ГЛАВА II. Интеграл Лебега.

А. Основные понятия и теоремы

1. Измеримые функции

Пусть μ — σ-аддитивная мера, определенная на σ-алгебре Σ подмножеств множества *X*. Мы будем предполагать, что мера μ является полной. В дальнейшем элементы σ-алгебры Σ будем называть измеримыми множествами. Все рассматриваемые ниже множества будем считать измеримыми, а также предполагаем измеримость на соответствующих множествах всех рассматриваемых функций.

Определение 1. Функция $F : E \to \mathbf{R}$ называется **измеримой** на множестве *E*, если для любого $c \in \boldsymbol{R}$ множество $A_c = \{x \in E \mid f(x) < c\}$ измеримо .

Определение 2. Функция $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ называется **борелевской**, если прообраз $g^{-1}(B)$ каждого борелевского множества *B* является борелевским множеством.

Выделим следующие свойства измеримых функций:

1. Характеристическая функция множества *A* является измеримой тогда и только тогда, когда измеримо множество *A*;
2. Если функция f измерима на *E*, а функция *g* — борелевская, то композиция $g \circ f$ является измеримой на *E* функцией;
3. Сумма, разность, произведение двух измеримых функций измеримы. Частное двух измеримых функций при условии, что знаменатель не обращается в нуль, тоже измеримо;
4. Если последовательность измеримых на *E* функций $f_n(x)$ сходится точечно на *E* к функции $f(x)$, то и предельная функция f является измеримой на *E*.

Свойство 4 — замкнутость множества измеримых функций относительно операции предельного перехода — является одним из важнейших свойств этого класса.

Наряду с точечной и равномерной сходимостью функций в теории интеграла Лебега важную роль играют и другие виды сходимости.

<u>Определение</u> 3.(Равномерная сходимость) Последовательность функций $f_n(x)$ сходится равномерно на E к функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) > 0 \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall x \in E \; | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

или, что равносильно — $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} | f_n(x) - f(x) | = 0$.

<u>Определение</u> 4.(Точечная сходимость) Последовательность функций $f_n(x)$ сходится точечно на E к функции $f(x)$, если

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) > 0 \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

или, что равносильно — $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ при каждом фиксированном $x \in E$.

Пусть $p(x)$ — свойство, которым могут обладать, а могут и не обладать точки множества X. Говорят, что $p(x)$ выполняется почти всюду на измеримом множестве E, если мера множества тех x из E, где это свойство не выполнено, равно нулю.

<u>Определение</u> 5. (Сходимость почти всюду) Последовательность функций $f_n(x)$ **сходится почти всюду на** E к функции f (записывается — $f_n \to f$ п.в. на E), если $\mu(\{x \in E \mid f_n(x)$ не сходится к $f(x)\}) = 0$.

<u>Определение</u> 6. Говорят, что последовательность измеримых на множестве E функций f_n **сходится по мере на** E к измеримой на E функции f, если для любого $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu \{x \in E \mid | f_n(x) - f(x) | \geq \alpha\} = 0.$$

Из равномерной сходимости следует точечная сходимость, из точечной сходимости — сходимость почти всюду, из сходимости почти всюду на множестве конечной меры — сходимость по мере. Обратное утверждение в общем случае не имеет места.

ТЕОРЕМА 2.1. (Егоров) *Пусть E — измеримое множество конечной меры и пусть последовательность измеримых на E функций $f_n(x)$ сходится почти всюду на E к функции $f(x)$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое измеримое множество $E_\delta \subset E$, что*

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

2) *на E_δ последовательность f_n сходится к f равномерно.*

<u>Определение</u> 7. Функции f и g определенные на E и совпадающие почти всюду на E, называются эквивалентными на E (записывается $f \sim g$).

Определение 8. Измеримая на E функция, принимающая не более чем счетное множество значений, называется простой на E.

ТЕОРЕМА 2.2. *Функция f определенная на E, принимающая на этом множестве не более чем счетное число значений y_k, является измеримой на E (и, следовательно, простой) тогда и только тогда, когда для каждого значения y_k множество $A_k=\{x \mid f(x)=y_k\}$ измеримо.*

ТЕОРЕМА 2.3. *Функция f определенная на E является измеримой на E тогда и только тогда, когда существует последовательность простых функций f_n равномерно сходящаяся на E к f.*

2. Интеграл Лебега

Пусть $\mu(E)<+\infty$.

Определение 9. Пусть h — простая на множестве E функция, принимающая на E значения $y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots$; $y_i \neq y_j$ $(i \neq j)$.

