к любому действительному числу можно сколь угодно близко приблизиться рациональным числом.

Отметим также простоту решения задачи при использовании представлений действительных чисел в виде бесконечных десятичных дробей. В самом деле, если $a_0, a_1a_2 \dots a_k \dots$ — бесконечная десятичная дробь, представляющая число a, то выберем такое $k \in \mathbb{N}$, что $10^{-k} < \varepsilon$, и положим

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_k}{10^k}.$$

В силу выбора k и неравенств, предшествующих заданию а) в упражнении 8, число r будет искомым. ■

Примеры решения задач

1. Доказать, что число $0,121221222122221\dots$ — иррациональное.

► Предположим, что число

$$\alpha = 0,1\underbrace{2}_{1}1\underbrace{22}_{2}1\underbrace{222}_{3}1\dots1\underbrace{22\dots2}_{n}1\dots$$

— рациональное. Тогда десятичная запись этого числа должна иметь период $T \neq 0$, состоящий из конечного числа цифр. (Почему?). Пусть период содержит m цифр, где $m \in \mathbb{N}$. В записи числа α имеется участок, состоящий из $3m$ одинаковых цифр, равных 2, а потому в периоде T должны быть только одни двойки. Значит, начиная с некоторого номера K, все цифры числа α равны 2, что противоречит условию: десятичная дробь α содержит бесконечно много цифр, равных 1. ■

2. Докажите, что сумма и разность рационального α и иррационального числа β — число иррациональное.

► Предположим, что сумма $\gamma = \alpha + \beta$ — есть рациональное число. Тогда $\beta = \gamma - \alpha$ — является рациональным числом как разность рациональных чисел. Противоречие: по условию задачи число β — иррациональное. Вторая часть задачи доказывается аналогично. ■

3. Может ли сумма иррациональных чисел быть рациональным числом?

► Может, например, сумма чисел $\alpha = 0,1010010001\ldots$ и $\beta = 1 - \alpha$. ■

4. Доказать, что число $\sqrt{3}$ — число иррациональное.

► Допустим, что число $\sqrt{3}$ — число рациональное. Тогда его можно представить в виде дроби $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые натуральные числа,

$$3 = \frac{p^2}{q^2}; \quad p^2 = 3q^2.$$

Тогда из этого равенства следует (объясните почему?), что p делится на 3, т.е. $p = 3p_0$. Поэтому $(3p_0)^2 = 3q^2$, т.е. $3p_0^2 = q^2$. Из последнего равенства следует что и q делится на 3. Но тогда числа p и q не являются взаимно простыми числами. Следовательно, наше допущение неверное — число $\sqrt{3}$ должно быть иррациональным. ■

5. Доказать, что $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ — число иррациональное.

► Допустим, что это число — рациональное. Тогда рациональным является $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ и сумма $(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}$. Но число $2\sqrt{3}$ — число иррациональное (объясните, почему?). Таким образом, предположение о рациональности числа $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ привело к противоречию. Следовательно, число $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ — иррациональное число. ■

6. Найти все рациональные значения x, при которых $y = \sqrt{x^2 + x - 3}$ является рациональным числом.

► Пусть x и y — рациональные числа. Обозначим рациональное число $y - x$ через q, т.е. положим $y = x + q$. Тогда из равенства $\sqrt{x^2 + x - 3} = x + q$ следует, что

$$x = \frac{3 + q^2}{1 - 2q} \quad (1 - 2q \neq 0; \text{ почему?}).$$

Итак, если x и y — рациональные числа, то найдётся рациональное число q, $q \neq 1/2$, такое, что

$$x = \frac{3+q^2}{1-2q} \quad \text{и} \quad y = \left[= \frac{3+q^2}{1-2q} + q =\right] = \frac{3+q-q^2}{1-2q}.$$

Иными словами, если требуемые числа существуют, то x должен иметь вид $\frac{3+q^2}{1-2q}$. Покажем обратное, т.е. покажем, что если $x = \frac{3+q^2}{1-2q}$, где q — рациональное число, отличное от $1/2$, то число $y = \sqrt{x^2+x-3}$ существует и является рациональным. Действительно, как показывают простые вычисления,

$$y = \sqrt{x^2+x-3} = \sqrt{\left(\frac{3+q^2}{1-2q}\right)^2 + \left(\frac{3+q^2}{1-2q}\right) - 3} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{q^2-q-3}{1-2q}\right)^2} = \left|\frac{q^2-q-3}{1-2q}\right| = \left|\frac{-q^2+q+3}{1-2q}\right| [= |x+q|]. \blacksquare$$

7. Сравнить действительные числа: а) $\frac{33}{7}$ и $\frac{227}{48}$; б) $\sqrt{7}$ и $\frac{45}{17}$; в) $0,3(14)$ и $0,314$; г) $0,313313331\ldots$ и $0,31311311131111\ldots$; д) $\sqrt{3}+2$ и $\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

► а) Можно сравнить две обыкновенные дроби, которыми являются эти два рациональных числа, приведением их к общему знаменателю:

$$\frac{33}{7} = \frac{33\cdot 48}{7\cdot 48} \text{ и } \frac{227}{48} = \frac{227\cdot 7}{48\cdot 7}, \text{ т.е. } \frac{33}{7} = \frac{1584}{7\cdot 48} \text{ и } \frac{227}{48} = \frac{1589}{48\cdot 7}.$$

Так как $1589 > 1584$, то $\frac{227}{48} > \frac{33}{7}$. А можно поступить иначе: найти для этих дробей несколько десятичных приближений:

$$\begin{array}{lcl} 4 \leqslant \frac{33}{7} < 5 & \qquad & 4 \leqslant \frac{227}{48} < 5 \\ 4,7 \leqslant \frac{33}{7} < 4,8 & & 4,7 \leqslant \frac{227}{48} < 4,8 \\ 4,71 \leqslant \frac{33}{7} < 4,72 & & 4,72 \leqslant \frac{227}{48} < 4,73 \end{array}$$

Из третьих приближений видно, что $\frac{227}{48} > \frac{33}{7}$.

б) Найдём для чисел $\sqrt{7}$ и $\frac{45}{17}$ несколько десятичных приближений:

$$\begin{array}{lcl} 2 \leqslant \sqrt{7} < 3 & \qquad & 2 \leqslant \frac{45}{17} < 3 \\ 2,6 \leqslant \sqrt{7} < 2,7 & & 2,6 \leqslant \frac{45}{17} < 2,7 \\ 2,64 \leqslant \sqrt{7} < 2,65 & & 2,64 \leqslant \frac{45}{17} < 2,65 \\ 2,645 \leqslant \sqrt{7} < 2,646 & & 2,647 \leqslant \frac{45}{17} < 2,648 \end{array}$$

Ясно, что $\frac{45}{17} > \sqrt{7}$.

в) Число $0,3(14) > 0,314$, так как пятое десятичное приближение снизу числа $0,3(14)$ равно $0,3141$ и оно больше числа $0,314$.

г) $0,313313331\cdots > 0,31311311131111\ldots$ так как пятое десятичное приближение снизу первого числа больше пятого десятичного приближения сверху для второго.

д) Для второго из заданных чисел десятичные приближения считать неудобно, поскольку сумма десятичных приближений слагаемых может не быть десятичным приближением суммы. Однако задача состоит в сравнении чисел, а не в нахождении их десятичных приближений. Поэтому для решения её достаточно получить подходящие оценки сравниваемых чисел рациональными, не заботясь о том, являются выбираемые рациональные числа десятичными приближениями или нет.

Для числа $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ имеем:

$$2 \leqslant \sqrt{5} < 3 \quad \text{и} \quad 1 \leqslant \sqrt{2} < 2 \quad \Rightarrow \quad 3 \leqslant \sqrt{5}+\sqrt{2} < 5,$$

$$2,2 \leqslant \sqrt{5} < 2,3 \quad \text{и} \quad 1,4 \leqslant \sqrt{2} < 1,5 \quad \Rightarrow \quad 3,6 \leqslant \sqrt{5}+\sqrt{2} < 3,8,$$

$$2,23 \leqslant \sqrt{5} < 2,24 \quad \text{и} \quad 1,41 \leqslant \sqrt{2} < 1,42 \quad \Rightarrow \quad 3,64 \leqslant \sqrt{5}+\sqrt{2} < 3,66.$$

Вычисление первых двух десятичных приближений числа $\sqrt{3}+2$ даст оценки:

$$3 \leqslant \sqrt{3}+2 < 4 \quad \text{и} \quad 3,7 \leqslant \sqrt{3}+2 < 3,8.$$

Так как $\sqrt{3}+2 \geqslant 3,7$, а $\sqrt{5}+\sqrt{2} < 3,66 < 3,7$, то $\sqrt{3}+2 > \sqrt{5}+\sqrt{2}$.

Разумеется, задачу можно было решить и другим способом, например, сравнением с помощью рациональных приближений не исходных чисел, а их квадратов (в данном случае, квадраты заданных чисел сравниваются вовсе тривиально, без всяких рациональных приближений). Вместе с тем понятно, что избранный метод решения фактически не зависит от данных задачи. В математике такие решения называют **универсальными** или **общими методами решения**. ■

Задачи для решения

1. Записать рациональные дроби $\frac{2}{3}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{3}{14}$; $-\frac{2}{7}$ в виде бесконечных десятичных дробей.

2. Записать периодические бесконечные десятичные дроби $0,12(5)$; $0,125(0)$; $0,3(30)$; $0,(3)$; $0,2(9)$ в виде рациональных дробей.

3. Докажите, что числа $\sqrt[3]{5}$; $\lg 5$; $\sin 10^\circ$ — иррациональные.

4. Докажите, что произведение рационального и иррационального чисел — число иррациональное.

5. Докажите, что частное от деления рационального числа α на иррациональное β — число иррациональное. Каким числом будет дробь $\frac{\beta}{\alpha}$?

6. Может ли произведение (частное) двух иррациональных чисел быть рациональным числом? Приведите примеры.

7. Какие числа имеют два различные представления в виде десятичной дроби? Поясните ответ.

8. Может ли число иметь три различных представления в виде десятичной дроби? Поясните ответ.

9. Найти первые три нижних и три верхних приближения чисел $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

10. Сравните следующие действительные числа:
а) $\frac{22}{7}$ и $3,141592$; б) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{9}$.

11. Найти первые три значащие цифры в нижних и верхних десятичных приближениях для чисел: а) $\frac{1}{3}+\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

Глава 3

Точные грани числового множества

С аксиомой непрерывности $\mathbb{R}$ тесно связан вопрос существования *точной грани* числового множества.

Понятие точной грани числового множества можно трактовать как уточнение понятия числа, разделяющего множества X и Y из аксиомы непрерывности $\mathbb{R}$. А именно, если непустые числовые множества X и Y таковы, что X лежит левее Y и разделяющее их число $c \in \mathbb{R}$ — единственное, то по определению число c считается и точной верхней гранью множества X и точной нижней гранью множества Y. Может случится, однако, что множества X и Y разделяются не одним, а бесконечным множеством чисел c, т.е. множество

$$C := \{c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X \forall y \in Y (x \leqslant c \leqslant y)\}$$

— бесконечное (объясните, почему множество C либо состоит только из одного элемента, либо содержит бесконечное множество чисел $c \in \mathbb{R}$). В этом случае каждое число $c \in C$ может считаться (и считается) и верхней гранью множества X, и нижней гранью множества Y, но термин «точная» предполагает полную определённость числа c, т. е. его единственность. Поэтому в качестве **точной верхней грани** множества X (обозначается $\sup X$) принимается наименьшее среди всех чисел $c \in C$, т. е. $\sup X := \min C$, а в качестве **точной нижней грани** множества Y (обозначается $\inf Y$) — наибольшее среди чисел $c \in C$, т.е. $\inf Y := \max C$. Отметим, что, как известно, $\min E$ и $\max E$ существуют далеко не для каждого числового множества E, но в нашем случае их существование почти очевидно: $\min C$ — это число, разделяющее множества X и C (оно принадлежит C в силу определения множества C), и $\max C$ — число, разделяющее C и Y.

Приведённые соображения довольно просто трансформируются в определения $\sup E$ и $\inf E$ числового множества E. Будем говорить для определённости о $\sup E$, оставляя разбор определения $\inf E$ читателю.

Пусть E — произвольное числовое множество, *имеющее хотя бы одну верхнюю грань* (**верхней гранью** множества $E \subset \mathbb{R}$ называется такое число $c \in \mathbb{R}$, при котором для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $x \leqslant c$). Тогда множества $X = E$ и $Y_E \subset \mathbb{R}$, где Y_E есть множество всех верхних граней множества E, являются непустыми, причём X лежит левее Y_E. Согласно аксиоме непрерывности $\mathbb{R}$, существует число $c \in \mathbb{R}$, разделяющее $X = E$ и Y_E. По определению считается, что $\sup E := c$.

Это определение, разумеется, требует пояснений, ибо изначально не выглядит очевидным тот факт, что число $c \in \mathbb{R}$, разделяющее $X = E$ и Y_E, единственно. Но поскольку число c обладает тем свойством, что при любом $x \in \mathbb{R}$ и любом $y \in Y_E$ выполняется неравенство

$$x \leqslant c \leqslant y, \tag{3.1}$$

то оно, согласно определению верхней грани числового множества, является верхней гранью множества E и, значит, согласно определению множества Y_E, принадлежит Y_E. Принадлежность $c \in Y_E$ и вторая половина двойного неравенства (3.1) означают, что $c = \min Y_E$. Наименьшее же число (если оно существует) — единственно. Значит, $\sup E$ (т. е. число $c = \min Y_E$) не только однозначно определяется заданием множества E, но и, согласно доказанному, является *наименьшей верхней гранью* множества E.

Часто можно встретить и такое определение $\sup E$. Число $c \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью числового множества $E \subset \mathbb{R}$, если оно обладает следующими двумя свойствами:

(а) *для любого $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant c$;*

(б) *для любого числа $c' \in \mathbb{R}$ такого, что $c' < c$, найдётся $x \in E$ такое, что $c' < x$.*

На самом деле это определение является всего лишь своеобразной расшифровкой равенства $\sup E := \min Y_E$. Действительно, свойство (а) равносильно тому, что $c \in Y_E$ (в частности получается, что из (а) следует непустота множества Y_E). Свойство же (б) означает, что каждое число $c' \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенству $c' < c$, не является верхней гранью множества E или, говоря иначе, каждая верхняя грань c' множества E удовлетворяет неравенству $c' \geqslant c$. Значит, вместе свойства (а) и (б) равносильны тому, что

$$c \in Y_E \quad \text{и} \quad \forall c' \in Y_E (c \geqslant c),$$

т. е., согласно определению наименьшего элемента числового множества, $c = \min Y_E$.

Числовое множество, имеющее хотя бы одну верхнюю грань, принято называть ограниченным сверху. Таким образом, мы приходим к заключению, что *каждое ограниченное сверху (и только ограниченное сверху) числовое множество* $E \subset \mathbb{R}$ *имеет (притом единственную) точную верхнюю грань*. (Обдумайте, как получить такое заключение.) ■

Контрольные вопросы и упражнения

1. Запишите с помощью логических символов определение ограниченного снизу множества. Приведите примеры таких множеств.

2. Какое множество называют ограниченным сверху? Запишите определение. Приведите примеры множеств, ограниченных сверху.

3. Изобразите на числовой прямой множества:

$$A =]-\infty;\ -2[;\ \ B =]-1;\ 1[;\ \ C = [2;\ 3[;\ \ D = [4;\ 5];$$

$$E = [6;\ +\infty[;\ \ F =]-\infty;\ 3].$$

Какие из этих множеств являются: а) ограниченными снизу; б) ограниченными сверху?

4. Какое множество называется ограниченным? Запишите определение такого множества с помощью кванторов. Постройте отрицание этого определения.

5. Есть ли среди множеств задания 3 ограниченные множества? неограниченные множества?

6. Приведите примеры числовых множеств: а) ограниченных снизу, но неограниченных сверху; б) ограниченных сверху, но неограниченных снизу; в) ограниченных; г) неограниченных.

7. Изобразите на числовой прямой множества:

$$A = [3;\ +\infty[;\ \ B =]-\infty;\ -3[;\ \ C = [-2;\ 1];\ \ D =]0;\ 1];\ \ E = [1,5;\ 2[.$$

Для каждого из этих множеств найдётся ли отрезок числовой прямой, содержащий в себе рассматриваемое множество?

8. Доказать, что подмножество ограниченного множества является ограниченным.

9. Верно ли, что, если существует отрезок $[a;\ b]$, содержащий в себе все элементы числового множества M, то множество M будет ограниченным? Каким является числовое множество M, если для него нет отрезка $[a;\ b]$, содержащего все элементы множества M?

10. Изобразите на числовой прямой множества:

$$A = [0;\ 2];\ \ B =]0;\ 2[;\ \ C = [3;\ 4[;\ \ D =]5;\ 6];\ \ E = [7;\ +\infty[.$$

а) для каждого из перечисленных множеств укажите множество всех его верхних границ и его наименьший элемент; б) для каждого из перечисленных множеств укажите множество всех его нижних границ и его наибольший элемент.

11. Найдите наименьший элемент множества всех чисел, ограничивающих множество А сверху, если:

$$A = [0;\ 2]; \quad A = [0;\ 2[; \quad A =]-\infty;\ 0[.$$

12. Назовите наибольший элемент множества всех чисел, ограничивающих множество А снизу, если:

$$A =]-3;\ 0]; \quad A = [3;\ 4]; \quad A =]-4;\ +\infty[; \quad A = [7;\ +\infty[.$$

13. Сформулируйте определение точной верхней грани. Будет ли число 2 являться точной верхней гранью множества A из задания 10? Назовите точные верхние грани множеств из задания 11.

14. Сформулируйте определение точной нижней грани числового множества. Укажите точные нижние грани множеств задания 11.

15. Сформулируйте теорему о существовании точных граней числового множества.

16. Всякое ли ограниченное снизу числовое множество имеет точную нижнюю грань? Всякое ли ограниченное сверху числовое множество имеет точную верхнюю грань?

17. Покажите на примерах, что точные грани могут, как принадлежать, так и не принадлежать множеству, т. е. приведите примеры числовых множеств, у которых: а) $\sup A \in A$; б) $\sup A \notin A$; в) $\inf A \in A$; г) $\inf A \notin A$. Имеет ли множество A наибольший элемент в случаях а), б)? Имеет ли множество A наименьший элемент в случаях в), г)?

18. Что означает символическая запись:

$$\text{а) } \sup A = +\infty; \quad \text{б) } \inf A = -\infty?$$

19. Докажите, что ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет только одну точную верхнюю (нижнюю) грань.

20. Приведите пример ограниченного множества: а) имеющего наибольший элемент; б) не имеющего наибольшего элемента; в) имеющего наименьший элемент; г) не имеющего наименьшего элемента; д) имеющего и наибольший и наименьший элементы; е) не имеющего ни наибольшего, ни наименьшего элементов.

21. Укажите точные верхние и точные нижние грани следующих множеств:

а) $\{\frac{n^3}{2n^3+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

б) множество всех рациональных чисел вида $\dfrac{p}{q}$, где $0 < q < p$;

в) множество всех рациональных чисел вида $\dfrac{p}{q}$, где $0 < p < q$;

г) множество всех иррациональных чисел, принадлежащих отрезку $[2;\ 7]$;

д) множество всех верхних десятичных приближений для числа $\sqrt{2}$;

е) множество всех нижних десятичных приближений для числа $\sqrt{2}$.

22. Приведите пример числового множества A, для которого $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, но которое не совпадает с отрезком $[0;\ 1]$.

23. Для каких числовых множеств $\inf A = \sup A$?

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что множество чисел вида $A = \{\frac{n^2}{n^2+4} \mid n \in \mathbb{N}\}$ — ограниченное. Найти его точные верхнюю и нижнюю грани.

► Множество A — ограниченное, так как каждый его элемент $a = \frac{n^2}{n^2+4}$ $(n \in \mathbb{N})$ удовлетворяет неравенствам:

$$0 < \frac{n^2}{n^2+4} < 1 \qquad \text{(числитель меньше знаменателя)}.$$

Найдем $\inf A$. Так как для любого $a \in A$:

$$a = \frac{n^2}{n^2+4} = 1 - \frac{4}{n^2+4} \geqslant 1 - \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$$

(«чем больше вычитаем, тем меньше получаем»), т.е. $\frac{1}{5}$ одна из нижних границ множества A. Покажем, что $\frac{1}{5}$ — наибольшая среди всех нижних границ, т.е., что $\inf A = \frac{1}{5}$.

Пусть β — произвольная нижняя граница A. Тогда для каждого $a \in A$ должно выполняться неравенство $\beta \leqslant a$. Полагая $a = \frac{1^2}{1^2+4} = \frac{1}{5}\,(a \in A)$ в неравенстве $\beta \leqslant a$, получим: $\beta \leqslant \frac{1}{5}$. Значит, каждая нижняя граница

β множества A не может быть больше $\frac{1}{5}$. Следовательно, $\frac{1}{5}$ — наибольшая среди всех нижних границ A, т.е. $\inf A = \frac{1}{5}$.

