

I. Ответьте на вопросы (за все задание 18 баллов, за каждое по 2 балла)

1. Комплексное число $z = 1 + i$. Тогда $\operatorname{arg} z$ _____ /
2. Комплексное число $z = \sqrt{3} + i$. Тогда $|z|$ _____ /
3. В алгебраической форме комплексное число $\frac{2+i}{1-2i}$ имеет вид _____ /
4. В показательной форме комплексное число $(-i)^4$ представимо в виде _____ /
5. Аргумент комплексного числа $(-1 + i\sqrt{3})^4$ равен _____ /
6. Модуль комплексного числа $(-\sqrt{3} - i)^5$ равен _____ /
7. Значение корня $w_k = \sqrt[4]{1+i}$, $k = 0, 1, 2, 3$, $0 < \operatorname{arg} w_k < \frac{\pi}{2}$ равно _____ /
8. Расстояние между точками $z_1 = 3 - i$ и $z_2 = 1 - 3i$ равно _____ /
9. Решением уравнения $|z| - 2z = 1 - 2i$ является _____ /

II. Решите следующие задачи (за все задание 18 баллов, за каждое по 3 балла)

1. Функция $f(z) = \frac{2i}{z-i}$, тогда $\operatorname{Im} f(z)$ равна _____ /
2. Если $z = x + iy$, то $\operatorname{Arg} e^{iz}$ равен _____ /
3. Значениями $\operatorname{Ln}(-i)$ являются _____ /
4. Значениями $(-i)^i$ являются _____ /
5. Все значения $\operatorname{Arcth}(-i)$ образуют множество _____ /
6. Решением уравнения $e^z + i = 0$ является множество _____ /

III. Выберите правильный вариант ответа (за все задание 12 баллов, за каждое по 3 балла)

1. Какая функция является аналитической в C ?: _____ /
 (A) $z\bar{z}$ (B) $z + i|z|$ (C) $z^2 + iz$ (D) $\operatorname{Re} z + 2\operatorname{Im} z$
2. Какая функция является гармонической в C ?: _____ /
 (A) $2x^2 + y^2$ (B) $x^2 + iy^2$ (C) $x^2 + xy$ (D) $\frac{y}{x^2 + y^2}$
3. Значение $\sin(iz)$ равно: _____ /
 (A) $ch z$ (B) $ish z$ (C) $i \sin z$ (D) $i \cos z$

4. Функция $f = u + iv$, $f(0) = 0$ является аналитической в C , $u = 2xy$. Тогда f : _____ /
- (A) z^2 (B) z^3 (C) $2z^2$ (D) $-iz^2$

IV. Решить задачи (за все задание 20 баллов, за каждое по 5 баллов)

1. С помощью формулы Коши $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$ вычислить интеграл $\int_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2 + \pi)}$

3. Функцию $\frac{1}{z+3}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности $z_0 = -1$

4. Функцию $\frac{1}{z(z-1)}$ разложить в ряд Лорана в кольце $K = \{z: 0 < |z-1| < 1\}$

5. Вычислить $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^2(z+1)}$

V. Решить задачи (за все задание 24 баллов, за каждое по 6 баллов)

С помощью теории вычетов вычислить интегралы:

а) $\int_{|z|=2} \frac{(z-1)dz}{(z+1)\sin z}$, б) $\int_{|z|=1} z e^{\frac{1}{2z}} dz$, в) $\int_0^{2\pi} \frac{dz}{3 + \sin x}$ г) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$

а)

б)

в)

г)

V. Решить задачи (за все задание 8 баллов, за каждое по 4 баллов)

1. С помощью вычетов разложить на простые дроби $\frac{z+3}{z^3+z}$

2. С помощью теоремы Руше определить число корней уравнения

$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ в круге $|z| < 1$.