Пусть $E_k = \{x \in E \mid h(x) = y_k\}$, $k = 1, \ldots$. Если h принимает на E конечное число различных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то число

$$\sum_{k=1}^{n} {}_k\mu(E_k)$$

называется **интегралом** Лебега **от** h **по множеству** E. Если h принимает на E счетное число различных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots$, то она называется интегрируемой по Лебегу на E , если ряд $\sum_{k=1}^{n} {}_k\mu(E_k)$ сходится абсолютно. Если h интегрируема, то сумма этого ряда называется **интегралом** Лебега **от** h **по множеству** E. Интеграл Лебега обозначается

$$\int_E h(x)d\mu\ x) \quad \text{или} \quad \int_E h d\mu$$

Определение 10. Измеримая на E функция f называется **интегрируемой по Лебегу на множестве** E, если существует равномерно сходящаяся к f на E последовательность h_n простых интегрируемых на E функций.. В этом случае интеграл Лебега от функции f по множеству E определяется равенством

$$\int_E f d\mu = \sup\{\int_E h d\mu \mid h \geq 0 .$$

Интеграл Лебега обладает следующими основными свойствами:

1. $\int_E h d\mu$.

2. Если f и g интегрируемые на множестве E функции, то функция $\alpha f+\beta g$ интегрируема на E для всех $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ и

$$\int_E(\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\int_E fd\mu+\beta\int_E gd\mu$$

3. Если $f\geq 0$ почти всюду на множестве E и функция f интегрируема на E, то $\int_E fd\mu\geq 0$.
4. Если $f\geq g$ почти всюду на E и обе функции f и g интегрируемы на E, то $\int_E fd\mu\leq\int_E gd\mu$.
5. Функция f интегрируема на E тогда и только тогда, когда $|f|$ интегрируема на E, при этом справедливо неравенство $\int_E fd\mu\leq\int_E gd\mu$.
6. Если f измерима на E, а g интегрируема на E и $|f|\leq g$ почти всюду на E, то f интегрируема на E.
7. Если $\mu(E)=0$, то $\int_E fd\mu\leq\int_E gd\mu$ для любой функции f. Если почти всюду на E $f(x)=0$, то $\int_E fd\mu\leq\int_E gd\mu$.

Откуда получаем, что если функции f и g определенны на E и равны почти всюду на E, то они интегрируемы или не интегрируемы на E одновременно; в случае их интегрируемости, интегралы на E от этих функций совпадают. Это дает возможность интегрировать функции определенные почти всюду на рассматриваемом множестве: функция g, определенная почти всюду на E, называется интегрируемой по Лебегу на множестве E, если интегрируема функция f, определенная всюду на E и совпадающая с g почти всюду на E, и тогда, по определению,

$$\underline{\int_E gd\mu:=\int_E fd\mu.}$$

8. (Неравенство Чебышева) Пусть f интегрируемая и неотрицательная на E функция и $c>0$. Тогда справедливо неравенство Чебышева

$$\mu(x\in E\mid f(x)\geq c\}\leq\frac{1}{c}\int_E fd\mu.$$

9. Если $\underline{\int_E fd\mu\leq\int_E gd\mu}$, то $f=0$ почти всюду на E.

10. (Свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега) Пусть f интегрируемая на E функция. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если $\mu(A)<\delta$ и $A\subset E$, то $\left|\int_A f d\mu\right| < :.$

11. Если f интегрируема на E и $E = \coprod_{n\in} E_n$, то

$$\int_E f d\mu = \sum_{n\in} \int_{E_n} f d\mu ,$$

причем ряд сходится абсолютно (σ-аддитивность интеграла Лебега).

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть m — мера Лебега на прямой. Если для функции f, заданной на отрезке $[a,b]$, существует собственный интеграл Римана, то f интегрируема по Лебегу на этом отрезке и ее интеграл Лебега* $\int_{[a,b]} f(x)dm(x)$ *равен интегралу Римана* $\int_a^b f(x)d(x)$.

ТЕОРЕМА 2.5. *Ограниченная функция, заданная на орезке числовой прямой интегрируема по Риману на этом отрезке тогда и только тогда , мера Лебега множества ее точек разрыва из этого отрезка равна нулю.*

ТЕОРЕМА 2.6. (Лебега о предельном переходе). *Пусть последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится почти всюду к функции f на $E\in\sum$ и существует такая интегрируемая на E функция* φ, *что*

$$| f_n(x) | \leq \varphi(x)$$

почти всюду на E (n=1,23,...). *Тогда предельная функция f интегрируема на E и имеет место предельный переход под знаком интеграла Лебега, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu\ x) = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu\ x) = \int_E f(x)d\mu\ x) .$$

Эту теорему также называют теоремой Лебега о мажорированной сходимости.