Найдем $\sup A$. Поскольку $a = \frac{n^2}{n^2+4} < 1$ для каждого $a \in A$, то 1 — одна из верхних границ множества A. Докажем, что 1 — есть наименьшая среди всех верхних границ A. Для этого достаточно показать, что каждое число α, которое меньше 1, не может быть верхней границей множества A, т.е. если $\alpha < 1$, то найдется $a \in A$ такое, что $a > \alpha$. Неравенство $a > \alpha$ будет выполняться, если число $n \in \mathbb{N}$, определяющее число $a = \frac{n^2}{n^2+4}$, удовлетворяет неравенству

$$\frac{n^2}{n^2+4} > \alpha. \tag{3.2}$$

Значит, доказать существование $a \in A$, удовлетворяющего неравенству $a > \alpha$, можно доказательством разрешимости (относительно n) неравенства (3.2). Последнее можно сделать «по-школьному», решив квадратное неравенство, каковым по сути (3.2) является. Но удобнее от квадратных неравенств перейти к линейным. Делается это так: поскольку при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n^2}{n^2+4} = 1 - \frac{4}{n^2+4} > 1 - \frac{4n}{n^2} = 1 - \frac{4}{n}.$$

(мы воспользовались правилом «чем больше вычитаем»), то неравенство (3.2) будет выполняться всякий раз, когда выполняется неравенство

$$1 - \frac{4}{n} > \alpha. \tag{3.3}$$

Последнее неравенство, очевидно, разрешимо: $n > \frac{4}{1-\alpha}$. Значит, разрешимо и (3.2). Итак, $\sup A = 1$. ■

Пример 2. Привести пример ограниченного сверху множества рациональных чисел, sup которого не является рациональным числом.

► Рассмотрим множество

$$E = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \sqrt{2}\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ и } x^2 < 2\}.$$

Ограниченность его сверху очевидна. Пусть $c := \sup E$. Интуитивно понятно, что $c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, т.е. множество E может быть принято в качестве требуемого примера. Однако решение задачи предполагает опору не на интуицию, а на строгие обоснования. Поэтому, докажем, что $c = \sqrt{2}$, для чего установим, что неравенства $c^2 < 2$, $c^2 > 2$ места не имеют.

Допустим сначала, что $c^2 < 2$. Оказывается, в этом случае существует такое натуральное число $n \in \mathbb{N}$, что $c + \frac{1}{n}$. Чтобы это доказать, нужно доказать существование такого $n \in \mathbb{N}$, при котором выполняется неравенство

$$\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 < 2 \tag{3.4}$$

(так как $c \in \mathbb{Q}$, то, очевидно, $c+\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ при любом $n \in \mathbb{N}$; очевидно также, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $c + \frac{1}{n} > 0$; поэтому выполнение неравенства (3.4) есть необходимое и достаточное условие принадлежности $c + \frac{1}{n}$ множеству E). Из простой оценки

$$\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n} = c^2 + \frac{2c+1}{n}$$

следует, что неравенство (3.4) будет выполняться, если $n \in \mathbb{N}$ выбрано так, что выполняется неравенство

$$c^2 + \frac{2c+1}{n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2c+1}{n} < 2 - c^2 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2c+1}{2-c^2}.$$

Но число $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству $n > \frac{2c+1}{2-c^2}$ существует в силу принципа Архимеда. Значит, существует и такое $n \in \mathbb{N}$, при котором выполняется неравенство (3.4). Далее для такого $n \in \mathbb{N}$ имеет место включение $c+\frac{1}{n} \in E$ и, так как $c < c+\frac{1}{n}$, то мы пришли к противоречию с тем фактом, что $c = \sup E$. Следовательно, случай $c^2 < 2$ невозможен.

Допустим теперь, что $c^2 > 2$. В этом случае существует такое $k \in \mathbb{N}$, что верно неравенство

$$\left(c - \frac{1}{k}\right)^2 > 2. \tag{3.5}$$

Действительно, из оценки

$$\left(c - \frac{1}{k}\right)^2 = c^2 - \frac{2c}{k} + \frac{1}{k^2} > c^2 - \frac{2c}{k}.$$

следует, что неравенство (3.5) выполняется, если выполняется неравенство

$$c^2 - \frac{2c}{k} > 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2c}{k} < c^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad k > \frac{2c}{c^2-2}.$$

Число же $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству $k > \frac{2c}{c^2-2}$, существует в силу принципа Архимеда. Поэтому существует $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству (3.5). Далее, для такого $k \in \mathbb{N}$ при любом $x \in E$ выполняется неравенство

$$x^2 < \left(c - \frac{1}{k}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x < c - \frac{1}{k}$$

(мы воспользовались тем, что, очевидно, $\sup E > 1$ и, значит, $c - \frac{1}{k} > 0$), из которого следует, что число $c - \frac{1}{k}$ является верхней границей множества E. Но это противоречит тому, что $\sup E = c$. Значит, неравенство $c^2 > 2$ также невозможно.

Итак, $c^2 = 2$, т.е. $c = \sqrt{2}$, откуда следует, что $c \notin \mathbb{Q}$. ■

Пример 3. Доказать, что множество

$$M = \left\{ (1 + (-1)^n)n + \frac{1 - (-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

не ограничено сверху, но ограничено снизу. Найти $\inf M$.

► Множество M содержит в себе элементы $4k$ (достаточно положить $n = 2k$) и элементы $\frac{2}{2l-1}$ (при $n = 2l-1$), где k и l — произвольные натуральные числа. Так как среди чисел $4k$ нет наибольшего, то множество M не ограничено сверху.

Элементы множества M есть числа положительные, т.е. 0 является нижней границей M, и множество M ограничено снизу. Докажем, что

$$\inf M = 0.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ существует (согласно принципу Архимеда) такое $l \in \mathbb{N}$, что выполняется неравенство

$$l > \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad 2 < (2l - 1) \cdot \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{2l - 1} < \varepsilon,$$

то, в силу включения $\frac{2}{2l-1} \in M$, заключаем, что ни одно из чисел $\varepsilon > 0$ не может служить нижней границей для множества M. Следовательно, наибольшая среди всех нижних границ, т.е. $\inf M$, есть число 0. ■

Пример 4. Пусть X и Y — некоторые числовые множества и

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, \, y \in Y\}.$$

Доказать, что:

а) если одно из множеств X или Y — неограниченное сверху, то множество $X + Y$ также не ограничено сверху;

б) если каждое из множеств X и Y ограничено сверху, то имеет место равенство:

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y.$$

▶ Решение задачи а) оставляем читателю. Для решения б) обозначим

$$\sup X = a, \qquad \sup Y = b, \qquad \sup(X+Y) = c.$$

Требуется доказать, что $a + b = c$.

Покажем вначале, что $c \leqslant a+b$. Так как $a = \sup X$ и $b = \sup Y$, то для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполняются неравенства $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$ и, значит, $x + y \leqslant a + b$. Следовательно, $a + b$ является верхней границей множества $X + Y$. А так как c — наименьшая верхняя граница множества среди всех верхних его границ, то $c \leqslant a + b$.

Покажем теперь, что $c \geqslant a+b$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, по свойству точной верхней грани, найдутся $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ такие, что $x_0 > a - \varepsilon/2$ и $y_0 > b - \varepsilon/2$. Из последних неравенств следует, что $x_0+y_0 > a+b-\varepsilon$, и, следовательно, $c > a + b - \varepsilon$. Так как ε — любое положительное число, то заключаем, что $c \geqslant a + b$.

Итак, получили: $c \geqslant a + b$ и $c \leqslant a + b$. Значит, $c = a + b$. ■

Пример 5. Пусть $m = \max E$. Доказать, что $\sup E = m$.

▶ Согласно определению наибольшего элемента, $m \in E$ и для любого $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant m$. Последнее означает, что число m является верхней границей множества E. Поэтому остаётся доказать, что эта граница — наименьшая среди всех верхних границ E.

Пусть $c \in \mathbb{R}$ есть произвольная верхняя граница множества E. Тогда для любого $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant m$. В частности, это неравенство выполняется при $x = m \in E$, т.е. имеем: $m \leqslant c$. Значит, число m является наименьшим среди всех верхних границ множества E, т.е. $m = \sup E$. ■

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить, какие из указанных ниже числовых множеств ограничены сверху, ограничены снизу, ограничены, неограничены:

$$\text{а) } A = \left\{ \frac{n}{2n^3+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}; \quad \text{б) } B = \left\{ \frac{n^2}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$\text{в) } C = \left\{ ((-1)^n + 1)n^2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Доказать, что множество $\left\{ \frac{n^2}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ является неограниченным сверху.

3. Доказать, что множество $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено и не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов.

4. Найти точные грани множеств A, B, C, D если

$$A = \left\{ \frac{n}{n+3}(2+(-1)^n) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}; \qquad B = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\};$$
$$C = \left\{ \frac{nm}{4m^2+n^2} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}; \qquad D = \left\{ \frac{m}{m+n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

5. Найти наибольшие и наименьшие элементы множеств A, B, C, D из задачи 4, если такие элементы существуют.

6. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $-X := \{x \mid -x \in X\}$. Доказать, что

$$\sup(-X) = -\inf X \quad \text{и} \quad \inf(-X) = -\sup X.$$

7. Доказать, что $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$.

8. Пусть X и Y — некоторые множества, состоящие только из неотрицательных чисел. Положим

$$X \cdot Y := \{x \cdot y \in \mathbb{R} \mid x \in X \text{ и } y \in Y\}.$$

Доказать следующие равенства:

$$\text{а) } \inf(X \cdot Y) = \inf X \cdot \inf Y; \quad \text{б) } \sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y.$$

9. Доказать, что число 3 является точной верхней гранью множества $A =]0; 3[$.

10. Доказать, что число 3 является точной нижней гранью множества $A = [3; +\infty[$.

11. Пусть A и B — непустые множества действительных чисел такие, что выполняются следующие два свойства:

$$\text{а) } \forall a \in A\, \forall b \in B\, (a \leqslant b); \quad \text{б) } \forall \varepsilon > 0\, \exists a_\varepsilon \in A\, \exists b_\varepsilon \in B\, (b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon).$$

Доказать, что $\sup A = \inf B$.

Глава 4

Натуральные числа. Метод математической индукции

Во всех своих числовых вычислениях и, в частности, в вычислительных аспектах предыдущих тем мы молчаливо принимали как верные результаты арифметических операций над натуральными, целыми и рациональными числами, хотя получали их необоснованными (в виду принятой нами аксиоматической точки зрения на $\mathbb{R}$) «школьными» методами. К счастью, пересматривать все выводы, полученные с помощью таких вычислений, нам не придётся - они остаются в силе, поскольку школьные правила оказываются верными. Доказательство правильности их требует усилий и некоторых (нельзя сказать малых) временных затрат, притом результат этих затрат предрешён - «ничего нового» мы не откроем. (Поэтому иногда детали этого раздела теории действительных чисел опускаются или оставляются алгебре.) Тем не менее, игнорировать его нельзя. Более того, анализ школьных приёмов действий с числами открывает другие, «нешкольные» системы счисления, а аккуратное определение множества натуральных чисел позволяет обосновать метод математической индукции, оказывающийся чрезвычайно полезным способом доказательства многих утверждений из разных разделов математики.

Новым в сравнении с уже принятыми ранее является следующее определение множества $\mathbb{N}$.

Числовое множество $E \subset \mathbb{N}$ называется **индуктивным**, если для каждого $x \in \mathbb{R}$ такого, что $x \in E$, имеет место включение: $x+1 \in E$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ (готическая буква «эм»)

$$\mathfrak{M} := \{E \subset \mathbb{R} \mid 1 \in E \text{ и } E \text{ — индуктивное множество}\}$$

— совокупность всех индуктивных множеств, содержащих в качестве элемента число 1. Тогда множество

$$\mathbb{N} := \bigcap_{E \in \mathfrak{M}} E,$$

т.е. пересечение всех индуктивных множеств, содержащих 1, называется множеством натуральных чисел.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Докажите, что $1 > 0$.

Указание. $1 \neq 0$ (почему?) и, следовательно, верно только одно из двух: либо $1 > 0$, либо $1 < 0$. Но неравенство $1 < 0$ влечёт $-1 > 0$ и $(-1) \cdot (-1) > 0$. ■

2. Какие из перечисленных в этом примере множеств являются индуктивными, а какие — нет?

а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$; в) $\mathbb{Q}$;
г) $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$; д) $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; е) $[1;\, 2]$;
ж) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\}$; з) $[-3;\, -\infty[$; и) $\mathbb{R}_+ \cup \{-3\}$.

3. Докажите, что индуктивное множество не является ограниченным сверху. Верно ли обратное утверждение?

4. Пусть X есть индуктивное множество. Что можно сказать об индуктивности его непустого подмножества E — обязательно ли E является индуктивным? Подтвердите ответ примерами.

5. Пусть E_1 и E_2 — два числовых множества (т.е. $E_1 \subset \mathbb{R}$ и $E_2 \subset \mathbb{R}$).

а) Докажите, что если E_1 и E_2 — индуктивные множества, то индуктивным является их пересечение $E_1 \cap E_2$.

б) Будет ли индуктивным $E_1 \cap E_2$, если

(i) только одно из множеств E_1, E_2 является индуктивным?

(ii) ни одно из этих множеств E_1, E_2 индуктивным не является?

в) Известно, что $E_1 \cap E_2$ есть индуктивное множество. Что можно сказать об индуктивности множеств E_1, E_2: верно ли, что хотя бы одно из них должно быть индуктивным?

6. Пусть I и X — некоторые фиксированные множества, и пусть каждому элементу $i \in I$ поставлено в соответствие некоторое подмножество E_i

множества X, причём соответствие $i \mapsto E_i$, $i \in I$, подчинено следующему условию:

$$\text{если } i \neq j, \text{ то } E_i \neq E_j$$

(т.е., иначе говоря, соответствие $i \mapsto E_i$, $i \in I$, — *инъективное*). Тогда множество I называется *множеством индексов*, а совокупность всех выделенных подмножеств E_i, $i \in I$, множества X — *системой подмножеств множества X, занумерованных индексами $i \in I$*. (Разумеется, систему E_i, $i \in I$ подмножеств множества X, выделяемую индексацией с помощью множества I, можно записывать в виде: $\{E_i \subset X \mid i \in I\}$. Так, например, в условии упражнения 5 можно было сказать: «пусть $\{E_1, E_2\}$ есть система подмножеств $\mathbb{R}$, занумерованных индексами $i \in \{1; 2\}$», или: «пусть на $\mathbb{R}$ задана система его подмножеств $\{E_1, E_2\}$». Однако такие и им подобные предложения «режут» слух, и потому их стараются избегать; к тому же лишние скобки, пусть они даже фигурные, отнюдь не упрощают чтение, так что их, как правило, отправляют в контекст. Часто в контекст отправляется и само наличие нумерации (т.е. индексации). Так в упражнении 5 множества E_1, E_2 конечно же занумерованы (нумерация кроется в слове «два» условия задачи). Если задуматься, то можно обнаружить, что и приписывание каждому человеку фамилии, имени, даты и места рождения есть тоже своего рода нумерация людей «сложно-составными» индексами. В контекст отправлена и нумерация всех индуктивных множеств, содержащих 1, из определения $\mathbb{N}$. В этом определении $I = \mathfrak{M}$, а правило $i \mapsto E_i$ — тривиально: $i = E \mapsto E$. Последний пример говорит о том, что, в принципе, занумеровать можно всё, что угодно, например, нумерацией «объект» $\mapsto$ «объект». Однако польза от приведённого и принимаемого нами определения нумерации всё же имеется; уже сейчас мы видим, что пересчитывать объекты можно не только натуральными числами, и что в процессе нумерации не следует считать одного «барана» дважды. При решении упражнения, которое мы наконец сформулируем, обнаружится и «техническая» его полезность.)

Докажите, что если каждое множество E_i, $i \in I$, индуктивно, то индуктивным является и множество $\bigcap\limits_{i \in I} E_i$, т.е., другими словами, пересечение любой совокупности индуктивных множеств есть множество индуктивное.

7. Объясните, почему $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N}$.

8. Докажите, что $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

Указание. $\frac{1}{2} < 1$ (это можно доказать, например, опираясь на упражнение 1) и, следовательно, $\frac{1}{2}$ не принадлежит индуктивному множеству

$$[1; +\infty[\supset \mathbb{N}. \blacksquare$$

9. Доказать следующие утверждения.

а) На интервале $]0;\ 1[$ нет натуральных чисел.

б) $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$ (на «школьном языке» этому утверждению можно придать такую форму: 3 не является кратным 2).

в) В интервале $]1;\ 2[$ нет ни одного натурального числа.

Указание. Множество $E = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\}$ содержит 1 и является индуктивным (так как $E = \{1\} \cup ([2;\ +\infty[\cap \mathbb{N})$, то можно воспользоваться упражнением 5а). Поэтому, согласно определению $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subset E$. ■

Обсуждение. Очевидно, что верно и обратное включение, $E \subset \mathbb{N}$, поскольку, согласно определению E, оно состоит только из натуральных чисел. Следовательно, $\mathbb{N} = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\}$. Интуиция подсказывает, что при любом $n \in \mathbb{N}$ можно записать

$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{n\} \cup \{k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant n+1\} =$$

$$= \{1, 2, \dots, n\} \cup \{k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant n+1\},$$

т.е., как принято ещё со школьных времён, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Однако и строгие доказательства последних равенств легко получаются рассуждениями, аналогичными применённым в указании к упражнению в) (докажите их). Впредь мы будем считать их известными. Отметим также, что из выписанных равенств следует, что на каждом интервале вида $]n, n+1[$, где $n \in \mathbb{N}$, нет ни одного натурального числа. Этот факт впредь также будет считаться установленным. ■

10. а) Докажите, что множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ есть наименьшее индуктивное множество среди всех индуктивных множеств, содержащих 1, т.е., другими словами, докажите, что $\mathbb{N}$ есть индуктивное множество и если E — произвольное индуктивное множество такое, что $1 \in E$, то $\mathbb{N} \subset E$.

б) Докажите, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ обладает свойствами

α) $1 \in A$;

β) A есть множество индуктивное;

γ) если E — произвольное индуктивное множество такое, что $1 \in E$, то $A \subset E$,

то $A = \mathbb{N}$, т.е., другими словами, докажите, что если A есть наименьшее среди всех индуктивных множеств, содержащих 1, то $A = \mathbb{N}$. Можно ли свойство γ) заменить на γ') $A \subset \mathbb{N}$?

Построив соответствующие контрпримеры, покажите, что отбрасывание любого из свойств α), β), γ) делает заключение $A = \mathbb{N}$ неверным.

в) Пусть числовое множество A обладает только свойствами α) и β). Докажите, что $\mathbb{N} \subset A$.

Обсуждение задачи. Доказательства всех перечисленных в задаче утверждений настолько просты, что вообще может возникнуть вопрос — в чём смысл этого тривиального упражнения? Смысл же его состоит в том, что оно служит обоснованием метода математической индукции. Остановимся на этом методе подробней.

Пусть мы имеем предложение, $P(x)$, содержащее числовую переменную x и такое, что при каждом конкретном значении $x \in \mathbb{R}$ это предложение становится высказыванием, т.е. либо истинным, либо ложным предложением. (Предложение $P(x)$ ещё называют **предикатом** или, точнее, **одноместным предикатом**.) Например,

$$P(x) = (x < 2^{x-1}), \quad P(x) = (x^2 - 3x + 2 = 0), \quad \text{и т.п.}$$

Тогда с этим предложением естественно связывается его множество истинности, т.е. множество

$$E := \{x \in \mathbb{R} \mid \ P(x)\}$$

(в последней записи после вертикальной черты правильно было бы писать «$P(x)$ — истинно»; однако принято, для экономии места, слово «истинно» не писать, а подразумевать; если же, нас интересуют, например, те $x \in \mathbb{R}$, при которых $P(x)$ ложно, то пишут $x \mid\rceil P(x))$. Отыскание множества истинности E произвольного предиката $P(x)$ — дело нелёгкое, если вообще возможное. Однако в ряде задач бывает достаточно доказать, что $\mathbb{N} \subset E$ или что $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant p_0\} \subset E$ (p_0 — некоторое конкретное натуральное число). Для определённости будем считать, что речь идёт о включении $\mathbb{N} \subset E$. Понятно, что для его доказательства достаточно установить, что $\mathbb{N} \subset A$, где A — некоторое числовое множество, содержащееся в E. Конкретно, возьмём в качестве A множество

$$A := \{x \in \mathbb{N} \mid \ P(x)\}.$$

Если будет доказано, что $\mathbb{N} \subset A$, то будет иметь место и включение $\mathbb{N} \subset E$. Для доказательства же включения $\mathbb{N} \subset A$, согласно утверждению в) обсуждаемого упражнения, достаточно доказать, что

$$\alpha)\, 1 \in A \quad \text{и} \quad \beta)\, A \text{ есть индуктивное множество.}$$

Принадлежность $1 \in A$ равносильна проверке того, что $P(1)$ есть истинное предложение. Индуктивность же множества A имеет место в том и только том случае, когда при каждом $x \in \mathbb{N}$ истинно высказывание $P(x) \Rightarrow P(x+1)$, т.е., говоря иначе, при каждом $n \in \mathbb{N}$ из предположения о том, что $P(x)$ истинно, следует, что предложение $P(x+1)$ также истинно. Таким образом, убирая «лишние» слова в подтекст, мы получаем следующий **принцип математической индукции**.

> *Пусть задано высказывание $P(n)$, зависящее от натуральной переменной $n \in \mathbb{N}$. Если*
> α) *высказывание $P(n)$ истинно при $n = 1$, и*
> β) (*при любом $n \in \mathbb{N}$*) *из истинности высказывания $P(n)$ следует, истинность высказывания $P(n+1)$,*
> *то высказывание $P(n)$ истинно при любом $n \in \mathbb{N}$.*

Докажем в качестве примера, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $n < 2^n$.

В этом примере высказывание $P(n)$ состоит в следующем: имеет место неравенство $n < 2^n$. Докажем выполнение условий α) и β) принципа математической индукции.

α) При $n = 1$ высказывание $P(n)$ принимает вид: выполняется неравенство $1 < 2^1$. Это высказывание истинное $(0 < 1 \Rightarrow 1 = 1 + 0 < 1 + 1 = 2)$ и, значит условие α) выполняется.