Напомним, что если $\{a_n\}$ — последовательность в **R**, то нижний $(\varliminf_{n\to\infty} a_n)$ и верхний $(\varlimsup_{n\to\infty} a_n)$ пределы последовательности $\{a_n\}$ определяются соответственно как наименьшая и наибольшая предельные точки последовательности $\{a_n\}$.

ТЕОРЕМА 2.7. (лемма Фату). *Пусть* $\{f_n\}$ — *последовательность неотрицательных функций интегрируемых на* E, *сходящаяся почти всюду на* E *к функции* f *и существует постоянная* K *такая, что* $\varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu(x) < +\infty$ *для всякого натурального* n. *Тогда функция* f *является интегрируемой на* E *и*

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)d\mu(x) \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu(x).$$

ТЕОРЕМА 2.8. (Б.Леви). *Пусть* $\{f_n\}$ — *последовательность интегрируемых функций на* $E\in\Sigma$ *и для* $\forall x \in E$

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots .$$

Тогда если существует такое положительное число M, *что*

$$\int_E f_n(x)d\mu(x) < M$$

для всех $n\in\mathbf{N}$, *то почти всюду на* E *существует конечный предел* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, *функция* f *интегрируема на* E *и*

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu(x).$$

3. Произведение мер. Теорема Фубини

Определение 11. Пусть X и Y – множества, μ_X и μ_Y – меры, заданные на полукольцах $\boldsymbol{S}_X$ и $\boldsymbol{S}_Y$ — подмножеств множеств X и Y соответственно. Систему подмножеств

$$\{A\times B \mid A\in \boldsymbol{S}_X,\ B\in \boldsymbol{S}_Y\}$$

множества $Z = X\times Y$ называют **произведением полуколец** $\boldsymbol{S}_X$ и $\boldsymbol{S}_Y$ и обозначают $\boldsymbol{S}_X\times\boldsymbol{S}_Y$.

Для $A\in \boldsymbol{S}_X$, $B\in \boldsymbol{S}_Y$ положим

$$\mu(A\times B)=\mu_X(A)\,\mu_Y(B).$$

ТЕОРЕМА 2.9. *Система множеств* $\mathbf{S}_X\times\mathbf{S}_Y$ *является полукольцом. Функция* μ *является мерой на полукольце* $\mathbf{S}_X\times\mathbf{S}_Y$ *и обозначается* $\mu_X\times\mu_Y$. *Эта мера* σ*-аддитивна, если меры* μ_X и μ_Y σ*-аддитивны.*

Определение 12. Если μ_X и μ_Y σ-аддитивные меры, заданные соответственно на σ-алгебрах Σ_X и Σ_Y, то их (тензорным) **произведением** называется лебегово продолжение меры $\mu_X\times\mu_Y$.

Обозначается это произведением символом $\mu_X\otimes\mu_Y$. Если μ_X и μ_Y — линейные меры (меры Лебега в $\mathbf{R}$), то их произведение $\mu_X\otimes\mu_Y$ является плоской мерой Лебега (мерой Лебега в $\mathbf{R}^2$).

ТЕОРЕМА 2.10 (Фубини). *Пусть* μ_X *и* μ_Y *определены на* σ*-алгебрах*, σ*-аддитивны и полны,* $\mu=\mu_X\otimes\mu_Y$. *Пусть, далее, f(x,y) интегрируема по мере* μ *на* $A\subset X\times Y$. *Тогда*

$$\int_A f\,d\mu=\int_X\left(\int_{A_x} f(x,y)\,d\mu_Y(y)\right)d\mu_X(x)=\int_Y\left(\int_{A^y} f(x,y)\,d\mu_X(x)\right)d\mu_Y(y),$$

где $A_x=\{y\in Y\mid (x,y)\in A\}$, $A^y=\{x\in X\mid (x,y)\in A\}$.

Утверждение теоремы включает существование внутренних интегралов при почти всех значениях переменного, по которому берутся соответствующие внешние интегралы.

ТЕОРЕМА 2.11 (Тонелли). *В обозначениях предыдущей теоремы из существования одного из интегралов*

$$\int_X\Big(\int_{A_x}|f(x,y)|\,d\mu_Y(y)\Big)d\mu_X(x) \qquad \text{или} \qquad \int_Y\Big(\int_{A^y}|f(x,y)|\,d\mu_X(x)\Big)d\mu_Y(y)$$

вытекает существование $\int_A f\,d\mu$ *при условии, что функция* f μ*-измерима.*

Пусть X — множество, Σ — σ-алгебра подмножеств множества X, на которой задана σ-аддитивная полная мера μ; $p\in[1,+\infty)$.