β) Предположим, что высказывание $P(n)$ истинно, т.е. $n < 2^n$. Нужно доказать, что тогда истинным является и высказывание $P(n+1)$, т.е. что истинным является неравенство $n + 1 < 2^{n+1}$. Имеем:

$$n + 1 < [\text{в силу предположения индукции } n < 2^n] < 2^n + 1 <$$

$$< [\text{воспользуемся тем, что } 1 < 2^1 \leqslant 2^n \text{ при } n \in \mathbb{N}] < 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Таким образом, условие β) также выполняется.

Поскольку для данного в задаче высказывания $P(n)$ выполняются условия α) и β), то, согласно принципу математической индукции, высказывание $P(n)$ истинно при любом $n \in \mathbb{N}$, т.е. при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $n < 2^n$. ■

11. Докажите, что сумма двух натуральных чисел есть число натуральное.

Указание. Достаточно показать, что множество

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}(m + n \in \mathbb{N})\}$$

содержит 1 и является индуктивным. ■

12. Числа 1, 2, 3 и т.д. называются *предшествующими* соответственно к числам 2, 3, 4 и т.д. Точнее, число $k \in \mathbb{N}$ называется предшествующим числу $n \in \mathbb{N}$, если $n = k + 1$. Докажите следующие утверждения.

а) Число 1 не имеет предшествующего числа.

б) Каждое натуральное число n, не меньшее 2, имеет предшествующее число.

Указание. Докажите, что $\mathbb{N} = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}(n = k + 1)\}$. ■

Обсуждение. Из равенства $n = k + 1$ следует, что $k = n - 1$. Поэтому утверждению б) рассматриваемой задачи можно придать такую форму: *если число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n \geqslant 2$, то разность $n - 1$ есть число натуральное.* ■

13. Докажите, что если натуральное число n (строго) больше натурального числа m, то $n \geqslant m + 1$.

Указание. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, m\} \cup \{k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant m + 1\}$, поскольку множество в правой части равенства индуктивное и содержит 1. ■

14. Доказать, что если натуральное число n больше натурального числа m, то число $n - m$ — натуральное.

Обсуждение. Утверждению задачи можно придать такую форму: если натуральное число n больше натурального числа m, то *существует* такое натуральное число k, что $n = m + k$. Обратное к сформулированному утверждению, очевидно, также справедливо. ■

15. Доказать следующее обобщение принципа математической индукции.

> *Пусть $P(n)$ — высказывание, зависящее от натуральной предметной переменной $n \in \mathbb{N}$ (т.е. $P(n)$ — одноместный предикат на $\mathbb{N}$), и p_0 — некоторое фиксированное натуральное число. Пусть, далее, предикат $P(n)$ удовлетворяет следующим двум условиям:*
>
> *(i) высказывание $P(p_0)$ истинно (т.е. предикат $P(n)$ обращается в истинное высказывание, если переменной n присваивается значение $n = p_0$);*
>
> *(ii) высказывание $\forall n \in \mathbb{N}$ $((n \geqslant p_0 \wedge P(n)$ — истинно$) \Rightarrow P(n + 1)$ — истинно) истинно (т.е. при каждом натуральном значении n таком, что $n \geqslant p_0$, из истинности высказывания $P(n)$ следует истинность высказывания $P(n + 1)$).*
>
> *Тогда высказывание $P(n)$ является истинным при каждом натуральном значении n, удовлетворяющем неравенству $n \geqslant p_0$.*

Указание. Заменой $n = k + p_0 - 1$, т.е. $k = n - (p_0 - 1)$, обобщённый принцип сводится к обычному. ■

16. Докажите, что каждое непустое подмножество E множества $\mathbb{N}$ имеет наименьший элемент, т.е. для любого $E \subset \mathbb{N}$ существует $\min E$.

Указание. Самое эффективное доказательство опирается на существование $\inf E$. Полезно, однако, доказать утверждение и без использования $\inf E$. Возможно, на этом пути будет полезным упражнение 13. ■

17. Отрезком на множестве $\mathbb{N}$ называется каждое его подмножество вида $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, где n — некоторое фиксированное натуральное число. Число n называется **мощностью отрезка** I (или **числом его элементов**). Доказать, что для каждого непустого ограниченного множества $E \subset \mathbb{N}$ существует, притом единственный отрезок $I \subset \mathbb{N}$ такой, что множество E биективно отрезку I.

Указание. Утверждение задачи равносильно следующему: для каждого непустого ограниченного множества $E \subset \mathbb{N}$ существует, притом единственное $n \in \mathbb{N}$ и существует правило, сопоставляющее каждому $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ элемент e_i множества E, такие, что выполняются следующие свойства: а) $e_i \neq e_j$, если $i \neq j$; б) $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. В силу ограниченности E сверху существует $\max E =: m$. Из равенства

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, m\} \cup \{k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant m + 1\}$$

следует, что $E \subset \{1, 2, \ldots, m\}$. Положим $e_1 := \min E$. Если $E \setminus \{e_1\} = \varnothing$, то $n = 1$. В противном случае, пусть $e_2 := \min E \setminus \{e_1\}$. Если теперь $E \setminus \{e_1; e_2\} = \varnothing$, то $n = 2$; если же $E \setminus \{e_1; e_2\} \neq \varnothing$, то существует $e_3 := \min E \setminus \{e_1; e_2\}$ и т.д. Методом от противного докажите, что при некотором $n \leqslant m$ имеем $E \setminus \{e_1; e_2; \ldots; e_n\} = \varnothing$, т.е. $E = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$. ■

Обсуждение. Множество E (не обязательно подмножество $\mathbb{N}$, может быть и вообще произвольное) называется **конечным**, если оно либо является пустым, либо биективно некоторому отрезку множества $\mathbb{N}$. Мощность отрезка I называется **числом** (**количеством**) **элементов** конечного множества E. Если $E = \varnothing$, то количеством его элементов объявляется число 0. Множество E называется **бесконечным**, если оно не является конечным. Из задачи 17 следует, что бесконечным множеством является каждое подмножество $\mathbb{N}$, неограниченное сверху. ■

18. Множеством целых чисел $\mathbb{Z}$ называется объединение множеств $\mathbb{N}$, $\{0\}$, а также множества, состоящего из всех действительных чисел, являющихся противоположными натуральным. При $a \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, по определению считается, что a^n есть произведение n сомножителей, каждый из которых равен a; полагается также, что $a^1 := a$. Если $a \neq 0$, то считается, что $a^0 := 1$ и $a^n := \left(\frac{1}{a}\right)^k$, если $n = -k$, где $k \in \mathbb{N}$. Доказать, что для любых целых чисел m и n и произвольного ненулевого числа $a \in \mathbb{R}$ выполняются равенства:

$$\text{а) } a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad \text{б) } (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Замечание. Мы довольно подробно обсудили строение множества $\mathbb{N}$, но такое же исследование $\mathbb{Z}$ оставляем на самостоятельную работу читателю. Основные моменты (помимо определения $\mathbb{Z}$), которые надо представлять себе, работая с целыми числами, состоят в следующем: сумма и произведение целых чисел являются числами целыми и на каждом интервале вида $]n; n+1[$, где $n \in \mathbb{Z}$, нет ни одного целого числа.

19. Пусть $a > 1$ — некоторое фиксированное действительное число. Докажите следующие утверждения.

а) При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $a^n < a^{n+1}$.

б) Множество $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — неограниченное сверху.

Указание. Из ограниченности его следовало бы существование точной верхней грани $s \in \mathbb{R}$, в силу свойства которой следовало бы существование $n \in \mathbb{N}$, при котором выполнялось неравенство $\frac{1}{a} \cdot s < a^n$. ■

в) Для каждого положительного числа $\frac{1}{\varepsilon}$ существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что при каждом $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющем неравенству $n \geqslant n_0$, выполняется неравенство $a^n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$.

г) $\inf\{\left(\frac{1}{a}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

д) Для любого положительного числа ε существует такое натуральное число n_0, что при каждом $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющем условию $n \geqslant n_0$, выполняется неравенство $\left(\frac{1}{a}\right)^n < \varepsilon$.

е) Множество $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ неограниченно сверху и имеет точную нижнюю грань, равную 0.

ж) Для каждого положительного действительного числа x найдётся, притом единственное число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что выполняются неравенства $a^n \leqslant x < a^{n+1}$. Уточните, каким по знаку (и, следовательно, по отношению принадлежности $\mathbb{N}$) является n, если дополнительно известно, что

$$1)\, x < 1; \qquad 2)\, x > 1; \qquad 3)\, x = 1.$$

з) Предположим дополнительно, что $a \in \mathbb{N}(a > 1)$, и пусть $x \in \mathbb{R}$ — некоторое фиксированное положительное число. Согласно упражнению ж) существует (единственное) число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $a^n \leqslant x < a^{n+1}$. Эти неравенства влекут включение

$$x \in [a^n;\, a \cdot a^n[= [1 \cdot a^n;\, 2 \cdot a^n[\cup[2 \cdot a^n;\, 3 \cdot a^n[\cup \cdots \cup [(a-1) \cdot a^n;\, a \cdot a^n[,$$

из которого следует, что существует (притом единственное) число $\alpha_1 \in \{1, \ldots, a-1\}$ такое, что

$$\alpha_1 \cdot a^n \leqslant x < (\alpha_1 + 1) \cdot a^n.$$

Из принадлежности

$$x - \alpha_1 \cdot a^n \in [0;\, a \cdot a^{n-1}[= [0;\, 1 \cdot a^{n-1}[\cup[1 \cdot a^{n-1};\, 2 \cdot a^{n-1}[\cup \cdots \cup[(a-1) \cdot a^{n-1};\, a \cdot a^{n-1}[,$$

следует существование (и единственность) такого $\alpha_2 \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$, при котором

$$\alpha_2 \cdot a^{n-1} \leqslant x - \alpha_1 \cdot a^n < (\alpha_2 + 1) \cdot a^{n-1},$$

т.е.

$$\alpha_1 \cdot a^n + \alpha_2 \cdot a^{n-1} \leqslant x < \alpha_1 \cdot a^n + (\alpha_2 + 1) \cdot a^{n-1}.$$

Дальнейшие рассуждения индуктивны: если уже известны числа α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_k из множества $\{0, 1, \ldots, a-1\}$ такие, что

$$\alpha_k \cdot a^{n-k+1} \leqslant x - \alpha_1 \cdot a^n - \alpha_2 \cdot a^{n-1} - \cdots - \alpha_{k-1} \cdot a^{n-k+2} < (\alpha_k + 1) \cdot a^{n-k+1},$$

то в качестве α_{k+1} выбирается то единственное число из $\{0, 1, \ldots, a-1\}$, при котором

$$\alpha_{k+1} \cdot a^{n-k} \leqslant x - \alpha_1 \cdot a^n - \alpha_2 \cdot a^{n-1} - \cdots - \alpha_k \cdot a^{n-k+1} < (\alpha_{k+1} + 1) \cdot a^{n-k},$$

т.е.

$$\alpha_1 \cdot a^n + \cdots + \alpha_k \cdot a^{n-k+1} + \alpha_{k+1} \cdot a^{n-k} \leqslant x < \alpha_1 \cdot a^n + \cdots + \alpha_k \cdot a^{n-k+1} + (\alpha_{k+1} + 1) \cdot a^{n-k},$$

(Объясните, почему такое число α_{k+1} существует.) В итоге получается, что каждому действительному числу x поставлена в соответствие последовательность

$$(n,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots, \alpha_k,\, \alpha_{k+1},\, \ldots),$$

состоящая из целого числа $n \in \mathbb{Z}$, ненулевого (натурального) числа α_1, не превосходящего $a-1$, и целых неотрицательных чисел α_2, α_3, …, также не превосходящих $a-1$. Эту последовательность принято записывать специальным образом, убирая целое число n в подтекст. А именно, если число n — натуральное, то последовательность записывается в виде

$$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\alpha_{n+1},\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\dots,$$

т.е. первые $n+1$ из чисел α_k, $k\in\mathbb{N}$, отделяются от остальных запятой. При $n=0$ запятой от остальных чисел отделяется только число α_1 и запись принимает вид

$$\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_k\dots .$$

Наконец, если число n — не ноль и не является натуральным, т.е. если $n=-k$, где $k\in\mathbb{N}$, то последовательность записывается в виде

$$\underset{1}{0},\underset{2}{0}\,\underset{3}{0}\,\dots\underset{k}{0}\,\alpha_1\alpha_2\dots,$$

где в записи участвуют $k=|n|$ нулей и первый из нулей отделяется запятой от следующих за ним $(k-1)$-го нуля и чисел $\alpha_1,\alpha_2\dots$. Каждая из указанных записей называется *представлением действительного числа x в виде бесконечной дроби, записанной в системе счисления с основанием a.* (При $a=10$ о дроби говорят как о десятичной, убирая, тем самым, слова «записанный» в контекст.)

i) Для чисел 125, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$ указать представления их в виде бесконечных дробей в системе счисления с основанием $a=10$ (т.е. представления в виде десятичных дробей).

ii) В системе счисления с основанием $a=2$ построить представления в виде бесконечных дробей для чисел: $12,5$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$.

Часть ответа. Число $\frac{1}{3}$ представляется дробью

$$0,010101\dots =: 0,(01)_2. \blacksquare$$

iii) Записать в системе счисления с основанием $a=3$ представления в виде бесконечных дробей следующих чисел: 3; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$.

Часть ответа. $\frac{1}{2}=0,111\dots =: 0,(1)_3$. $\blacksquare$

iv) Восстановите число x, если известно. что его представление в виде бесконечной дроби, записанной в системе счисления с основанием $a=2$, является $1,0101\dots=1,(01)_2$.

$v)$ Найти x, если представление его в виде бесконечной дроби, записанной в системе счисления с основанием $a = 3$, имеет вид: $1,0101\ldots = 1,(01)_3$; $1,2100\ldots0\ldots$; $1,11\ldots = 1,(1)_3$.

Замечание. Последовательность $(n,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots)$, сопоставляемая в упражнении 19 з) числу $x \in \mathbb{R}$, строилась «по недостатку», т.е. основываясь на исходном неравенстве $a^n \leqslant x < a^{n+1}$. Можно убедиться, что отправляясь от целого m, при котором $a^{m-1} < x \leqslant a^m$, с использованием (вместо открытых справа) полуинтервалов, открытых слева, действительному числу x сопоставляется ещё одна последовательность $(m,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots)$. Об этой последовательности говорят, что она строится «по избытку». Если читатель обладает временем, то рекомендуем ему самостоятельно разобраться с аккуратным построением такой последовательности и выяснить, всегда ли вторая последовательность будет отличаться от первой. ■

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

где $n \in \mathbb{N}$.

► Данное равенство можно рассматривать как высказывание $A(n)$, зависящее от переменной $n \in \mathbb{N}$. Воспользуемся методом математической индукции.

1° При $n = 1$ высказывание $A(n)$ истинно, так как

$$1 = (-1)^{1-1} \cdot \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \ \Leftrightarrow\ 1 = (-1)^0 \cdot 1 \ \Leftrightarrow\ 1 = 1.$$

2° Предположим, что $A(k)$ истинно, т.е. справедливо равенство

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{k-1} \cdot \frac{k(k+1)}{2},$$

Докажем, что истинным является и $A(k+1)$, т.е.

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^{k+1-1}(k+1)^2 = (-1)^{k-1}\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

Прибавим к обеим частям верного по предположению $A(k)$ равенства одно и то же число $(-1)^k \cdot (k+1)^2$. Получим

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2.$$

Преобразуем правую часть этого равенства. Имеем:

$$(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^k\left(-\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)^2\right)=$$

$$=(-1)^k(k+1)\left(-\frac{k}{2}+k+1\right)=(-1)^k(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Следовательно,

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^{k+1-1}(k+1)^2=(-1)^{k-1}\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

т.е. $A(k+1)$ истинно. В силу принципа математической индукции исходное равенство истинно при любом $n\in\mathbb{N}$. ■

Пример 2. Доказать, что при любом целом $n\geqslant 0$ число $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

► 1° При $n=0$ данное утверждение, очевидно, верно: $11^2+12=133$ делится на 133.

2° Предположим, что верно высказывание

$$A(k):=(11^{k+2}+12^{2k+1}\text{ делится на }133)$$

и докажем, что тогда верно высказывание

$$A(k+1):=(11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1}=11^{k+3}+12^{2k+3}\text{ делится на }133).$$

Имеем

$$11^{k+3}+12^{2k+3}=11^{k+2}\cdot 11^1+12^{2k+1}\cdot 12^2=11\cdot 11^{k+2}+(11+133)\cdot 12^{2k+1}=$$

$$=11\cdot(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}.$$

Слагаемое $11\cdot(11^{k+2}+12^{2k+1})$ делится на 133 в силу предположения индукции. Второе слагаемое $133\cdot 12^{2k+1}$, очевидно, делится на 133. Следовательно, и сумма этих слагаемых делится на 133. Таким образом, утверждение $A(k+1)$ истинно. Оба условия принципа математической индукции выполнены и, значит, $A(n)$ истинно при любом целом $n\geqslant 0$. ■

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что при любом $n\in\mathbb{N}$ выполняется равенство:

а) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

в) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$;

г) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

д) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$;

е) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

ё) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

ж) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + (n-1) \cdot n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$;

з) $\dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n}{2(n+2)}$;

и) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \dots + \dfrac{2n-1}{2^n} = 3 - \dfrac{2n+3}{2^n}$;

к) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$;

л) $\dfrac{1}{1 \cdot 10} + \dfrac{1}{10 \cdot 19} + \dfrac{1}{19 \cdot 28} + \dots + \dfrac{1}{(9n-8)(9n+1)} = \dfrac{n}{9n+1}$;

м) $\dfrac{1}{5 \cdot 11} + \dfrac{1}{11 \cdot 17} + \dfrac{1}{17 \cdot 23} + \dots + \dfrac{1}{(6n-1)(6n+5)} = \dfrac{n}{5(6n+5)}$;

н) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$.

2. Доказать, что при $\forall n \in \mathbb{N}$ число:

а) $n^3 + 5n$ делится на 6;

б) $4^{2n+1} + 5n$ делится на 13;

в) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9;

г) $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ делится на 17;

д) $n^5 - n$ делится на 30;

е) $n^2(n^4 - 1)$ делится на 60;

ё) $n(2n^2 - 3n + 1)$ делится на 6;

ж) $4^n + 15n - 1$ делится на 9;

з) $n^5 - n$ делится на 5;

и) $4^{2n} + 3^{2n} - 7$ делится на 84;

к) $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n$ делится на 30;

л) $6n^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11;

м) $(2n)^3 + 20(2n)$ делится на 48;

н) $n^2(n^4 - 1)$ делится на 12.

3. Доказать справедливость неравенств:

а) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$;

в) $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$;

г) $\dfrac{n}{2} < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n - 1} < n$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$;

д) $(2n)! > \dfrac{4n}{n+1} \cdot (n!)^2$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$;

е) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)^2} < 2 - \dfrac{1}{n+1}$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$;

ё) $\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Глава 5

Числовые последовательности и их свойства

Понятия и факты, которые следует проработать по рассматриваемой теме, указываются контрольными вопросами и упражнениями.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Может ли последовательность иметь только три члена?

2. Укажите второй, третий, седьмой и двадцатый члены последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = n^{(-1)^n}$; б) $x_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$;

в) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$; г) $x_{n+1} = x_n + 2$, $x_1 = 0$;

д) $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$.

3. Сформулируйте определение: члена последовательности; номера члена последовательности; значения члена последовательности.

4. Назовите способы задания последовательности.

5. Могут ли значения членов последовательности повторяться? Может ли последовательность иметь только три значения? (Сравните ответ с ответом на вопрос 1.)

6. Что изображается на числовой прямой — члены последовательности или их значения?

7. Изобразите на числовой прямой значения нескольких первых членов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

$$\text{а) } x_n = \frac{1}{n}; \qquad \text{б) } x_n = (-1)^n; \quad \text{в) } x_n = \frac{(-1)^n}{n};$$

$$\text{г) } x_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}; \quad \text{д) } x_n = n; \qquad \text{е) } x_n = \frac{n}{n+1}.$$

Для каждой из заданных последовательностей укажите x_1, x_2, x_3, x_{n-1}, x_{n+1}, x_{2n-1} и x_n^2.

8. Сформулируйте определение ограниченной последовательности. Какие последовательности из упражнения 7 являются ограниченными?

9. Какая последовательность называется неограниченной? Укажите неограниченные последовательности, если они есть, среди последовательностей упражнения 7.

10. Сформулируйте определения:

а) возрастающей последовательности;

б) убывающей последовательности;

в) неубывающей последовательности;

г) невозрастающей последовательности;

д) монотонной последовательности.

11. Исследуйте на монотонность последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

$$\text{а) } x_n = \frac{1}{n}; \qquad \text{б) } x_n = n^2 - 1; \qquad \text{в) } x_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

12. Что называется окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$?

13. Являются ли окрестностями точки $a = 2$ множества:

$$\text{а) }]1;\, 3[; \qquad \text{б) }]0;\, 2[; \qquad \text{в) }]1;\, 2[; \qquad \text{г) }]0,9;\, 2,01[?$$

14. При каком значении ε интервал $]1;\, 3[$ будет ε-окрестностью точки $a = 2$?

15. Определите такие ε и a, чтобы интервал $]1;\, 2[$ являлся ε-окрестностью точки a.

16. Условимся обозначать ε-окрестность точки a через $U_\varepsilon(a)$, т.е. положим

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid \ |x - a| < \varepsilon\}.$$

Верно ли, что $x_{15} \in U_{0,1}(2)$, если $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{2n-1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$?

17. Укажите номера всех таких членов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, которые принадлежат $U_{0,1}(2)$, если:

$$\text{а) } x_n = n; \qquad \text{б) } x_n = \frac{2n-1}{n}; \qquad \text{в) } x_n = (-1)^n; \qquad \text{г) } x_n = 3 + (-1)^n.$$

18. Сформулируйте определение предела числовой последовательности. Пользуясь определением предела, объясните, почему $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

19. Пусть $x_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

а) Приведите пример окрестности точки 1, в которую попадают все члены последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

б) Приведите пример окрестности $U_\varepsilon(1)$, в которой содержатся все члены последовательности, номера которых больше 9.

в) Следует ли, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, если существуют окрестности, описанные в а) и б)?

г) Верно ли, что в $U_{0,1}(1)$ содержится бесконечно много членов последовательности? Верно ли, что в эту окрестность попадают все члены последовательности, начиная с некоторого номера n?

д) Постройте отрицание утверждения $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ и объясните, почему $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq 1$.

20. Верно ли, что число a является пределом числовой последовательности, если:

а) вне произвольной окрестности $U_\varepsilon(a)$ числа a находится разве лишь конечное число членов этой последовательности?

б) в любой окрестности $U_\varepsilon(a)$ содержится бесконечное множество членов данной последовательности?

21. Может ли сходиться неограниченная последовательность? Всякая ли ограниченная последовательность сходится?

22. Объясните, почему расходится последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если: а) $x_n=(-1)^n\cdot n$; б) $x_n=n\cdot\sin n$.

23. Может ли последовательность иметь два предела? Приведите обоснование ответа.

24. Какая последовательность называется бесконечно малой? Докажите бесконечную малость последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

$$\text{а) } x_n=\frac{(-1)^n}{n};\qquad \text{б) } x_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n;\qquad \text{в) } x_n=\frac{\sin n}{n}.$$

25. Верно ли утверждение, что бесконечно малой последовательностью является:

а) произведение бесконечно малой последовательности на сходящуюся последовательность;

б) произведение двух бесконечно малых последовательностей.

Проведите соответствующие обоснования.

26. Пользуясь теоремами о пределе суммы и о пределе произведения двух сходящихся последовательностей, найдите пределы следующих последовательностей:

$$а)\ x_n = \frac{1}{n} + \frac{3}{3-n};\quad б)\ x_n = \frac{n-2}{n+1} + \frac{n-3n^2+1}{n^2+1};\quad в)\ x_n = \frac{n+\sin n}{2n}\cdot\frac{n+1}{n};$$

$$г)\ x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(5+\frac{1}{n}\right);\qquad д)\ x_n = \frac{(1+5n^2)(1-n+n^3)}{n^2(n^3+3)}.$$

27. Сформулируйте теорему о предельном переходе в двойном неравенстве (или, как ещё говорят, теорему о пределе «зажатой» последовательности).

28. Сформулируйте критерии Коши и Вейерштрасса о существовании предела числовой последовательности.

29. Какие ещё теоремы, отличные от критериев Коши и Вейерштрасса, можно использовать для доказательства сходимости числовой последовательности? (Обратите внимание на теоремы об арифметических действиях с последовательностями.)

30. Сформулируйте определение фундаментальной числовой последовательности.

31. Пользуясь определением, установите фундаментальность последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

$$а)\ x_n = \frac{1}{n};\qquad б)\ x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

32. Верно ли, что фундаментальная последовательность является ограниченной?

33. Объясните, почему следующие последовательности не являются фундаментальными?

$$а)\ x_n = 2n-1;\quad б)\ x_n = n^{(-1)^n};\quad в)\ x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

34. Постройте отрицание свойства фундаментальности числовой последовательности.

35. Приведите пример ограниченной, но нефундаментальной последовательности.

36. Может ли числовая последовательность:

а) быть ограниченной, но расходящейся?

б) быть неограниченной, но сходящейся?

в) убывать, но расходиться?

г) возрастать, быть ограниченной, но расходиться?

Приведите обоснования сделанных выводов.

37. Сформулируйте определение подпоследовательности последовательности.

38. Укажите первый, четвёртый и пятый члены подпоследовательности $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n_k = k^2$; б) $x_n = (-1)^n$, $n_k = k(k+1)$; в) $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{4}$, $n_k = 8k+1$.

39. Будет ли подпоследовательностью последовательность:

а) полученная вычёркиванием из данной $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конечного числа членов?

б) полученная отбрасыванием из данной $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ некоторой совокупности (возможно пустой или бесконечной) её членов?

40. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то что можно сказать о сходимости подпоследовательности последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$?

41. Может ли сходящаяся последовательность иметь подпоследовательности, сходящиеся к разным числам?

42. Докажите расходимость последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

$$\text{а) } x_n = (-1)^n; \qquad \text{б) } x_n = \sin\frac{\pi n}{4}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Для последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, где $x_n = \frac{(-1)^n-3}{n^2}$ указать такой номер $N \in \mathbb{N}$, что члены последовательности, номера n которых больше N, удовлетворяют неравенству $|x_n| < 0,1$.

► Условие задачи можно интерпретировать так: требуется найти множество

$$U_N := \{n \in \mathbb{N} \mid n > N\} = \mathbb{N} \cap [N; +\infty[,$$

для каждого элемента n которого выполняется неравенство

$$\left|\frac{(-1)^n-3}{n^2}\right| < 0,1. \tag{5.1}$$

В отличие от решения школьных задач на неравенства, здесь не требуется находить «самое полное» множество U_N указанного вида, содержащееся в множестве всех решений неравенства (5.1). Наша задача предполагает нахождение хотя бы одного конкретного множества U_N. Понимание этого факта существенно упрощает задачу, ведь довольно «неприятное» неравенство (5.1) можно подменить более простым, но таким, что каждое его решение будет являться и решением исходного неравенства.

Для получения более простого неравенства, оценим следующим образом левую часть неравенства (5.1):

$$\left|\frac{(-1)^n-3}{n^2}\right| \leqslant \frac{|(-1)^n|+|3|}{n^2} = \frac{1+3}{n^2} = \frac{4}{n^2} \leqslant \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}. \tag{5.2}$$

Из оценок (5.2) следует, если при некотором $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\frac{4}{n} < 0,1$, то для этого же n будет выполняться и неравенство (5.1). Значит, если мы найдём множество U_N, указанного выше вида, на котором выполняется неравенство

$$\frac{4}{n} < 0,1, \tag{5.3}$$

то на этом же множестве будет выполняться и неравенство (5.1), и, значит, полученное множество U_N даст вариант возможного (но правильного!) ответа. Неравенство (5.3) решается просто: $n > 40$. Значит, в качестве требуемого N можно взять $N = 41$ или любое другое натуральное число, большее 40.

Замечание. Решение непосредственно неравенства (5.1) позволит установить, что в качестве N можно взять $N = 6$. Попробуйте это доказать. ■

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

► Согласно определению предела числовой последовательности требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что все члены данной последовательности, номера n которых превосходят N, удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Задача очень похожа на задачу 1 с той разницей, что теперь вместо $0,1$ следует брать произвольное положительное ε. Поэтому, как и в решении задачи 1, подменим неравенство $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ более простым $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (мы пользуемся тем, что $n < 2^n$ при $n \in \mathbb{N}$; это следует, например из неравенства Бернулли $(1+\sigma)^n \geqslant 1+n\sigma$ (при $\sigma > -1$), если положить $\sigma = 1$; можно неравенство $n < 2^n$ доказать и непосредственно методом математической индукции). Решение же неравенства $\frac{1}{n} < \varepsilon$ очевидно: $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому в качестве требуемого числа N можно взять $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ или большее. Теперь мы можем дать полное доказательство утверждения задачи.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем в качестве N число $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Покажем, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$. Действительно, так как $n \geqslant N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, то $n > \frac{1}{\varepsilon}$, и значит, $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Поскольку же

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}, \quad \text{то} \quad \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Таким образом, при любом $n \geqslant N$ неравенство $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$ выполняется. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. ■

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$, если $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 3)$, $x_1 = 0$.

► Первый способ. Перейдём от рекуррентного соотношения, определяющего каждый последующий член последовательности через предыдущие, к явной форме общего члена последовательности, т.е. такой формуле, в которой сразу указывается значения x_n в зависимости от значения n. Положим $x_n - 3 =: z_n$. Тогда числа z_n образуют последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, для которой $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n$, $z_1 = -3$. Но из этого следует, что

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}z_{n-1}\right) = \frac{1}{2^2}z_{n-1} = \frac{1}{2^3}z_{n-2} = \cdots = \frac{1}{2^n}z_1 = \frac{-3}{2^n} = \frac{-6}{2^{n+1}}.$$

Получили, что $z_{n+1} = -\frac{6}{2^{n+1}}$. Значит, $z_n = -\frac{6}{2^n}$, поэтому $x_n = 3 - \frac{6}{2^n}$. Теперь остается воспользоваться примером 2, в силу которого $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{2^n} = 0$ и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{6}{2^n} = 3.$$

Второй способ. Докажем, что число 3 является пределом данной последовательности, пользуясь непосредственно определением предела. Предварительно заметим, что

$$|x_n - 3| = \left|\frac{1}{2}(x_{n-1} + 3) - 3\right| = \frac{1}{2}|x_{n-1} - 3|,$$

т.е.

$$|x_n - 3| = \frac{1}{2}|x_{n-1} - 3|.$$

Применяя повторно полученное соотношение, получим:

$$|x_n-3|=\frac{1}{2}|x_{n-1}-3|=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|x_{n-2}-3|\right)=\frac{1}{2^2}|x_{n-2}-3|=$$

$$=\frac{1}{2^3}|x_{n-3}-3|=\dots=\frac{1}{2^{n-1}}|x_1-3|=\frac{3}{2^{n-1}}=\frac{6}{2^n}<\frac{6}{n}.$$

Теперь видно, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, например, $N=\left[\frac{6}{\varepsilon}\right]+1$, что для всех $n\geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n-3|<\varepsilon$. Следовательно, согласно определению предела последовательности,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3.\ \blacksquare$$

Замечание. Тот факт, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$, можно доказать иначе, если воспользоваться результатом примера 2 и теоремами об арифметических действиях с пределами сходящихся последовательностей. А именно, если обозначить предел последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ через a, то пользуясь указанными теоремами, из равенства $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+3)$ будем иметь:

$$a=\frac{1}{2}(a+3)\quad\Rightarrow\quad a=3.$$

Правда, чтобы воспользоваться этими теоремами, надо знать, что предел последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ существует. Попробуйте самостоятельно доказать существование указанного предела. (**Указание:** последовательность возрастает и ограничена сверху). $\blacksquare$

Пример 4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

► Преобразуем общий член последовательности:

$$x_n=\frac{2^n}{n!}=\frac{2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}=\frac{4\cdot2^{n-3}}{1\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n}=\frac{4}{3}\cdot\frac{2^{n-3}}{4\cdot5\cdot\ldots\cdot n}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{3}\cdot\frac{2^{n-3}}{\underbrace{2^2\cdot2^2\cdot\ldots\cdot2^2}_{(n-3)}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{2^{n-3}}{2^{2(n-3)}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^{n-3}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{2^n}=\frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2^n}.$$

Теперь имеем:

$$|x_n-0|=|x_n|=\left|\frac{2^n}{n!}\right|\leqslant\frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2^n}<\frac{33}{3}\cdot\frac{1}{n}=\frac{11}{n}.$$

Решив неравенство $\frac{11}{n}<\varepsilon$ при произвольном $\varepsilon>0$, найдём номер $N=\left[\frac{11}{\varepsilon}\right]+1$, для которого при $n\geqslant N$ выполняется неравенство $\left|\frac{2^n}{n!}\right|<\varepsilon$. Значит, согласно определению предела числовой последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$. $\blacksquare$

Замечание. Для доказательства равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$, можно использовать и теорему о «зажатой» последовательности: *если последовательности* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *и* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, *таковы, что* $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. У нас оценка имеется: $0<\frac{2^n}{n!}<\frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$. Положим $y_n=0$ и $z_n=\frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$, и, следовательно, по указанной теореме, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$ существует и равен 0. (Тот факт, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, так же может быть установлен с помощью указанной теоремы — достаточно воспользоваться оценками $0<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}$.) ■

Пример 5. Доказать, что $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, если $x_n=\frac{E(na)}{n}$, где a — некоторое число, и $E(b)$ обозначает целую часть числа b.

► По свойству целой части действительного числа имеем:

$$E(na)\leqslant na<E(na)+1 \quad\Rightarrow\quad na-1<E(na)\leqslant na.$$

Поэтому

$$\frac{na-1}{n}<\frac{E(na)}{n}\leqslant\frac{na}{n} \quad\Leftrightarrow\quad a-\frac{1}{n}<\frac{E(na)}{n}\leqslant a.$$

Последовательность $\left(a-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится к a, так как $\left|\left(a-\frac{1}{n}\right)-a\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ для всех номеров $n\geqslant N=E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1$. Постоянная последовательность $(a)_{n=1}^{\infty}$ сходится к a. Следовательно, по теореме о «зажатой» последовательности, предел $x_n=\frac{E(na)}{n}$ существует и равен a. ■

Пример 6. Доказать, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, если:

$$\text{а) } x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2};\qquad \text{б) } x_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!};$$

$$\text{в) } x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+3),\ x_1=0;\qquad \text{г) } x_{n+1}=\sqrt{3+x_n},\ x_1=0.$$

► Для доказательства сходимости данных последовательностей воспользуемся критерием Коши, согласно которому достаточно доказать фундаментальность этих последовательностей.

а) Для $\forall\varepsilon>0$ нужно доказать существование такого номера N, что для всех номеров n и m таких, что $n>N$ и $m>N$, выполняется неравенство $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

Считая $m>n$, т.е. $m=n+p$, оценим $|x_m-x_n|=|x_{n+p}-x_n|$. Имеем: $|x_{n+p}-x_n|=$

$$=\left|1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2}-\left(1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)\right|=$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Итак, $|x_m - x_n| < \frac{1}{n}$, при $m > n$. Теперь видно, что неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$ будет выполняться при $m, n > N$, если N выбрано как решение неравенства $\frac{1}{N} < \varepsilon \Leftrightarrow N > \frac{1}{\varepsilon}$. Достаточно взять $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. ■

б) Оценим разность $|x_{n+p} - x_n|$. Имеем:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!} - x_n\right| =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+p)}\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \dots + \frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{(p-1)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) < \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^p} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{n}.$$

Оценка $|x_m - x_n| < \frac{2}{n}$ при $m \geqslant n$ показывает, что неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$ будет иметь место, если m и n больше такого N, которое удовлетворяет неравенству $\frac{2}{N} < \varepsilon \Leftrightarrow N > \frac{2}{\varepsilon}$. Достаточно положить $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$. ■

в) Для заданной последовательности в примере 3 мы показали, что $x_n = 3 - \frac{6}{2^n}$. Поэтому

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|3 - \frac{6}{2^{n+p}} - 3 + \frac{6}{2^n}\right| = \left|\frac{6}{2^n} - \frac{6}{2^n \cdot 2^p}\right| = \frac{6}{2^n}\left|1 - \frac{1}{2^p}\right| \leqslant \frac{6}{2^n} < \frac{6}{n}.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны уже приведённым в примерах а) и б): требуемое N находится как решение неравенства $\frac{6}{N} < \varepsilon$, т.е. достаточно принять $N = \left[\frac{6}{\varepsilon}\right] + 1$. ■

г) Оценим вначале $|x_{k+1} - x_k|$. Имеем:

$$|x_k - x_{k+1}| = |\sqrt{3 + x_{k-1}} - \sqrt{3 + x_k}| = \left|\frac{(3 + x_{k-1}) - (3 + x_k)}{\sqrt{3 + x_{k-1}} + \sqrt{3 + x_k}}\right| =$$

$$= \frac{|x_{k-1} - x_k|}{\sqrt{3 + x_{k-1}} + \sqrt{3 + x_k}} < \frac{1}{2}|x_{k-1} - x_k|.$$

При получении последнего неравенства мы воспользовались тем, что

$$\sqrt{3 + x_{k-1}} + \sqrt{3 + x_k} > 2\sqrt{3} > 2.$$

Далее получаем:

$$|x_k - x_{k+1}| < \frac{1}{2}|x_{k-1} - x_k| < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|x_{k-2} - x_{k-1}| < \ldots < \frac{1}{2^{k-1}}|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{3}}{2^k} < \frac{4}{2^k}.$$

Используя полученную оценку $|x_k - x_{k+1}| < \frac{4}{2^k}$, оценим $|x_{n+p} - x_n|$:

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)| \leqslant$$

$$\leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| <$$

$$< \frac{4}{2^{n+p-1}} + \frac{4}{2^{n+p-2}} + \cdots + \frac{4}{2^n} = \frac{4}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) <$$

$$< \frac{4}{2^n} \cdot 2 = \frac{8}{2^n}.$$

Пользуясь тем, что $2^n > n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, окончательно получаем:

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{8}{n}.$$

Итак, $|x_{n+p} - x_n| < \frac{8}{n}$ при $m > n$. Следовательно, если выбрать в качестве N число $N = \left[\frac{8}{\varepsilon}\right] + 1$, то при любых m и n, больших N, будет выполняться неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$. ■

Пример 7. С помощью критерия Коши доказать, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится, если:

$$\text{а) } x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n}; \qquad \text{б) } x_{n+1} = 2x_n - 3,\ x_1 = 0.$$

► Согласно критерию Коши расходимость последовательности равносильна её нефундаментальности. Отрицание свойства фундаментальности последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ состоит в следующем: существует $\varepsilon > 0$ такое, что при любом $N \in \mathbb{N}$ найдутся числа m и n из $\mathbb{N}$ такие, что $m > N$, $n > N$ и $|x_m - x_n| \geqslant \varepsilon$.

а) Оценим $|x_{n+p} - x_n|$. Имеем:

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} >$$

$$> \frac{1}{\ln(n+p)} + \frac{1}{\ln(n+p)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} = \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p}.$$

Мы воспользовались неравенством $\ln(n+p) < n+p$. (Для его получения достаточно знать, что число e — основание логарифма — больше 2. В самом деле, $\ln(n+p) < n+p \Leftrightarrow n+p < e^{n+p}$. Но $n+p < 2^{n+p}$, а $2^{n+p} < e^{n+p}$. Значит, неравенство $n+p < e^{n+p}$, а с ним и $\ln(n+p) < n+p$, выполняется.) Итак, при любых натуральных n и p выполняется неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| > \frac{p}{n+p}.$$

Полагая $m = 2n$ (т.е. $p = n$), мы получаем, что

$$|x_m - x_n| > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ при каждом $N \in \mathbb{N}$ найдутся числа m и n, большие N (например, $n = N+1$, $m = 2n$), такие, что $|x_m - x_n| > \frac{1}{2}$. Последнее неравенство означает, что рассматриваемая последовательность не является фундаментальной и, значит, не является сходящейся. ■

б) Оценим $|x_k - x_{k+1}|$. Имеем:

$$|x_k - x_{k+1}| = |(2x_{k-1} - 3) - (2x_k - 3)| = 2|x_{k-1} - x_k| = 2 \cdot 2|x_{k-2} - x_{k-1}| =$$

$$= \dots = 2^{k-1}|x_1 - x_2| = 2^{k-1}|0 - 3| = 3 \cdot 2^{k-1} \geqslant 3.$$

Таким образом, при $\varepsilon < 3$, например, при $\varepsilon = 2$, для каждого $N \in \mathbb{N}$ найдутся номера n и m, большие N, например, $n = N+1$, $m = N+2$, такие, что имеет место неравенство $|x_m - x_n| > \varepsilon$. Значит, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не является фундаментальной и расходится. ■

Пример 8. С помощью критерия Вейерштрасса установить сходимость следующих последовательностей:

$$\text{а) } x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right); \quad \text{б) } x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n},\ x_1 = 0.$$

► а) Докажем вначале монотонность последовательности. Так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}=1+\frac{1}{2^{n+1}}>1,$$

то данная последовательность возрастает (в силу того, что $x_{n+1}>x_n$).

Докажем теперь её ограниченность. Из неравенства Коши

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\Leftrightarrow a_1{\cdot}a_2{\cdot}\ldots{\cdot}a_n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n$$

следует:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{n}\right)^n<\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<3.$$

Таким образом, согласно критерию Вейерштрасса, данная возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел. ■

б) Так как $x_2=\sqrt{2}<2$, $x_3=\sqrt{2+\sqrt{2}}<\sqrt{2+2}=2$, то можно предположить, что и $x_n<2$. Докажем это методом математической индукции. Пусть неравенство $x_n<2$ справедливо для $n=k$, т.е. $x_k<2$. Докажем, что тогда справедливо неравенство $x_{k+1}<2$, т.е. $\sqrt{2+x_k}<2$. В самом деле, $\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$. Значит, $x_{k+1}<2$. В силу принципа математической индукции неравенство $x_n<2$ выполняется для любого $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху. В силу справедливости неравенств

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}>\sqrt{2x_n}>\sqrt{(x_n)^2}=x_n$$

заключаем, что $x_{n+1}>x_n$, т.е. последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ возрастает. Значит, по критерию Вейерштрасса она имеет предел.

Найдём $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. Тогда, в силу сходимости подпоследовательности $(x_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ к тому же пределу, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\sqrt{2+\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$. Из полученного уравнения $A=\sqrt{2+A}$ относительно A следует, что $A>0$, и, решая его, получим: $A=2$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$. ■

Задачи для самостоятельного решения

1. Привести пример последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию:

а) $\forall m \exists n (x_m \neq x_n)$; б) $\exists N \forall n (x_n < x_N)$; в) $\exists N \forall n > N \forall m > N (x_n < x_m)$.

2. Показать, что изменение любой конечной совокупности членов последовательности не меняет характер сходимости последовательности и её предел, если он существует.

3. Доказать, что если последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — ограниченные, то:

а) последовательность $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная;

б) последовательность $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная.

Привести пример ограниченных последовательностей таких, что их частное — последовательность неограниченная.

4. Доказать неограниченность последовательности $(n^2 - n)_{n=1}^{\infty}$.

5. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

6. Известно, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, а $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая последовательность. Может ли $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$:

а) сходиться;

б) расходиться, но быть ограниченной;

в) быть бесконечно большой;

г) бесконечно малой?

Привести примеры в случае положительного ответа.

7. Доказать, что $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая последовательность при $|a| > 1$ и бесконечно малая при $|a| < 1$.

8. Доказать, что $(n^{(-1)^n})_{n=1}^{\infty}$ — неограниченная последовательность, но не является бесконечно большой.

9. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0,\ a\neq 1$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a,\ a>0$.

10. Привести пример последовательности:

а) не имеющей конечных частичных пределов;

б) имеющей единственный конечный частичный предел, но не являющуюся сходящейся;

в) имеющей бесконечное множество частичных пределов;

г) имеющей частичные пределы, равные всем членам последовательности.

11. Доказать, что для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы сходилась каждая её подпоследовательность.

12. Доказать, что для сходимости монотонной последовательности достаточно сходимости некоторой её подпоследовательности.

13. Доказать, что каждая монотонная последовательность имеет только один частичный предел.

14. Записать формулу общего члена последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

1) а) $(x_n)_{n=1}^{\infty}=(8;\ 14;\ 20;\ 26;\ 32;\dots)$; б) $x_1=0;\ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{n+1}$;

2) а) $(x_n)_{n=1}^{\infty}=(2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\dots)$; б) $x_1=4;\ x_{n+1}=-x_n$;

3) а) $(x_n)_{n=1}^{\infty}=\left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2};\ -\dfrac{9}{2};\ \dfrac{27}{2};\ -\dfrac{81}{2};\dots\right)$; б) $x_1=a;\ x_{n+1}=(n-1)x_n$;

4) а) $(x_n)_{n=1}^{\infty}=\left(2;\ \dfrac{3}{2};\ \dfrac{4}{3};\ \dfrac{5}{4};\ \dfrac{6}{5};\dots\right)$; б) $x_1=\dfrac{1}{2};\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2-x_n}$;

5) а) $(x_n)_{n=1}^{\infty}=(1;\ 3;\ 1;\ 3;\ 1;\dots)$; б) $x_1=\dfrac{1}{2};\ x_{n+1}=\dfrac{2}{3-x_n}$;

6) а) $(x_n)_{n=1}^{\infty}=(5;\ 7;\ 11;\ 19;\ 35;\dots)$; б) $x_1=4;\ x_{n+1}=-x_n$;

7) а) $(x_n)_{n=1}^{\infty}=(1;\ 2;\ 6;\ 24;\ 120;\dots)$; б) $x_1=10;\ x_{n+1}=5-x_n$.

15. Пользуясь определением предела, доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{0,5+n}=2;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{10}}{3^n}=0;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-6}{3n}=\dfrac{2}{3};\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1}=1;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+6}{1+n}=1;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{n!}=0;$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2};\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0;$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n}{2+n}=-1;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1;$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2n-1}=\dfrac{3}{2};\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0;$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{1-n^2}=-1;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{4}}=1.$

16. Доказать, пользуясь определением предела, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{n}\neq 2;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2}\neq 2;$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n^2-7}{4n^2+8}\neq 4;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3n-n^2}{1+n^2}\neq 1;$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4}{n^2+2n-1}\neq 1;$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-4n+1}{n^2+n}\neq 1;$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+2}{n^2+n-1}\neq 2.$

17. Доказать расходимость последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

1) $x_n=(-1)^n+1;$ 2) $x_n=\cos\pi n;$ 3) $x_n=n^{(-1)^n};$

4) $x_n=\ln n;$ 5) $x_n=\sin\dfrac{\pi n}{4}+1;$ 6) $x_n=\dfrac{n}{n+1}\sin\dfrac{2\pi n}{3};$

7) $x_n=\dfrac{n^2-1}{n+1}.$

18. Вычислить пределы числовых последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

1) $x_n=\dfrac{(3-n)^2-(3+n)^2}{(3-n)^2+(3+n)^2};\quad x_n=\dfrac{\sqrt[3]{27+n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}};\quad x_n=\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}};$

$x_n=\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1};\quad x_n=\dfrac{n!-(n+2)!}{(n-1)!-(n+2)!};\quad x_n=\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^n;$

$x_n=\dfrac{n-5^n}{n^3+5^{n+1}};\quad x_n=\dfrac{4n\sqrt[n]{5n}}{n-7^n};$

2) $x_n=\dfrac{\sqrt[4]{n}+1}{\sqrt{n}+n+1};\quad x_n=\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+2};\quad x_n=\dfrac{1+2+\cdots+n}{2n^2-3n+5};$

$x_n=\dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}-5^{n+2}};\quad x_n=\dfrac{(n+1)!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+2)!};\quad x_n=\left(\dfrac{2n+2}{2n-3}\right)^n;$

$$x_n = \frac{n^2+2^n}{n-2^{n+1}}; \quad x_n = \sqrt[3]{\frac{n+0,25}{8n+1}};$$

3) $x_n = \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$; $x_n = \dfrac{6n^3+\sqrt{n^5+1}}{n-\sqrt{4n^6+3}}$; $x_n = \dfrac{2^n+5^{n+1}}{2^{n+1}-5^{n+2}}$;

$x_n = \dfrac{\sqrt{9+2n^2}-5}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$; $x_n = \dfrac{n!-(n+1)!}{(n+2)!+(n+1)!}$; $x_n = \dfrac{n+1}{(0,3)^n\cdot n!}$;

$x_n = \sqrt{5n+3}-\sqrt{5n-4}$; $x_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$;

4) $x_n = \dfrac{(3-4n)^2}{1+2+3+\cdots+n}$; $x_n = \dfrac{n^2-\sqrt{n^3+2n}}{\sqrt[3]{n^6+2}+n}$; $x_n = \left(\dfrac{5n+1}{5n-1}\right)^{2-n}$;

$x_n = \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}$; $x_n = \dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+1)!}$; $x_n = \dfrac{n\cdot 3^n+1}{n!+1}$;

$x_n = \dfrac{3n^2-7n+4}{n^2-7^{n+1}}$; $x_n = \dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$;

5) $x_n = \dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$; $x_n = \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{5n^3}$; $x_n = \dfrac{3^{n-1}+5^{n-1}}{3^n-5^n}$;

$x_n = \sqrt{n(n-1)}-\sqrt{n(n+1)}$; $x_n = \dfrac{n^2-5^n}{\sqrt[3]{6n^3+2n^2-3}}$; $x_n = \dfrac{4^n-n^2\cdot 2^n}{n^4+2n!}$;

$x_n = \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$; $x_n = \left(\dfrac{10n+3}{10n-1}\right)^{5n}$;

6) $x_n = \dfrac{5n^3-3n^2+2n+1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$; $x_n = \dfrac{(5+n)^3}{n^3-7^n}$; $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}-3n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+2}}$;

$x_n = \sqrt{5n+1}-\sqrt{5n}$; $x_n = \dfrac{2n^2+3^{n+1}}{3^{n-1}+(4-n)^2}$; $x_n = \left(\dfrac{2n+3}{1+2n}\right)^{1-n}$;

$x_n = \dfrac{(n+1)!-(n-3)!}{(n+4)!}$; $x_n = \dfrac{2^n+n!}{10^n+(n+1)!}$;

7) $x_n = \dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$; $x_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+7\cdot 3^{n+1}}$; $x_n = \dfrac{n\operatorname{arctg} n}{2n+4}$;

$x_n = \sqrt[3]{n^3+n}-n$; $x_n = \dfrac{(n+1)!-(n-2)!}{(n+3)!}$; $x_n = \left(\dfrac{6n+1}{6n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$;

$x_n = \dfrac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{10\cdot 2^n+2\cdot 5^n}$; $x_n = \dfrac{n^2+\sqrt{n^3+4n^2-2}}{2^{n+1}-3n^2}$.

19. Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, доказать сходимость её и найти предел:

1) $x_n = \dfrac{1}{2+1} + \dfrac{1}{2^2+1} + \dots + \dfrac{1}{2^n+1}$; 2) $x_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!!}$;

3) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2\cdot 2} + \dfrac{1}{3\cdot 2^2+1} + \dots + \dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$; 4) $x_1 = 13$; $x_n = \sqrt{12+x_n}$;

5) $x_n = \dfrac{1}{5+1} + \dfrac{1}{5^2+1} + \dots + \dfrac{1}{5^n+1}$; 6) $x_n = a^{\frac{1}{2^n}}$ $(a>1)$;

7) $x_n = \dfrac{1}{3+1} + \dfrac{1}{3^2+2} + \dots + \dfrac{1}{3^n+n}$.

20. Найти все частичные пределы последовательности. Определите верхний и нижний пределы последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

1) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{3}$; 2) $x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{2n+1}{n}\sin\dfrac{\pi n}{2}$;

3) $x_n = (-1)^{n+1}\cdot 2 + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 3 + 1$; 4) $x_n = \dfrac{n+1}{n+1+n\cdot(-1)^n}$;

5) $x_n = n\cdot\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$; 6) $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}$.

21. Доказать фундаментальность последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

1) $x_n = \dfrac{\cos 1}{3} + \dfrac{\cos 2}{3^2} + \dots + \dfrac{\cos n}{3^n}$; 2) $x_n = \dfrac{n+1}{3n+2}$;

3) $x_n = \dfrac{\sin\alpha}{2} + \dfrac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dots + \dfrac{\sin n\alpha}{2^n}$, $\alpha\in\mathbb{R}$; 4) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dots + \dfrac{1}{n!}$;

5) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)}$; 6) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}$.

Глава 6

Функции одной переменной. Простейшие понятия, связанные с ними

В этой теме прорабатываются следующие понятия: отображение; типы отображений; функция действительной переменной; способы её задания; композиция; четные и нечетные функции; монотонные и кусочно-монотонные функции; периодические функции; ограниченные и неограниченные функции; понятие графика функции.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Что понимается под отображением множества X в множество Y?

2. Пусть S — множество всех четырехугольников на плоскости, T — множество точек этой плоскости. Будет ли являться отображением $f : S \mapsto T$ правило f, сопоставляющее

а) четырехугольнику точку пересечения его диагоналей;

б) четырехугольнику точку пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон;

в) четырехугольнику центр вписанной в него окружности;

г) четырехугольнику центр описанной около него окружности;

д) четырехугольнику центр окружности, не пересекающейся с его сторонами?

3. Сформулируйте определение образа $f(A)$ множества $A \subset X$ при отображении $f : X \mapsto Y$. Запишите это определение с помощью логических символов.

4. Что называется прообразом $f^{-1}(B)$ множества $B \subset Y$ при отображении $f : X \mapsto Y$? Оформите краткую запись этого определения.

5. Сформулируйте определение прообраза элемента $y \in Y$ при отображении $f : X \mapsto Y$ и запишите его с помощью символов.

6. Пусть дано отображение $f : X \mapsto Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Верно ли, что:

а) $f(f^{-1}(B)) = B$; б) $f^{-1}(f(A)) \supset A$?

7. Что понимается под отображением множества X **на** множество Y? В чем состоит отличие отображения X на Y от отображения X в Y?

8. Основные свойства отображения выражены в следующих теоремах:

а) *прообраз объединения двух множеств равен объединению их прообразов, т.е.*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B);$$

б) *прообраз пересечения двух множеств равен пересечению их прообразов, т.е.*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B);$$

в) *образ объединения двух множеств равен объединению их образов, т.е.*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Можно ли эти свойства распространить на большее чем два число множеств?

9. Пусть дано отображение $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, определяемое законом: а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = x^2$. Найдите образы множеств A, B и $A \cap B$, если: $A = [0;\ \frac{3}{4}\pi]$, $B = [\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi]$. Верно ли, что $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

10. Докажите, что $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ для любого отображения $f : X \mapsto Y (A \subset X,\ B \subset Y)$.

11. Пусть дано отображение $f : X \mapsto Y$. Запишите в логической символике определение каждого из высказываний: а) f — сюрьективно; б) f — инъективно; в) f — биективно.

12. Запишите отрицание каждого из определений задания 11 с помощью символов.

13. Пусть X и Y — числовые множества, т.е. $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$. Отображение $f : X \mapsto Y$, называется функцией действительной переменной. Какая из указанных ниже функций $y = f(x)$ инъективна, сюрьективна, биективна; если она рассматривается как отображение $f : [0;\ 1] \mapsto [0;\ 3]$?

а) $f(x) = 3 \sin \dfrac{\pi x}{2}$; б) $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}$; в) $f(x) = 3^x$;

г) $f(x) = 12 \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$; д) $f(x) = 3 - \dfrac{16}{3} \left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2$; е) $f(x) = 2x + 1$.

14. Найдите $f(0)$, $f(3)$, $f(-3)$, $f(-x)$, $f(x^2)$, $f(x^2+1)$, $f(f(x))$, если:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1+2x}{2}; \quad \text{б) } f(x) = |x| - 2; \quad \text{в) } f(x) = x - \sqrt{x-1};$$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leqslant 2; \\ 2, & |x| > 2. \end{cases}$$

15. Чему равно $f(x)$, если известно, что:

$$\text{а) } f(x+2) = x^2; \quad \text{б) } f(x-1) = \frac{1}{x+4}; \quad \text{в) } f(x+1) = x^2 - 2x + 1;$$

$$\text{г) } f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^4+1}{x^2}.$$

16. Найдите область определения $D(f)$ функции f, если:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{x+|x|}; \qquad \text{б) } f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\lg(16-x^2)}; \quad \text{в) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x};$$

$$\text{г) } f(x) = \sqrt{x^2(x-2)}; \quad \text{д) } f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}; \qquad \text{е) } f(x) = \sqrt{-x^2}.$$

Обсуждение. Формулировка задачи может показаться странной, и для этого есть основания. Со строгой математической точки зрения функция рассматривается как понятие, соединяющее в один объект — функцию — три разных объекта: два множества (точнее, упорядоченную пару из двух множеств) и правило, сопоставляющее каждому элементу «первого» множества конкретный элемент «второго» (правило можно также описать как некоторое множество, но на первых порах лучше этого не делать - чрезмерное увлечение «деталями» откладывает целостное представление об изучаемом объекте на неопределённое время). Это подчёркивает и обозначение $f : X \mapsto Y$, в котором подразумевается, что X это «первое» множество, Y — «второе», а f — правило, по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется элемент $y = f(x)$ множества Y. Если какой-нибудь объект из тройки $f : X \mapsto Y$ изменить, то, естественно, изменится и вся функция. Если же какой-либо объект из этой тройки вовсе не указан, то бессмысленно вообще вести речь о функции. Например, функции $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ и $g : [0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$, в которых правила f и g задаются равенствами $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^2$, различаются, хотя элемент $y \in \mathbb{R}$, сопоставляемый x, вычисляется по «одной и той же» формуле $y = x^2$ (функция g, в отличие от f, задаёт биекцию $[0; +\infty[$

на $\mathbb{R}$ и имеет обратную, обозначаемую как $\sqrt{x}$). Если спросить теперь, какую область определения имеет функция $y = x^2$, то абсолютно неясно, о какой функции идёт речь, об f, g или ещё какой-то. Тем не менее, задача на отыскание области определения функции имеет конкретный смысл, который, однако, упрятан в контекст. Смысл задачи состоит в том, что для числовой функции $f : X \mapsto Y$ ($X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$) в качестве множества Y всегда выбирается множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$, и поэтому о нём можно больше не говорить. Множество X — область определения функции f — не обязана совпадать с $\mathbb{R}$, но считается, что если (числовая) функция указывается только аналитической записью правила $y = f(x)$, то под её областью определения **подразумевается** *множество всех действительных чисел $x \in \mathbb{R}$, при которых действие правила f возможно.* (Например, правило $f(x) = \frac{1}{x}$ можно применить только к $x \neq 0$.) Областью определения функции $y = x^2$ служит $X = \mathbb{R}$. Если же нам нужно выделить вместо $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, функцию $g : [0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$, то область определения функции нельзя только подразумевать, её необходимо указывать. Делается это записью: $y = x^2$, если $x \in [0; +\infty[$. Вместо слова «если» можно употребить «при» или вообще ограничиться запятой. ■

17. Что называется множеством значений $E(f)$ функции f? Найдите $E(f)$, если:

а) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; б) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$; г) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$.

18. Сформулируйте определение композиции (сложной функции) функций f и g.

19. Найдите композиции $f \circ g$, $g \circ f$, укажите $D(f \circ g)$, $E(f \circ g)$, $D(g \circ f)$, $E(g \circ f)$, если:

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{x}$;

в) $f(x) = 2x$, $g(x) = \lg x$; г) $f(x) = 10^x$, $g(x) = \lg x$.

д) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0; \\ 0, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

20. Запишите определение четной функции и отрицание этого определения с помощью логической символики. Верно ли, что если f не является четной функцией, то она будет нечетной?

21. Какие из указанных функций являются четными, какие нечетными?

а) $f(x) = \sin x^2$; б) $f(x) = \sin(x+1)$; в) $f(x) = \cos x^3$;

г) $f(x) = \cos^3 x$; д) $f(x) = \dfrac{(x-1)x^3}{x-1}$; е) $f(x) = \begin{cases} x^3, & |x| \leqslant 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

22. Будет ли четной функцией сумма, произведение четных функций?

23. Докажите, что произведение двух нечетных функций есть четная функция.

24. Какой (четной, нечетной) функцией будет произведение четной функции на нечетную?

25. Какой (в отношении чётности-нечётности) будет сумма четной и нечетной функций?

26. Докажите четность функции $f(g(x))$, если $g(x)$ — четная функция.

27. Какой функцией (четной или нечетной) будет $f \circ g$, если:
а) f и g — нечетные функции;
б) f — четная функция, а g — нечетная?

28. Какая функция называется периодической? Сформулируйте отрицание определения периодической функции.

29. Может ли периодическая функция иметь только один период?

30. Докажите периодичность заданной функции $f(x)$ и найдите наименьший положительный период, если такой существует.

а) $f(x) = 2$; б) $f(x) = \sin 2x$; в) $f(x) = \{x\} := x - E(x)$;

г) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$

31. Докажите, что ни одна из приведенных ниже функций не является периодической:

а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = x^2 + 1$; в) $f(x) = \sin |x|$.

32. Приведите примеры непериодических функций f и g таких, что: а) $f + g$; б) $f \circ g$ периодичны и имеют наименьший положительный период.

33. Пусть $|f(x)|$ — периодическая функция. Следует ли отсюда, что f — периодическая функция?

34. Какая функция называется ограниченной? Запишите отрицание определения ограниченной функции с помощью логических символов.

35. Сформулировать и записать с помощью логических символов: а) определение неограниченной функции сверху; б) определение неограниченной функции снизу; в) отрицание определений а) и б).

36. Доказать ограниченность функций:

а) $f(x) = 2x + 1$, $x \in [-1;\, 2]$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x-10}$, $x \in [0;\, 5]$;

в) $f(x) = \dfrac{2\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; г) $f(x) = \{x\}$.

37. Показать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ неограничена и сверху, и снизу.

38. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ является ограниченной снизу и неограниченной сверху.

39. Сформулируйте определение верхней (нижней) грани функции. Запишите отрицание этих определений.

40. Укажите $\sup f(x)$, $\inf f(x)$, если они существуют для функций задания 36. Что называют наибольшим (наименьшим) значением функции на множестве $X \subset D(f)$?

41. Укажите $\max f(x)$, $\min f(x)$, если они существуют, для функций задания 36.

42. Следует ли из существования конечного $\sup f(x)$ $(\inf f(x))$ существование наибольшего (наименьшего) значений функции? Приведите примеры, подтверждающие ответ.

43. Из существования $\max f(x)$ $(\min f(x))$ следует ли существование $\sup f(x)$ $(\inf f(x))$? Чему равен $\sup f(x)$ $(\inf f(x))$?

44. Докажите, что:

а) если существует $\max\limits_X f(x)$, то $\sup\limits_X f(x) = \max\limits_X f(x)$;

б) если существует $\min\limits_X f(x)$, то $\inf\limits_X f(x) = \min\limits_X f(x)$.

45. Найдите $\sup\limits_X f(x)$, $\inf\limits_X f(x)$, $\max\limits_X f(x)$, $\min\limits_X f(x)$, если они существуют:

а) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$; б) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, $x \in]0;\, +\infty[$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; г) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, $x \in]-\infty;\, 0[$.

46. Какая функция называется монотонной? Строго монотонной?

47. Сформулируйте и запишите определение возрастающей функции на множестве X. Какая функция на множестве X называется строго возрастающей? Приведите примеры таких функций.

48. Сформулируйте и запишите определение убывающей функции на множестве X. Какая функция называется строго убывающей на множестве X? Приведите примеры таких функций.

49. Задайте графически функцию, которая:

а) возрастает на $]-\infty;\ -1]\cup[0;\ 2]$ и убывает на $[-1;\ 0]\cup[2;\ +\infty[$;

б) возрастает на промежутке вида $[n;\ n+1[$, $n\in\mathbb{Z}$, но не является возрастающей ни на каком промежутке длины, большей 1;

в) имеет бесконечное число промежутков убывания и возрастания.

50. Какую функцию называют кусочно-монотонной? Приведите примеры таких функций.

51. Может ли убывающая (возрастающая) функция на всей числовой прямой быть а) четной; б) нечетной; в) периодической?

52. Сформулируйте и запишите с помощью логических символов утверждения: а) функция не является возрастающей; б) функция не является убывающей; в) функция не является монотонной.

53. Приведите пример функции на $\mathbb{R}$, не являющейся монотонной ни на одном интервале.

54. Приведите пример двух возрастающих на интервале $]a;\ b[$ функций, произведение которых: а) возрастающая на $]a;\ b[$ функция; б) убывающая на $]a;\ b[$ функция; в) немонотонная на $]a;\ b[$ функция.

55. Какой функцией (возрастающей или убывающей) на интервале $]a;\ b[$ будет:

а) сумма двух возрастающих на $]a;\ b[$ функций;

б) сумма двух убывающих на $]a;\ b[$ функций;

в) разность двух возрастающих на $]a;\ b[$ функций;

г) разность двух убывающих на $]a;\ b[$ функций?

56. Может ли быть строго монотонной: а) периодическая функция; б) четная функция; в) нечетная функция?

57. Докажите, что постоянной функцией является: а) монотонная четная функция; б) периодическая монотонная функция.

Глава 7

Предел функции действительной переменной

В данной теме рассматриваются: определения предела функции в точке (в том числе и односторонние), эквивалентность различных определений, общие свойства (единственность предела и ограниченность функции в окрестности предельной точки), влияние предельного перехода на арифметические операции и неравенства, предел функции на бесконечности, предел композиции функций, замечательные пределы.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Пользуясь геометрическим смыслом модуля числа, дайте словесное описание места расположения точек x на числовой оси, если
а) $|x-1,1|<0,5$; б) $0<|x-1,1|<0,5$.

2. Что называется ε-окрестностью точки $a\in\mathbb{R}$? Что называется проколотой ε-окрестностью точки $a\in\mathbb{R}$?

3. Будут ли являться указанные множества ε-окрестностью (проколотой ε-окрестностью) точки $x=a$, если:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } a=1,1;\quad]0,6;\,1,6[;\quad]0,6;\,1,1[\cup]1,1;\,1,6[;\\
&\text{б) } a=2;\quad]-1;\,3[;\quad]-1;\,0[\cup]0;\,3[;\quad]0,9;\,2,1[;\\
&\text{в) } a=3;\quad]2,9;\,3,1[;\quad]2,9;\,3[\cup]3;\,3,1[;\quad]3;\,3,1[?
\end{aligned}$$

4. Окрестностью какой точки a и какого радиуса $\varepsilon>0$ является каждый из следующих интервалов:

$$\text{а) }]0,1;\,0,3[;\quad \text{б) }]0,1;\,0,2[\cup]0,2;\,0,3[;\quad \text{в) }]2,1;\,2,3[;$$

$$\text{г) }]-0,1;\,0,1[;\quad \text{д) }]4,75;\,5,25[\cup]0,2;\,0,3[;\quad \text{е) }]4,75;\,5[\cup]5;\,5,25[?$$

Запишите эти окрестности, используя знак модуля.

5. Для $\varepsilon = 0,01$ найдите такое число $\delta > 0$, при котором из неравенства $0 < |x-1| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если:

$$\text{а) } f(x) = 2x+1,\ A = 3; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{x+2},\ A = \frac{1}{3}; \quad \text{в) } f(x) = x^2,\ A = 1.$$

6. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдите такое число $\delta > 0$, при котором из неравенства $0 < |x-1| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если $f(x)$ и A взяты из задания 5.

7. Сформулируйте определение предела функции в точке на языке «$\varepsilon - \delta$» и запишите его с использованием логических символов.

8. а) Пользуясь определением предела для функции $f(x) = 3x^2 - 2$, докажите, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 10$.

б) Каким достаточно брать $\delta > 0$, чтобы из неравенства $0 < |x-2| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - 10| < \varepsilon$, если $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$?

в) Укажите наибольшее $\delta > 0$, для которого из неравенства $0 < |x-2| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x) - 10| < \varepsilon$, если $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

9. Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

10. Для существования предела функции в точке необходимо ли, чтобы функция была определена в этой точке? Приведите соответствующие примеры.

11. Сформулируйте определение предела функции в точке на языке последовательностей (по Гейне).

12. Пользуясь определением предела функции по Гейне, докажите единственность предела функции в точке.

13. Сформулируйте определение предела функции на языке окрестностей.

14. Исходя из геометрических соображений, объясните, используя определение предела функции на языке окрестностей, почему $\lim\limits_{x\to 1} 3^x = 3$.

15. Что означает эквивалентность определений предела функции в точке? Докажите теорему об эквивалентности определений предела функции в точке.

16. Сформулируйте отрицания определений предела функции в точке и предложите краткую запись отрицаний с помощью логических символов.

17. Докажите, что функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$.

18. Докажите, что функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } x \text{ — \textit{иррациональное число};} \\ 1, & \text{\textit{если} } x \text{ — \textit{рациональное число},} \end{cases}$$

не имеет предела ни в одной точке.

19. Верно ли, что функция, имеющая предел в точке x_0, ограничена в некоторой окрестности этой точки? Существует ли зависимость между знаком предела функции в точке x_0 и знаком функции во всех точках некоторой проколотой окрестности точки x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$?

20. Сформулируйте определения односторонних пределов функции в точке x_0 и отрицания этих определений.

21. При каких условиях из существования односторонних пределов функции в точке следует существование предела функции в этой точке? Верно ли, что, если существует предел функции в точке, то существуют её односторонние пределы в точке?

22. Найдите односторонние пределы $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $x = 0$. Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

23. Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0; \\ \sin x, & x > 0; \end{cases}$ б) $f(x) = [x]$ — целая часть числа x;

в) $f(x) = \{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x.

24. Задайте графически какую-либо функцию, которая

а) определена в точке $x = 2$, но не имеет предела в этой точке;

б) не определена в точке $x = 2$, но имеет предел в этой точке;

в) определена в точке $x = 2$, имеет предел в этой точке и $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$;

г) определена в точке $x = 2$, имеет предел в этой точке, но $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$;

д) определена в проколотой окрестности точки $x = 2$, но не имеет предела в этой точке.

25. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях с пределами функций (предел суммы и т.д.).

26. Вычислить указанные ниже пределы, если $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -2$ и $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 5$.

а) $\lim\limits_{x\to 3}(4f(x) - 2g(x))$; б) $\lim\limits_{x\to 3} f^2(x)$; в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4f(x)}{g(x)-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}(3f(x) + g(x))^3$; д) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2g(x)+3f(x)}{g(x)-f^2(x)}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} + f^2(x)\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g^2(x)+1}$.

27. Может ли существовать $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, если известно, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0?$$

Рассмотрите функции:

а) $f(x) = x - 2$; $g(x) = x^3 - 8$; $x_0 = 2$;

б) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $g(x) = x^2 - 1$; $x_0 = 1$.

Почему

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)(x-x_0)}{\psi(x)(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}?$$

28. Всегда ли выполняется равенство $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to a} g(y)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$? Сформулируйте теорему о пределе композиций двух функций.

29. Пусть $f(x) = x^2 \cos\dfrac{\pi}{x}$, $g(x) = \operatorname{sign}^2 x$. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, но $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$ — не существует. Объяснить, почему не применима теорема о пределе композиций этих функций?

30. Используя теорему о пределе композиции двух функций, найдите:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{8 - x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} 2^{x^2+3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3} \sin\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} \ln(e^{1-x} + 1)$.

31. При каких условиях справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big)?$$

Можно ли вычислить пределы функций задания 30, используя это равенство?

32. При каких условиях справедливы равенства

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x)}?$$

33. Используя равенство задания 32 и замечательные пределы

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \qquad \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1,$$

вычислите пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}(1-2x^3)^{x^3}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

34. Верно ли, что:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \ \ (a>0,\ a\neq 1);$$

$$\text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \ \ (a>0,\ a\neq 1)?$$

35. Сформулируйте определения предела функции при $x\to\infty$, при $x\to+\infty$ и отрицания этих определений.

36. Используя логическую символику, запишите утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty} f(x)\neq 4; \ \text{б) } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b; \ \text{в) } \lim_{x\to+\infty} f(x)\neq b; \ \text{г) } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 4.$$

37. Докажите, что:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}.$$

38. Почему функция $y=\sin x$ не имеет предела при $x\to\infty$?

39. Используя логическую символику, запишите утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty; \qquad \text{б) } \lim_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty; \qquad \text{в) } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty;$$

$$\text{г) } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty; \qquad \text{д) } \lim_{x\to 1+0} f(x) \neq -\infty; \qquad \text{е) } \lim_{x\to-\infty} f(x)\neq\infty.$$

40. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Докажите, что:

$$\text{а) } \lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = -\infty; \qquad \text{б) } \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = \infty \ (\text{при } b\neq 0);$$

$$\text{в) } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \infty \ (\text{при } b\neq 0).$$

41. Пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \ (f(x) \neq 0, \ \text{при} \ x \neq a), \ \lim_{x\to a} g(x) = b \neq 0.$$

Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \infty$.

42. Какая функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$?

43. Какие из следующих функций являются бесконечно большими?

а) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + 2x - 4}$, $x \to \infty$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 4} - \dfrac{1}{x - 4}$, $x \to 4$;

в) $f(x) = x^x$, $x \to +0$; г) $f(x) = x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$, $x \to \pm\infty$;

д) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x \to +\infty$.

44. Какие функции называются бесконечно малыми при $x \to x_0$?

45. Укажите бесконечно малые функции, если:

а) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 - x}$, $x \to 1$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$, $x \to \pm\infty$;

в) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \to 0$, $x \to \infty$; г) $f(x) = x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$, $x \to 0$, $x \to \infty$.

46. Перечислите теоремы о предельных переходах в неравенствах.

47. Используя неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}),$$

докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (**первый замечательный предел**).

48. Какие замечательные пределы функций используются при вычислении пределов?

49. Используя первый замечательный предел, докажите, что:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arcsin x} = 1$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{x} = a$.

50. Сформулируйте критерии существования предела функции. Как они применяются в теории и на практике? Чем отличаются условия существования предела функции в точке в критерии Коши от условий существования предела в других критериях?

51. В каком случае общий критерий Коши существования предела функции совпадает с критерием Коши предела последовательности?

52. Что называется нижним и верхним пределом функции в точке x_0?

53. Верно ли, что равенства

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = A$$

необходимы и достаточны для того, чтобы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$?

54. Найдите $\underline{\lim}\limits_{x\to 0} f(x)$, $\overline{\lim}\limits_{x\to 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, если:

$$\text{а) } f(x) = \sin\frac{1}{x}; \qquad \text{б) } f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}; \qquad \text{в) } f(x) = \sin\pi x\cdot\cos\frac{\pi}{x}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}(2x^2+4) = 6; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \frac{3}{4}.$$

► Для доказательства воспользуемся определением предела функции по Коши.

а) Согласно определению предела требуется доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что как только выполняется неравенство $0 < |x-1| < \delta$, то выполняется и неравенство $|2x^2+4-6| < \varepsilon$.

Так как

$$|2x^2+4-6| = |2x^2-2| = 2|x-1||x+1|,$$

то наша цель обеспечить выполнение неравенства $2|x-1||x+1| < \varepsilon$. При этом в рассмотрение принимаются только x, δ-близкие к 1, а именно, удовлетворяющие неравенству $0 < |x-1| < \delta$. Оценим $|x+1|$ через $|x-1|$:

$$|x+1| = |(x-1)+2| \leqslant |x-1|+2.$$

Будем искать $\delta \leqslant 1$. Тогда $|x-1| < \delta \leqslant 1$ и, следовательно,

$$|x+1| \leqslant |x-1|+2 < 1+2 = 3.$$

Таким образом, при $0 < |x-1| < \delta \leqslant 1$ выражение $2|x-1||x+1|$ можно оценить так:

$$2|x-1||x+1| < 2|x-1|\cdot 3,$$

т.е. $|2x^2 + 4 - 6| < 6|x - 1|$. Теперь видно, что для выполнения неравенства $|2x^2 + 4 - 6| < \varepsilon$ достаточно обеспечить выполнение неравенств

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{и} \quad |x - 1| < 1.$$

Значит, если взять в качестве $\delta = \min\{1; \frac{\varepsilon}{6}\}$, то для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 1| < \delta$ будет выполняться неравенство $|2x^2 + 4 - 6| < \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 + 4) = 6$.

Отметим, что в качестве δ можно взять не только $\min\{1; \frac{\varepsilon}{6}\}$, но и любое число, меньшее его. ■

б) Для любого заданного $\varepsilon > 0$ необходимо найти такое $\delta > 0$, что при выполнении неравенства $0 < |x - 2| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим последнее неравенство, т.е. неравенство

$$\frac{|x - 2|^2}{4|x - 2||x + 2|} < \varepsilon.$$

При $0 < |x - 2|$ оно принимает вид: $\frac{|x-2|}{|x+2|} < 4\varepsilon$. Достаточно найти $\delta \leqslant 1$. Тогда для x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - 2| < \delta \leqslant 1$, будем иметь:

$$|x + 2| = |x - 2 + 4| = |4 - (2 - x)| \geqslant 4 - |2 - x| = 4 - |x - 2| \geqslant 4 - 1 = 3.$$

Следовательно, при $0 < |x - 2| < \delta \leqslant 1$ имеем:

$$\left|\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} - \frac{3}{4}\right| = \frac{|x - 2|}{4|x + 2|} \leqslant \frac{|x - 2|}{4 \cdot 3}.$$

Значит, для выполнения неравенства $\left|\frac{x^2-x-2}{x^2-4} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$ достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$|x - 2| < 4 \cdot 3 \cdot \varepsilon \quad \text{и} \quad 0 < |x - 2| < \delta \leqslant 1.$$

Таким образом, в качестве δ можно взять меньшее из чисел 1 и 12ε, т.е. $\min\{1; 12\varepsilon\}$. Итак, при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \min\{1; 12\varepsilon\}$ такое, что из неравенства $0 < |x - 1| < \delta$ следует неравенство $\left|\frac{x^2-x-2}{x^2-4} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \frac{3}{4}.$$ ■

Пример 2. Доказать, что:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty; \qquad \text{б)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{3}{2}.$$

► а) По определению, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, если для любого числа $M>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех значений $x\neq 1$ и удовлетворяющих неравенству $|x-1|<\delta$, выполняется неравенство $|\frac{1}{x-1}|>M$. По заданному $M>0$ будем искать $\delta>0$ из условия $|\frac{1}{x-1}|>M$, $|x-1|<\frac{1}{M}$. Положив $\delta=\frac{1}{M}$, получим, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $0<|x-1|<\frac{1}{M}$ выполняется неравенство $|\frac{1}{x-1}|>M$. Это значит, что действительно

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty. \ \blacksquare$$

б) Нужно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $M>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>M$, выполняется неравенство $|\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{3}{2}|<\varepsilon$.

Рассмотрим неравенство $|\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{3}{2}|<\varepsilon$. После простых преобразований его можно переписать в виде

$$\frac{1}{2|2x+1|}<\varepsilon \qquad \text{или} \qquad |2x+1|>\frac{1}{2\varepsilon}.$$

Так как $|2x+1|>2|x|-1$, то требуемое неравенство $|2x+1|>\frac{1}{2\varepsilon}$ обеспечивается выполнением неравенства $2|x|-1>\frac{1}{2\varepsilon}$, т.е. неравенства $|x|>\frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Положив $M=\frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}$, получим, что для заданного $\varepsilon>0$ существует $M=\frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>M$, выполняется неравенство $|\frac{3x-1}{2x+1}-\frac{3}{2}|<\varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{3}{2}. \ \blacksquare$$

Пример 3. Доказать, что функция $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела при $x\to 0$.

► Решим задачу сначала с помощью отрицания определения предела функции по Коши. Согласно ему требуется доказать, что для каждого числа A существует $\varepsilon>0$, обладающее свойством: для любого $\delta>0$ найдётся $x\in\mathbb{R}$ такое, что выполняются неравенства

$$0<|x|<\delta \qquad \text{и} \qquad \left|\sin\frac{1}{x}-A\right|\geqslant\varepsilon.$$

Рассмотрим, сначала, $A = 0$. Если положить $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то при любом $\delta > 0$ найдётся $x_n = (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)^{-1}$, с достаточно большим $n \in \mathbb{N}$, такое, что: $0 < |x_n| < \delta$. Для этого же x_n имеем $|\sin\frac{1}{x_n} - 0| = 1$, поскольку $\sin\frac{1}{x_n} = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$. Так как $1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$, то $0 < |x_n| < \delta$ и $|\sin\frac{1}{x_n}| > \frac{1}{2}$, следовательно, число 0 не является пределом $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Пусть теперь $A \neq 0$. Возьмём $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ и $x_n = \frac{1}{2\pi n}$. Тогда для каждого $\delta > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что выполняются неравенства $0 < |x_n| < \delta$ и $|\sin\frac{1}{x} - A| = |A|$. Но $|A| > \frac{|A|}{2}$, и, значит, число $A \neq 0$ также не является пределом рассматриваемой функции в точке $x = 0$.

Гораздо проще использовать отрицание предела функции в точке по Гейне. Согласно ему в рассматриваемой задаче достаточно показать, что не для каждой сходящейся к 0 последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ последовательность $(\sin\frac{1}{x_n})_{n=1}^{\infty}$ будет сходиться к одному и тому же числу.

Рассмотрим последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(x'_n)_{n=1}^{\infty}$, где $x_n = (\pi n)^{-1}$ и $x'_n = (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)^{-1}$. Обе последовательности сходятся к нулю, но соответствующие им последовательности значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ и $(f(x'_n))_{n=1}^{\infty}$ сходятся к разным числам:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(\pi n) = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Значит, согласно определению предела функции в точке по Гейне, функция f не имеет предела в точке $x = 0$. ■

Пример 4. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Доказать, что

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty.$$

► Требуется доказать, что для

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x)| > M).$$

Пусть M — произвольное положительное число. В силу того, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, существует δ_1-окрестность точки a, в которой $f(x)$ ограничена, т.е. $|f(x)| \leqslant C$, где C — некоторое положительное число. Поскольку $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, то (для любого, в том числе и) для числа $M + C$ существует $\delta_2 > 0$ такое, что при любом x, удовлетворяющем неравенству $0 < |x - a| < \delta_2$, выполняется неравенство $g(x) > M + C$. Положим

$\delta = \min\{\delta_1;\ \delta_2\}$, и пусть $0 < |x-a| < \delta$. Тогда выполняются оба неравенства: $|f(x)| \leqslant C$ и $g(x) > M + C$. Поэтому

$$|f(x) + g(x)| \geqslant |g(x)| - |f(x)| > (M + C) - C = M.$$

Итак, для любого числа $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) + g(x)| > M$. Значит, $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$. ■

Пример 5. Исследовать на существование предела в точке $t = 0$ функцию $f(x(t))$, если $f(x) = \operatorname{sign}^2 x$ и

$$x(t) = \begin{cases} t, \ \text{если} \ \dfrac{1}{2k} < t < \dfrac{1}{2k-1},\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0; \\ -t, \ \text{если} \ \dfrac{1}{2k+1} < t < \dfrac{1}{2k},\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0; \\ 0, \ \text{если} \ t = \dfrac{1}{k},\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0. \end{cases}$$

► Для любого $\delta > 0$ в проколотой δ-окрестности точки $t = 0$ найдётся бесконечно много t, равных $\frac{1}{k}$. В этих точках $x(t) = 0$ и, следовательно, $f(x(t)) = 0$. С другой стороны, там же, т.е. в $]-\delta;\ 0[\cup]0;\ \delta[$, найдутся точки t, отличные от $\frac{1}{k}$, а именно, t, принадлежащие

$$\left]\frac{1}{k};\ \frac{1}{2k-1}\right[\quad \text{или} \quad \left]\frac{1}{2k+1};\ \frac{1}{k}\right[.$$

В них $x(t) \neq 0$, и, значит, $f(x(t)) = 1$. Таким образом, в любой проколотой δ-окрестности точки $t = 0$ функция $f(x(t))$ принимает как значение 1, так и значение 0. Следовательно, функция $f(x(t))$ не имеет предела при $t \to 0$. ■

Обсуждение. Последний пример показывает, что существование предела функции $f(x(t))$ в точке t_0 не следует из существования пределов $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. (Убедитесь, что в примере 5

$$\lim_{t\to 0} x(t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1.)$$

Объясняется это тем, что функция $x(t)$ может принимать значение a не только в одной «предельной» точке t_0, но и в последовательности точек t_n таких, что $t_n \neq t_0$ и $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t_0$, и, в то же время, предел функции $f(x)$ в точке $x = a$ хоть и существует, но отличен от значения функции $f(a)$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Функция f, обладающая тем свойством, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ называется **непрерывной в точке** a. В рассмотренном примере функция

$f(x)$ не является непрерывной (т.е. «разрывна») в точке $x = 0$. Если же функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и существует $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$, то

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t)) = f(\lim_{t\to t_0} x(t)) = f(a).$$

Элементарные функции, известные ещё из школы, такие как $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\ln x$ и др. непрерывны (это, конечно же, нужно ещё доказать, но сейчас пока примем «на веру»), и применение теоремы о пределе композиции для них помогает вычислять пределы. Например,

$$\lim_{x\to 4\pi} \ln\left(1+\sqrt{1+\sin^2\frac{x}{2}}\right) = \ln 2,$$

так как

$$\lim_{x\to 4\pi}\frac{x}{2} = 2\pi \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 4\pi}\sin\frac{x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 4\pi}\sin^2\frac{x}{2} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \lim_{x\to 4\pi}\left(1+\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 4\pi}\sqrt{1+\sin^2\frac{x}{2}} = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \lim_{x\to 4\pi}\left(1+\sqrt{1+\sin^2\frac{x}{2}}\right) = 2 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 4\pi}\ln\left(1+\sqrt{1+\sin^2\frac{x}{2}}\right) = \ln 2.$$

Непосредственное применение теорем о свойствах пределов для бесконечно больших и малых функций часто сразу не даёт возможности вычислять пределы, так как непосредственно эти теоремы применить нельзя. Это происходит в следующих случаях:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0;$ $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0;$ $\quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =?$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty;$ $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty;$ $\quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =?$

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty;$ $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty;$ $\quad \lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = (\infty-\infty) =?$

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0;$ $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty;$ $\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = (0\cdot\infty) =?$

5) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0;$ $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0;$ $\quad \lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \left(0^0\right) =?$

6) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty;$ $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0;$ $\quad \lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \left(\infty^0\right) =?$

7) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1;$ $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty;$ $\quad \lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = (1^\infty) =?$

Говорят, что в этих случаях имеет место неопределённость. Записанные выше неопределённости имеют символические обозначения: $\left(\frac{0}{0}\right)$; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; $(0{\cdot}\infty)$; $(\infty-\infty)$; (0^0); (∞^0); (1^∞). Для их вычисления преобразуют выражение, находящееся под знаком предела, так, чтобы избавиться от неопределенности или, как принято говорить, «раскрыть неопределённость». Для этого используют либо тождественные (в окрестности точки) преобразования, либо сравнение поведения функции при стремлении аргумента $x \to a$, либо замечательные пределы функций, либо всё перечисленное вместе. Укажем некоторые замечательные пределы функций, часто используемые для вычисления пределов:

а) *Первый* замечательный предел и его аналоги (помогают вычислить пределы, имеющие неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$):

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\quad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

б) *Второй* замечательный предел и его аналоги (позволяет «раскрывать» неопределённость вида (1^∞)):

$$5)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\quad 6)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1;\quad 7)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$8)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.\ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь определением предела, доказать следующие равенства:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-3}{x+2}=1;$ $\qquad\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{1-4x^2}=-\dfrac{1}{2};$

б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{6x^2+3x-1}{2x+1}=1;$ $\qquad\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x}{4x+x^2}=0;$

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=2;$ $\qquad\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-3}{1-x^2}=-1;$

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}=6;$ $\qquad\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{23x-4}{1+2x}=\dfrac{23}{2};$

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}=10;\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-1}{x^2+1}=2;$

е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}=7;\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x+2x^2}{x^2+x+1}=2;$

ж) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6;\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-3}{1-x}=-4.$

2. Вычислить пределы.

2.1.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^6-4x^3}{2x^3-7x^7}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-x)$; з) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^{x^2}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+4}}{\sqrt[3]{4-2x^2+27x^3}}$; л) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; м) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}}$.

2.2.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+7x-1}{4x^4-3x^3+7}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^{x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x(x+5)}-x$;

ж) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\arcsin\frac{x}{2}}{\ln(1+2x)}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^{x}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3-7x^2+6x-5}}{\sqrt{4x^2+3x+12}}$; л) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg}x}}$; м) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

2.3.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-9x+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{2-\sqrt{4-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-3x^3+7x^2-2}{x^4-27x^3+7}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-2}\right)^{x+2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-x})$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x-1}{4x^2+7x-2}\right)^{x}$; з) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-2x+3}}{\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{x^2-5}}$; л) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$; м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{4x\operatorname{arctg}4x}$.

2.4.

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{12x}}{x(x^2-5x+4)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 7x}{\ln(e-x)-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-2x^2+x-8}{2-3x^2+6x^3-x^5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{5+x^2}-2}{\sqrt{2+x^2}-4}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x^2+2x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2+4}{4x^2-x}\right)^x$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1})$; л) $\lim\limits_{x\to 0} \left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$; м) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

2.5.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x-1}+x}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\operatorname{tg}\pi(2+x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x^3+6}{x^3-2x^2+x-7}$; д) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+7}{x^2+1}\right)^{2x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{2^{3x}-1}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x+5}{2x+1}\right)^x$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})$; л) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$; м) $\lim\limits_{x\to 1} (2e^{x-1}-1)^{\frac{3x}{x-1}}$.

2.6.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{8x^3+5x}-12}{\sqrt{2x^3+1}+10x^2-7x}$; д) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-5x+4}{5x^3-2x^2+3}$; з) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9\ln(1-7x)}{4\operatorname{arctg} 3x}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{22x}{x+1}\right)^x$;

к) $\lim\limits_{x\to 2} (2e^{x-2}-1)^{\frac{3x+2}{x-2}}$; л) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{3+2x}\right)^x$; м) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2.7.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+3x-2}+x}{\sqrt{9x^2-x+3}+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-3x^4+7x-1}{3x^5+2x^2-2}$; д) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+4}{x^2+3}\right)^{x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{25x+1}{75x+3}\right)^x$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})$; л) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$; м) $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin 4x}}$.

3. Найдите односторонние пределы функций при $x\to a$.

3.1. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$; $a=0$;

3.2. $f(x)=\dfrac{4x-4}{\sqrt{\sin^2(x-1)}}$; $a=1$;

3.3. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0;\\ \ln(1+x), & x>0;\end{cases}$; $a=0$;

3.4. $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & x>0;\\ x^2+x, & x\leqslant 0;\end{cases}$; $a=0$;

3.5. $f(x)=\begin{cases}2x^2+x\sin x, & x\leqslant 0;\\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x>0;\end{cases}$; $a=0$;

3.6. $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0;\\ x-1, & x\geqslant 0;\end{cases}$; $a=0$;

3.7. $f(x)=\begin{cases}e^{x\sin\frac{3}{5x}}-1, & x\neq 0;\\ 1, & x=0;\end{cases}$; $a=0$.

4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ не существует, если:

4.1. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; $a=0$; **4.2.** $f(x)=\operatorname{sign}\,\sin\dfrac{1}{x}$; $a=0$;

4.3. $f(x)=\cos x$; $a=\infty$; **4.4.** $f(x)=x-E(x)$; $a=0$;

4.5. $f(x)=x\operatorname{sign}(x-1)$; $a=1$; **4.6.** $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$; $a=0$;

4.7. $f(x)=[x]$; $a=0$.

5. Пусть x_0 — некоторая фиксированная точка интервала $]\alpha;\,\beta[$. Пусть, далее, на интервале $]\alpha;\,\beta[$ определена функция $f:]\alpha;\,\beta[\mapsto\mathbb{R}$, причём известно, что:

а) существует $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, и

б) $f(x)\geqslant C$ в каждой точке $x\in]\alpha;\,\beta[$, отличной от x_0.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant C$.

6. Доказать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечный положительный предел, равный числу A, то существует такой интервал $]\alpha;\,\beta[$, содержащий точку x_0, что

$$f(x) > \frac{A}{2} \quad \text{при } x \in]\alpha; \beta[, \ x \neq x_0.$$

7. Доказать, что если на интервале $]\alpha; \beta[$, содержащем точку x_0, выполняются неравенства

$$g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x) \quad \text{при } x \neq x_0,$$

и функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ в точке x_0 имеют один и тот же предел A, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ (теорема о «зажатой» переменной).

8. Доказать, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$; в точке $x_0 > 0$.

9. Пользуясь неравенством $|\sin x| \leqslant |x|$, доказать непрерывность функции $y = \sin x$ в точке $x_0 = 0$; в точке $x_0 \neq 0$.

Глава 8

Общее определение предела числовой функции: предел по базе

При изучении различных теорий предела (последовательности, функции «в точке», функции «на бесконечности», функции в точке «слева-справа», функции в точке «по множеству») возникает естественное чувство неудовлетворённости, вызываемое следующими вопросами. Во-первых, все ли теории охвачены вниманием, нет ли такой теории предела функции, в которой нельзя точно назвать, куда и как «стремится» аргумент? Во-вторых, во всех теориях приходится доказывать одни и те же (по формулировкам) теоремы: единственность предела, «предел суммы равен сумме пределов» и т.д. Нельзя ли все теории соединить в одну? Оказывается, имеется общая теория предела, охватывающая все рассмотренные раннее и, более того, включающая в себя тот вид предела функции, который пока не рассматривался, но очень важен и будет изучаться позднее (см. упражнение 6 ниже).

Идея общего определения предела очень проста — попытаться «существующую» часть всех определений предела функции описать как существование множеств. Подробней, мы знаем, что множество можно задавать признаком, выделяющим его элементы. В определениях предела описательным образом указывается, что должно существовать в результате выбора произвольного $\varepsilon > 0$. Это описание можно (и будем!) трактовать как признак некоторого множества.

Рассмотрим сначала определение предела числовой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Оно гласит, что число a является таким пределом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Иными словами, для произвольно выбираемого $\varepsilon > 0$ определение требует выполнение неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех n, принадлежащих множеству вида

$$B_N := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N\}, \tag{8.1}$$

и, при этом, множество B_N обязательно должно существовать. Поэтому определение можно переформулировать так:

> *число a есть предел последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество B_N вида* (8.1) *такое, что для всех $n \in B_N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.*

Обратимся к определению предела функции f в точке a. Для простоты формулировок ограничимся простейшим вариантом, когда $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Число A называется таким пределом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Здесь требуется выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$ (с произвольным изначально выбранным $\varepsilon > 0$) для всех точек x, принадлежащих множеству

$$B_\delta := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}, \tag{8.2}$$

и при этом требуется, чтобы множество B_δ существовало при каждом изначально выбираемом $\varepsilon > 0$. Иначе говоря,

> *число A является пределом функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество B_δ вида* (8.2) *такое, что для всех $x \in B_\delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Если сравнить полученные переформулировки рассмотренных определений предела, то сразу обнаружится, что они отличаются только обозначениями функций (в первом случае функция натурального аргумента обозначена как x_n), их пределов (a и A) и множеств (B_N и B_δ), существование которых требуют определения. Другие определения предела (проанализируйте их самостоятельно) только подтверждают догадку: содержательная часть каждого определения предела состоит в том, что

> *для произвольного $\varepsilon > 0$ существует множество B специального типа такое, что при любом $x \in B$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Таким образом, для формулировки общего определения предела функции необходимо только уточнить, существование множеств B какого типа оно предполагает. При этом понятно, что определение подразумевает наличие не одного множества B, а некоторой их совокупности. Это связано с тем, что каждому $\varepsilon > 0$ нужно находить «своё» подходящее ему множество B, которое, в принципе не обязано подходить сразу многим ε. К тому же, если некоторому $\varepsilon > 0$ подходит некоторое множество B (подходит в том смысле, что при любом $x \in B$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$), то ему подходит и любое (непустое) подмножество множества B. Значит, совокупность всех множеств искомого типа может, в принципе, вместе с каждым множеством содержать хотя бы некоторые непустые его подмножества.

К необходимости введения некоторой *совокупности* подмножеств (каковыми являются B) множества $\mathbb{R}$ или, в общем случае, подмножеств множества X — области определения функции $f : X \mapsto \mathbb{R}$, мы приходим и по другим, теоретико-множественным соображениям: описывая признаком (или признаками) необходимые множества B, мы тем самым выделяем, задаём множество (лучше сказать — класс), элементами которого служат множества B. (Для благозвучности вместо словосочетаний «множество множеств», «множество подмножеств») принято употреблять «система множеств» (или подмножеств). Вместо слова «система» употребляются также: «совокупность», «класс», «набор».)

Итак, для (общего) определения предела функции $f : X \mapsto \mathbb{R}$ требуется задать на множестве X некоторую совокупность, обозначим её через $\mathfrak{B}$ (готическая «бэ»), подмножеств B множества X. Имея такую совокупность $\mathfrak{B}$, можно сказать, что

> число A называется пределом функции f, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $B \in \mathfrak{B}$ (т.е. существует подмножество B множества X, относящееся к выделенным системой $\mathfrak{B}$) *такое, что для любого* $x \in B$ *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Система $\mathfrak{B}$ является «решающей» в определении числа A как предела, именно она указывает, куда и как «стремится» аргумент функции f. Поэтому нет ничего удивительного в участии её при обозначении предела функции f:

$$A := \lim_{\mathfrak{B}} f.$$

(Другая система $\mathfrak{B}'$ на том же множестве X, вполне может оказаться, приведёт к другому числу A'.) В определении предела последовательности система $\mathfrak{B}$, обозначается как $n \to +\infty$ и состоит из множеств

$$B_N := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N\}, \quad N = 1, 2, \ldots;$$

в определении предела функции в точке a она обозначается как $x \to a$ и состоит из множеств

$$B_\delta := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}, \quad \delta > 0$$

(здесь мы имеем тот случай, когда элементы системы $\mathfrak{B} = (x \to a)$ удобно «нумеровать» произвольными, не обязательно целыми числами).

Задача составления (выбора) системы $\mathfrak{B}$ подмножеств множества X не вызывает каких-либо трудностей, и для каждой выбранной системы $\mathfrak{B}$ мы будем иметь «свой» предел для функции $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Однако, если мы хотим иметь теорию предела не экзотическую, а такую, в которой оставались бы справедливыми все факты о пределе, установленные раннее для числовых последовательностей и функций, то к составлению $\mathfrak{B}$ нужно отнестись внимательней.

Прежде всего заметим, что в систему $\mathfrak{B}$ не следует вносить пустое множество. В самом деле, если допустить, что $\varnothing \in \mathfrak{B}$, то независимо от функции f и числа A для любого $\varepsilon > 0$ будет существовать $B \in \mathfrak{B}$, $B = \varnothing$, такое, что при любом $x \in B$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (противное означало бы, что в пустом множестве нашёлся бы элемент x, для которого $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon$, в то время как $\varnothing$ не имеет элементов). Итак, система $\mathfrak{B}$ должна составляться только из непустых подмножеств множества X, т.е. должна подчиняться требованию:

$$\forall B \in \mathfrak{B} (B \neq \varnothing). \qquad (i)$$

Далее, нормальный, не экзотический предел должен однозначно выделять число, интерпретируемое как рассматриваемый предел. Другими словами, предел функции, если он существует, обязан быть единственным. Это означает, что если для некоторой функции $f : X \mapsto \mathbb{R}$ и чисел A, A' при любом $\varepsilon > 0$ найдутся множества $B \in \mathfrak{B}$, $B' \in \mathfrak{B}$ такие, что при $x \in B$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, а при $x' \in B'$ — неравенство $|f(x') - A'| < \varepsilon$, то числа A и A' должны совпадать. Однако равенство $A = A'$ может быть обеспечено только 2ε-близостью чисел $f(x)$ и $f(x')$ при $x \in B$ и $x' \in B'$ (если $A = A'$, то при любых $x \in B$ и $x' \in B'$ имеем неравенства:

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - A| + |f(x') - A'| < 2\varepsilon).$$

Поэтому, если допускать «непересекаемость» элементов системы $\mathfrak{B}$, в частности, допускать, что $B \cap B' = \varnothing$, то будет получаться, что значения функции f «нечувствительны» к тому, на какой части области определения они вычисляются, т.е. функции, имеющие такой предел, либо постоянны, либо незначительно от них отличаются.

В системах $\mathfrak{B} = (n \to \infty)$ и $\mathfrak{B} = (x \to a)$, составленных из множеств (8.1) и (8.2) соответственно, выполняется следующее свойство:

$$\forall B_1 \in \mathfrak{B} \, \forall B_2 \in \mathfrak{B} \, (B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}).$$

По причинам, смысл которых раскроется позже, несколько ослабленный вариант этого свойства и принимается в качестве второго требования, предъявляемого к системе $\mathfrak{B}$. А именно, требуется, чтобы каждые два элемента системы $\mathfrak{B}$ содержали в качестве подмножества некоторый элемент этой системы, т.е., символически,

$$\forall B_1 \in \mathfrak{B}\, \forall B_2 \in \mathfrak{B}\, \exists B_3 \in \mathfrak{B} (B_3 \subset B_1 \cap B_2). \tag{ii}$$

Система $\mathfrak{B}$ подмножеств множества X, обладающая свойствами (i) и (ii), называется **базой** на множестве X (её называют также **предфильтром** или **базисом фильтра**, но так как мы не будем сейчас изучать понятие фильтра (см. ниже обсуждение после упражнения 4), то ограничимся простым названием — база). Если $f : X \mapsto \mathbb{R}$ — заданная функция и $\mathfrak{B}$ — фиксированная база на X, то предел $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f$, при условии, что он существует, называется **пределом функции f по базе $\mathfrak{B}$**.

Все теоремы, доказанные раннее для пределов числовой последовательности и пределов функции в точке, могут быть сформулированы и доказаны для пределов функции по базе. При этом почти все они передоказываются очень просто, а исключение составляет лишь одна теорема — критерий Коши существования предела функции по базе (ей отдельно отводятся упражнения 15-16 ниже). Рекомендуем попытаться передоказать все теоремы самостоятельно. В качестве примера докажем теорему о пределе зажатой переменной.

> **Теорема о пределе зажатой переменной.** *Пусть на некотором множестве X фиксирована база $\mathfrak{B}$ и заданы три функции f, g и $h : X \mapsto \mathbb{R}$, причём такие, что в каждой точке x, принадлежащей некоторому фиксированному элементу B базы $\mathfrak{B}$, выполняются неравенства $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Если существуют и равны пределы функций f и h по базе $\mathfrak{B}$, то предел функции g по базе $\mathfrak{B}$ также существует и равен пределам функции f и h по этой базе.*

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{\mathfrak{B}} f = \lim\limits_{\mathfrak{B}} h$, и пусть ε — произвольное положительное число. Так как A есть предел по базе $\mathfrak{B}$ функции f, то существует $B_1 \in \mathfrak{B}$ такой, что при каждом $x \in B_1$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

В частности, при каждом $x \in B_1$ выполняется неравенство

$$A - \varepsilon < f(x). \tag{8.3}$$

Поскольку $A = \lim\limits_{\mathfrak{B}} h$, то существует $B_2 \in \mathfrak{B}$ такой, что при каждом $x \in B_2$ выполняется неравенство
$$h(x) < A + \varepsilon. \tag{8.4}$$
В силу свойства (ii) базы $\mathfrak{B}$ существует такой её элемент B_3, что $B_3 \subset B \cap B_1 \cap B_2$. В каждой точке $x \in B_3$ выполняются оба неравенства, (8.3) и (8.4), и, кроме того, выполняются неравенства $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Следовательно, в каждой точке $x \in B_3$ выполняются неравенства
$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |g(x) - A| < \varepsilon.$$
Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент B_3 базы $\mathfrak{B}$, что при каждом $x \in B_3$ выполняется неравенство $|g(x) - A| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{\mathfrak{B}} g = A$. ■

Контрольные вопросы и упражнения

1. Пусть X — множество всех легковых автомобилей нашего города и выделены следующие его подмножества: A_1 — множество автомобилей красного цвета, A_2 — множество автомобилей белого цвета, A_3 — множество автомобилей жёлтого цвета, B_1 — множество автомобилей марки «Волга», B_2 — множество автомобилей, произведённых германскими фирмами, B_3 — множество автомобилей японского производства, B_4 — множество автомобилей, используемых в качестве такси.

а) Как называется по отношению к X множество
$$\mathfrak{B} = \{A_1;\ A_2;\ A_3;\ B_1;\ B_2;\ B_3;\ B_4\}?$$

б) Перечислите элементы системы $\mathfrak{B}$. Является ли его элементом множество автомобилей, находящихся в ремонте?

в) Какие из записей верны, а какие нет: $A_1 \subset X$, $A_1 \in \mathfrak{B}$, $A_1 \cap A_2 \subset X$, $A_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$, $X \in \mathfrak{B}$, $B_4 \cup B_1 \in \mathfrak{B}$, $B_4 \cup B_1 \subset X$, $B_3 \in X$.

г) Пусть x — некоторый конкретный автомобиль — такси жёлтого цвета марки «Волга». Какие из следующих высказываний являются истинными, а какие — ложными: $x \in X$, $x \in \mathfrak{B}$, $\{x\} \in \mathfrak{B}$, $\{x\} \in A_3$, $x \in A_3$, $x \in A_3 \cap B_1 \cap B_4$, $\{x\} \subset A_1 \cup B_4$.

д) Известно, что ни одно из множеств, включенных в указанную в а) систему $\mathfrak{B}$, не является пустым. Является ли система $\mathfrak{B}$ базой на X?

2. Выяснить, какие из перечисленных ниже систем подмножеств множества действительных чисел являются базами на $\mathbb{R}$.

а) $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbb{R}\}$.

б) $\mathfrak{B}_2 = \{\{1\};\ \{1;\ 2\};\ \{1;\ 2;\ 3\};\ \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}\}$.

в) $\mathfrak{B}_3 = \{\{1;\ 2\};\ \{1;\ 2;\ 3\};\ \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}\}$.

г) $\mathfrak{B}_4 = \{\{1;\ 2\};\ \{1;\ 3\};\ \{2;\ 3\};\ \{1;\ 2;\ 3\}\}$.

д) $\mathfrak{B}_5 = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $B_n = \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}$ и $k \geqslant n\}$.

е) $\mathfrak{B}_6 = \{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $C_n = \{\frac{1}{k+3} \mid k \in \mathbb{N}$ и $k \geqslant n\}$.

ж) $\mathfrak{B}_7 = \{B_\alpha \mid \alpha > 0\}$, где $B_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1 + \alpha\}$.

з) $\mathfrak{B}_8 = \{C_\beta \mid \beta > 0\}$, где $C_\beta = \{x \in \mathbb{R} \mid \beta < |x| < 2\beta\}$.

и) $\mathfrak{B}_9 = \{D_\gamma \mid \gamma > 0\}$, где $D_\gamma = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x| < \gamma\}$.

к) $\mathfrak{B}_{10} = \{A_\rho \mid \rho > 0\}$, где $A_\rho = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x| < 1 + \rho\}$.

3. Пусть $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — функция, заданная правилом $f(x) = x$.

а) Сформулируйте и конкретизируйте определение предела функции по базе для заданной функции f, считая, что база есть система $\mathfrak{B}_1$, указанная в задаче 2 а).

б) Докажите, что предел заданной функции f по базе $\mathfrak{B}_1$ не существует.

в) Пусть $\mathfrak{B}$ есть база $\mathfrak{B}_2$ из упражнения 2. Доказать, что $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f = 1$.

г) Существует ли $\lim\limits_{\mathfrak{B}_3} f$, где $\mathfrak{B}_3$ — база, указанная в упражнении 2?

д) Установить, существуют ли пределы заданной функции по базам $\mathfrak{B}_5$, $\mathfrak{B}_6$, $\mathfrak{B}_7$, $\mathfrak{B}_9$ и $\mathfrak{B}_{10}$, описанным в упражнении 2. Чему равны те из них, которые существуют?

4. Пусть $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — некоторая фиксированная функция и $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_5$, $\mathfrak{B}_6$, $\mathfrak{B}_9$ и $\mathfrak{B}_{10}$ - базы на $\mathbb{R}$, описанные в упражнении 2. Докажите следующие утверждения.

а) Если f принимает хотя бы два различных значения, то $\lim\limits_{\mathfrak{B}_1} f$ не существует.

б) Если функция f — постоянная, то $\lim\limits_{\mathfrak{B}_1} f$ существует.

в) Если существует $\lim\limits_{\mathfrak{B}_3} f$, то существует и $\lim\limits_{\mathfrak{B}_2} f$, причём $\lim\limits_{\mathfrak{B}_2} f = \lim\limits_{\mathfrak{B}_3} f$.

г) Предел $\lim\limits_{\mathfrak{B}_3} f$ существует тогда и только тогда, когда функция f принимает в точках 1 и 2 равные значения (т.е. $f(1) = f(2)$). Выведите отсюда, что из существования $\lim\limits_{\mathfrak{B}_2} f$ не следует, вообще говоря, существование $\lim\limits_{\mathfrak{B}_3} f$.

д) Предел $\lim\limits_{\mathfrak{B}_5} f$ существует в том и только том случае, если существует $\lim\limits_{\mathfrak{B}_6} f$, причём, в случае существования, эти пределы равны.

е) Из существования предела функции f по базе $\mathfrak{B}_{10}$ следует существование предела этой функции по базе $\mathfrak{B}_9$, а обратное — неверно. Укажите необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять функция f с тем, чтобы $\lim\limits_{\mathfrak{B}_{10}} f$ существовал.

Обсуждение. Уже рассмотренные упражнения показывают, что существование предела функции по базе зависит от выбора базы. При неудачном её выборе предел может не существовать даже у такой функции, как тождественная, $f(x) = x$. Самой «неудачной» среди рассмотренных баз оказалась $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbb{R}\}$: при такой базе предел имеют только постоянные на $\mathbb{R}$ функции. В анализе вместо терминов «удачная-неудачная» в отношении баз используются другие — «грубая», «тонкая». А именно, пусть на множестве заданы две базы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D}$.

Говорят, что база $\mathfrak{B}$ **грубее** базы $\mathfrak{D}$, а база $\mathfrak{D}$ **тоньше** базы $\mathfrak{B}$, если для каждого элемента B базы $\mathfrak{B}$ существует элемент D базы $\mathfrak{D}$ такой, что $D \subset B$. Если базы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D}$ таковы, что $\mathfrak{D}$ тоньше $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ тоньше $\mathfrak{D}$, то базы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D}$ называются **эквивалентными**.

В примерах баз, приведённых в упражнении 2, $\mathfrak{B}_1$ грубее каждой другой, база $\mathfrak{B}_3$ грубее базы $\mathfrak{B}_2$, база $\mathfrak{B}_{10}$ — базы $\mathfrak{B}_9$. Базы $\mathfrak{B}_5$ и $\mathfrak{B}_6$ — эквивалентны. Первый опыт обращения с этими базами позволяет высказать гипотезу: из существования предела функции по грубой базе следует существование предела по тонкой. Утверждение оказывается верным (см. упражнение 9 ниже), и из него, в частности, следует, что пределы функции по эквивалентным базам существуют или не существуют одновременно. Это, в свою очередь означает, что существование предела функции характеризует не конкретную базу, а целый класс эквивалентных между собой баз. Класс всех эквивалентных между собой баз на множестве X называется **фильтром** на этом множестве. (По этой причине эквивалентные, но разные базы часто обозначаются одной символической записью — по существу это обозначение фильтра; см. упражнение 5.) ■

5. Убедиться, что каждая из перечисленных в задаче система подмножеств множества действительных чисел является базой на $X \subset \mathbb{R}$.

а) $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{B} = \{B_N \mid N \in \mathbb{N}\}$, $B_N = \{3n \mid n \geqslant N \text{ и } n \in \mathbb{N}\} = \{3N;\, 3N + 3;\, 3N + 6;\, \ldots\}$.

б) $X = \mathbb{R}$, $\overline{\mathfrak{B}} = \{\overline{B}_\delta \mid \delta > 0\}$, $\overline{B}_\delta = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| \leqslant \delta\}$. (База $\overline{\mathfrak{B}}$ обозначается $x \to a$, как и база состоящая из множеств (8.2).)

в) $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка для множества X,

$$\mathfrak{B} = \{\mathring{U}_{X,\delta}(a) \mid \delta > 0\}, \quad \mathring{U}_{X,\delta}(a) = \{x \in X \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

(База $\mathfrak{B}$ обозначается $X \ni x \to a$.)

г) X — неограниченное числовое множество,

$$\mathfrak{B} = \{B_\delta \mid \delta > 0\}, \quad B_\delta = \{x \in X \mid |x| > \delta\}.$$

(База $\mathfrak{B}$ обозначается $X \ni x \to \infty$.)

д) $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка для множества X,

$$\mathfrak{B} = \{U_{X,\delta}(a) \mid \delta > 0\}, \quad U_{X,\delta}(a) = \{x \in X \mid |x - a| < \delta\}.$$

е) $X \subset \mathbb{R}$ и X — неограничено сверху,

$$\mathfrak{B} = \{B_\delta \mid \delta > 0\}, \quad B_\delta = \{x \in X \mid x > \delta\}.$$

(База обозначается $X \ni x \to +\infty$; при $X = \mathbb{N}$ её обозначают $n \to \infty$, как и базу, образованную множествами (8.1).)

6. Пусть $[a;\, b]$, $a < b$, — некоторый фиксированный числовой отрезок. Каждая упорядоченная совокупность

$$(P;\, \xi) := (x_0 = a,\, x_1,\, \ldots,\, x_{n-1},\, x_n; \xi_1,\, \ldots,\, \xi_n) \tag{8.5}$$

точек отрезка $[a;\, b]$ таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b; \quad x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1,\, \ldots,\, x_{n-1} \leqslant \xi_n \leqslant x_n,$$

называется **разбиением с отмеченными точками** (для отрезка $[a;\,b]$. Название объясняется тем, что точки $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ разбивают $[a;\,b]$ на n частичных отрезков $[x_{i-1};\,x_i]$, $i=\overline{1,\,n}$, а точки $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ есть некоторые выделенные, «отмеченные» точки из этих частичных отрезков. Число n, указывающее количество частичных отрезков и отмеченных на них точек, не фиксируется и зависит от выбора разбиения.) Обозначим через X множество всех разбиений с отмеченными точками (для отрезка $[a;\,b]$). На X выделим систему $\mathfrak{B}$ его подмножеств B_δ следующим образом. Назовём **параметром** разбиения с отмеченными точками (8.5) число

$$\lambda(P) := \max\{x_1-x_0;\ x_2-x_1;\ \ldots,\ x_n-x_{n-1}\}$$

(это наибольшее среди длин частичных отрезков $[x_{i-1};\,x_i]$, $i=\overline{1,\,n}$, исходного отрезка $[a;\,b]$). Для каждого $\delta>0$ обозначим через B_δ множество всех разбиений с отмеченными точками, параметры которых меньше δ, т.е.

$$B_\delta = \{(P;\,\xi) \mid \lambda(P)<\delta\}.$$

Доказать, что $\mathfrak{B}=\{B_\delta \mid \delta>0\}$ является базой на X.

7. Пусть на невырожденном отрезке $[a;\,b]\subset\mathbb{R}$ $(a<b)$ определена некоторая функция $f:[a;\,b]\mapsto\mathbb{R}$. Построим с помощью $[a;\,b]$ множество X, описанное в предыдущем упражнении, и пусть $\mathfrak{B}=\{B_\delta \mid \delta>0\}$ — база на X, также описанная в этом упражнении. На множестве X определим функцию $\sigma : X\mapsto\mathbb{R}$, задаваемую равенством

$$\sigma(P;\,\xi) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1});$$

здесь $(P;\,\xi)\in X$ обозначает набор (8.5). Предел функции σ по базе $\mathfrak{B}$, если он существует, называется **интегралом от функции** f **по отрезку** $[a;\,b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

а) Переформулируйте определение интеграла от функции f по отрезку $[a;\,b]$ таким образом, чтобы в нём явным образом не участвовали термины «база» и «элемент базы».

Ответ. Число $I\in\mathbb{R}$ называется интегралом от функции f по отрезку $[a;\,b]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для каждого разбиения с отмеченными точками $(P;\,\xi)$, параметр которого меньше δ, выполняется неравенство

$$|I-f(\xi_1)(x_1-x_0)-f(\xi_2)(x_2-x_1)-\cdots-f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})|<\varepsilon.\ \blacksquare$$

б) Докажите, что если функция $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ — постоянная, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует. Чему равен $\int\limits_a^b 1\,dx$?

в) Какие общие теоремы, относящиеся к пределу функции по базе, Вы могли бы уже сейчас распространить на $\int\limits_a^b f(x)\,dx$?

г) Докажите, что если функция $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ — неограниченная, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не существует.

Указание. Предположим противное. Тогда функция σ финально ограничена по базе $\mathfrak{B}$ и, значит, существуют числа $M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для любого разбиения с отмеченными точками (8.5), имеющего параметр меньше δ, выполняется неравенство

$$|f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})| \leqslant M.$$

Зафиксировав точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ и пользуясь неограниченностью f на одном из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$, покажите, что точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ можно выбрать так, что будет выполняться неравенство

$$|f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})| > M + 1. \blacksquare$$

8. Пусть $\mathfrak{B}$ — база на некотором множестве X и $B_0 \in \mathfrak{B}$ — некоторый её фиксированный элемент. Докажите, что система

$$\mathfrak{B}_0 = \{B \in \mathfrak{B} \mid B \subset B_0\}$$

также является базой на X. Что можно сказать об эквивалентности этих баз?

9. Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D}$ — две базы на X, причём база $\mathfrak{B}$ грубее базы $\mathfrak{D}$. Пусть, далее, $f : X \mapsto \mathbb{R}$ — некоторая функция такая, что существует $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f = A$. Доказать, что существует $\lim\limits_{\mathfrak{D}} f$ и $\lim\limits_{\mathfrak{D}} f = A$.

10. Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D}$ — две эквивалентные базы, заданные на множестве X.

а) Докажите, что для любых элементов $B \in \mathfrak{B}$ и $D \in \mathfrak{D}$ существуют элементы $B_1 \in \mathfrak{B}$ и $D_1 \in \mathfrak{D}$ такие, что $B_1 \subset B \cap D$ и $D_1 \subset B \cap D$.

б) Пусть $f : X \mapsto \mathbb{R}$ — некоторая функция. Доказать, что $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f$ существует в том и только том случае, если существует $\lim\limits_{\mathfrak{D}} f$, и что, в случае существования, $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f = \lim\limits_{\mathfrak{D}} f$.

11. Пусть X — некоторое числовое множество ($X \subset \mathbb{R}$) и $x_0 \in \mathbb{R}$ — некоторая фиксированная точка такая, что $x_0 \in X$ или x_0 — предельная точка для X. Докажите, что следующие три базы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D}$ на X эквивалентны:

$$\mathfrak{A} = \{A_{\alpha,\beta} \mid \alpha < x_0,\ \beta > x_0\}, \quad A_{\alpha,\beta} = X \cap [\alpha;\, \beta];$$

$$\mathfrak{B} = \{B_\delta \mid \delta > 0\}, \quad B_\delta = X \cap [x_0 - \delta;\, x_0 + \delta];$$

$$\mathfrak{D} = \{D_{\gamma,\delta} \mid \gamma > 0,\ \delta > 0\}, \quad D_{\gamma,\delta} = X \cap [x_0 - \gamma;\, x_0 + \delta].$$

12. Пусть $f : X \mapsto \mathbb{R}$ — некоторая функция и $E \subset X$. **Колебанием** функции f на множестве E называется (число или символ $+\infty$)

$$\omega(f;\, E) := \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| \ \mid\ x_1,\, x_2 \in E\}.$$

(Напомним, если числовое множество A неограничено сверху, то по определению считается, что $\sup A$ есть символ $+\infty$.)

а) Найдите $\omega(f;\, E)$, если:

$f(x) = x;\qquad E = [-1;\, 1];$

$f(x) = \dfrac{1}{x};\qquad E = [1;\, 2];\ E =]0;\, 1];$

$f(x) = \operatorname{sign} x;\quad E = [1;\, 2];\ E =]0;\, 2];\ E = [-2;\, 2].$

б) Докажите, что если функция f — ограниченная, то

$$\omega(f;\, E) = \sup f(E) - \inf f(E),$$

где $f(E) := \{f(x) \mid x \in E\}$.

13. Пусть $\mathfrak{B}$ — база на множестве X и функция $f : X \mapsto \mathbb{R}$ финально ограничена при этой базе (т.е. f ограничена на некотором элементе базы $\mathfrak{B}$ или, подробней, существуют $B_0 \in \mathfrak{B}$ и число $C > 0$ такие, что при каждом $x \in B_0$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant C$). Зафиксируем тот элемент базы, $B_0 \in \mathfrak{B}$, на котором f ограничена. Для каждого $B \subset B_0$ такого, что , условимся обозначать через $f(B)$ множество

$$f(B) := \{f(x) \mid x \in B\}$$

а) Докажите, при каждом $B \in \mathfrak{B}$, $B \subset B_0$, множество $f(B)$ является ограниченным.

б) Обозначим через $\alpha(B)$ и через $\beta(B)$ соответственно $\inf f(B)$ и $\sup f(B)$, т.е. точную нижнюю и точную верхнюю грани множества $f(B)$. Докажите, что для любых элементов B_1, B_2 базы $\mathfrak{B}$ таких, что $B_1 \subset B_0$ и $B_2 \subset B_0$, выполняется неравенство $\alpha(B_1) \leqslant \beta(B_2)$.

Указание. Если $B_3 \in \mathfrak{B}$ — такой элемент базы $\mathfrak{B}$, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, то $f(B_3) \subset f(B_1)$ и $f(B_3) \subset f(B_2)$. Поэтому

$$\alpha(B_1) \leqslant \alpha(B_3) \leqslant \beta(B_3) \leqslant \beta(B_2). \blacksquare$$

в) Пусть

$$\alpha := \sup\{\alpha(B_1) \mid B_1 \in \mathfrak{B} \text{ и } B_1 \subset B_0\}$$

и

$$\beta := \inf\{\beta(B_2) \mid B_2 \in \mathfrak{B} \text{ и } B_2 \subset B_0\}.$$

Докажите, что числа α и β не зависят от выбора исходного элемента $B_0 \in \mathfrak{B}$.

Обсуждение. Числа α и β, определённые в последнем упражнении, называются, соответственно, **нижним** и **верхним** пределами функции f по базе $\mathfrak{B}$. Для них используются специальные обозначения $\underline{\lim}_{\mathfrak{B}} f$ и $\overline{\lim}_{\mathfrak{B}} f$, соответственно. Таким образом, как показывает упражнение 13, каждая финально ограниченная по базе $\mathfrak{B}$ функция $f : X \mapsto \mathbb{R}$ имеет нижний и верхний пределы по этой базе и, при этом,

$$\underline{\lim}_{\mathfrak{B}} f \leqslant \overline{\lim}_{\mathfrak{B}} f.$$

(Объясните, почему выполняется это неравенство.) Как известно, финальная ограниченность f при базе $\mathfrak{B}$ есть необходимое условие существования предела этой функции по базе $\mathfrak{B}$ (это утверждение относится к числу простейших свойств $\lim_{\mathfrak{B}} f$, и его нужно доказать самостоятельно), и поэтому можно высказать предположение, что финальная ограниченность f при базе $\mathfrak{B}$ и равенство $\underline{\lim}_{\mathfrak{B}} f = \overline{\lim}_{\mathfrak{B}} f$ необходимы и достаточны для существования $\lim_{\mathfrak{B}} f$. Последующие упражнения позволят Вам убедиться в справедливости такого предположения и получить на этом пути ещё одно доказательство «достаточности» в критерии Коши существования предела функции по базе. $\blacksquare$

14. Пусть $\mathfrak{B} = (x \to 0)$ — база на $\mathbb{R}$, состоящая из всех проколотых δ-окрестностей числа 0.

а) Найти нижний и верхний пределы по базе $x \to 0$ функции $f(x) = \operatorname{sign} x$.

б) Найти $\varliminf\limits_{x\to 0} |x-1| \operatorname{sign} x$ и $\varlimsup\limits_{x\to 0} |x-1| \operatorname{sign} x$.

15. Пусть $\mathfrak{B}$ — база на множестве X, и пусть для функции $f : X \mapsto \mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f$.

а) Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент базы $B \in \mathfrak{B}$ такой, что $\omega(f;\, B) < \varepsilon$. (Напомним, $\omega(f;\, B)$ есть колебание f на множестве B.)

Указание. Если для каждого $x \in B$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$, то, в силу очевидного неравенства

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A|,$$

для любых x_1, $x_2 \in B$ будет выполняться неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{2\varepsilon}{3}. \ \blacksquare$$

б) Докажите, что $\varliminf\limits_{\mathfrak{B}} f = \varlimsup\limits_{\mathfrak{B}} f$.

Указание. Пусть, для упрощения записей, $\alpha = \varliminf\limits_{\mathfrak{B}} f$ и $\beta = \varlimsup\limits_{\mathfrak{B}} f$. Тогда, как следует из упражнения 13, $\alpha \leqslant \beta$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть $B \in \mathfrak{B}$ — тот элемент базы, существующий в силу утверждения а) настоящего упражнения, для которого $\omega(f;\, B) < \varepsilon$. Тогда, согласно утверждению упражнения 12 б) и обозначениям упражнения 13, $\beta(B) - \alpha(B) < \varepsilon$. Так как $\beta \leqslant \beta(B)$ и $\alpha \geqslant \alpha(B)$, то отсюда следует, что $\beta - \alpha < \varepsilon$. Остаётся воспользоваться произвольностью $\varepsilon > 0$. $\blacksquare$

16. Пусть $\mathfrak{B}$ — база на множестве X, и пусть для функции $f : X \mapsto \mathbb{R}$ выполняется следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент базы $B \in \mathfrak{B}$ такой, что $\omega(f;\, B) < \varepsilon$.

а) Докажите, что функция f финально ограничена при базе $\mathfrak{B}$.

Обсуждение. Финальная ограниченность f при базе $\mathfrak{B}$ влечёт существование нижнего и верхнего пределов f по базе $\mathfrak{B}$ и, как показывают рассуждения указания к упражнению 15 б), из предположения относительно f, сделанного в настоящем упражнении, следует, что

$$\varliminf\limits_{\mathfrak{B}} f = \varlimsup\limits_{\mathfrak{B}} f. \ \blacksquare$$

б) Обозначим через A число $\underline{\lim}_{\mathfrak{B}} f = \overline{\lim}_{\mathfrak{B}} f$. Докажите, что число A есть предел функции f по базе $\mathfrak{B}$.

Указание. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительно число. Так как

$$A = \underline{\lim}_{\mathfrak{B}} f = \sup\{\alpha(B) \mid B \in \mathfrak{B},\, B \subset B_0\},$$

где B_0 — тот элемент базы $\mathfrak{B}$, на котором ограничена функция f, то существует $B_1 \in \mathfrak{B}$ такой, что $A - \alpha(B_1) < \varepsilon$. Аналогично, существует $B_2 \in \mathfrak{B}$ такой, что $\beta(B_2) - A < \varepsilon$. Пусть $B_3 \in \mathfrak{B}$ такой элемент базы $\mathfrak{B}$, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Тогда $\alpha(B_1) \leqslant \alpha(B_3)$, $\beta(B_3) \leqslant \beta(B_2)$, а потому при любом $x \in B_3$ будем иметь:

$$-\varepsilon < \alpha(B_1) - A \leqslant \alpha(B_3) - A \leqslant f(x) - A \leqslant \beta(B_3) - A \leqslant \beta(B_2) - A < \varepsilon,$$

т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$. ■

в) Докажите, что существует последовательность $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ элементов базы $B_n \in \mathfrak{B}$ $(n \in \mathbb{N})$ такая, что $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ и при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\omega(f;\, B_n) < \frac{1}{n}$.

г) Пусть $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов базы $\mathfrak{B}$, обладающая свойствами, перечисленными в пункте в). Выберем в каждом множестве B_n точку, пусть $x_n \in B_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Докажите, что числовая последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что при каждом $n \geqslant N$ и при любом $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$.

Указание. $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| \leqslant \omega(f;\, B_n)$. ■

д) Обозначим через A предел числовой последовательности $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ из пункта г). Доказать, что $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f = A$.

Указание.

$$|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| \leqslant \omega(f;\, B_n) + |f(x_n) - A|,$$

если считать, что $x \in B_n$. ■

Обсуждение. В упражнении 16 приведено два доказательства «достаточности» в критерии Коши существования предела функции по базе. Первое из них (пп. а) и б)) опирается на понятия верхнего и нижнего пределов, а второе (пп. в) – д)) — на критерий Коши существования предела числовых последовательностей. ■

Литература

[1] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — 9-е изд. — М.: Наука, 1977.

[2] Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Учебное пособие в 6-ти частях. Ч. 1: Введение в анализ и дифференциальное исчисление. — Мн.: БГУ, 2003.

[3] Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1 — М.: Наука, 1981.

[4] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1 — 4-е изд. перераб. и доп. — М.: Наука, 1982.

[5] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. — М.: Наука, 1979.

[6] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. / Под ред. Кудрявцева Л.Д. — М.: Наука, 1984.

[7] Лабораторный практикум по математическому анализу. / Бруй И.Н., Гаврилюк А.В., Ермаков В.Г. и др. — Мн.: Выш. шк., 1991.

[8] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988.

[9] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1969.

[10] Хавин В.П. Основы математического анализа. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной вещественной переменной. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1989.

Оглавление