Обозначим через $L_P(X,\mu)$ множество всех μ-измеримых функций f на X таких, что для которых $\int_E f_n(x)d\mu(x) < \infty$. Пусть $[f]$ есть класс всех таких функций из $L_P(X,\mu)$, которые почти всюду на X совпадают с f. Множество всех таких классов эквивалентности обозначим через $L_P(X,\mu)$. На множестве $L_P(X,\mu)$ определим метрику:

$$\rho_p([f],[g]) = \left(\int_X |f-g|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Пара $(L_P(X,\mu), \rho_p)$ является полным метрическим пространством.. становится полным метрическим пространством.

Если это не приводит к недоразумениям, то, допуская вольность речи, элементы из $L_P(X,\mu)$ называют функциями, а расстояние $\rho_p([f],[g])$ обозначают $\rho_p(f,g)$.

ТЕОРЕМА 4 (неравенство Гельдера). *Пусть* $p, p' \geq 1,\ 1/p + 1/p' = 1.$ *Если* $f \in L_P(X,\mu)$, $g \in L_q(X,\mu)$ *то* $f\,g \in L_1(X,\mu)$, *причем*

$$\left| \int_X fg\,d\mu \right| \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p'}$$

(*числа p и q называются сопряженными показателями*).

Б. Задания к лабораторным работам

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Измеримые функции

Необходимые понятия и теоремы:Измеримые функции и их свойства, простые функции, ограниченные функции, множество точек разрыва функции, заданной на **R,** типы сходимости последовательности функций (равномерная, точечная, сходимость почти всюду), теорема о представлении измеримой функции в виде предела равномерно сходящейся последовательности простых функций, эквивалентные функции. Теорема Егорова.

Литература:[1] стр. 40-44, [4] стр. 81-92, [5] стр. 66-109.

1. Пусть E — измеримое подмножество множества X и пусть $f : E \to \mathbf{R}$. Доказать, что f измерима на E тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1.1. Для любого $c \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in E \mid f(x) > c\}$ измеримо;

1.2. Для любого $c \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in E \mid f(x) \geq c\}$ измеримо;

1.3. Для любого $c \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in E \mid f(x) \leq c\}$ измеримо;

1.4. Для любых $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a < f(x) < b\}$ измеримо;

1.5. Для любых $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a < f(x) \leq b\}$ измеримо;

1.6. Для любых $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a \leq f(x) \leq b\}$ измеримо;

1.7. Для любых $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a \leq f(x) < b\}$ измеримо;

1.8. Для любого $c \in \mathbf{Q}$ множество $\{x \in E \mid f(x) < c\}$ измеримо;

1.9. Для любого $c \in \mathbf{Q}$ множество $\{x \in E \mid f(x) \leq c\}$ измеримо;

1.10. Для любого $c \in \mathbf{Q}$ множество $\{x \in E \mid f(x) > c\}$ измеримо;

1.11. Для любого $c \in \mathbf{Q}$ множество $\{x \in E \mid f(x) \geq c\}$ измеримо;

1.12. Для любых $a, b \in \mathbf{Q}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a < f(x) < b\}$ измеримо;

1.13. Для любых $a, b \in \mathbf{Q}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a < f(x) \leq b\}$ измеримо;

1.14. Для любых $a, b \in \mathbf{Q}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a \leq f(x) < b\}$ измеримо;

1.15. Для любых $a, b \in \mathbf{Q}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a \leq f(x) \leq b\}$ измеримо.

1.16. Для любых $a, b \notin \mathbf{Q}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a < f(x) \leq b\}$ измеримо;

1.17. Для любого $c \notin \mathbf{Q}$ множество $\{x \in E \mid f(x) \leq c\}$ измеримо;

1.18. Для любого $c \notin \mathbf{Q}$ множество $\{x \in E \mid f(x) \geq c\}$ измеримо;

1.19. Для любого $c \notin \mathbf{Q}$ множество $\{x \in E \mid f(x) > c\}$ измеримо;

1.20. Для любых $a, b \notin \mathbf{Q}$, $a \leq b$ множество $\{x \in E \mid a < f(x) < b\}$ измеримо.

2. Пусть m — мера Лебега на $\mathbf{R}$. Для заданной функции $F(t)$ построить эквивалентную ей кусочно-непрерывную функцию. Доказать, что не существует непрерывной функции эквивалентной функции $F(t)$.

№	$F(t)$	№	$F(t)$
2.1	$\begin{cases} t^2, t \in K \setminus Q, \\ \ln(t+1), t \in K \cap Q, \\ \sin t, t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \setminus K, \\ 2, t \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \setminus K. \end{cases}$	2.2	$\begin{cases} e^t, t \in Q \setminus K, \\ 3, t \in Q \cap K, \\ 5t^2 + t, t \in [-2,0] \setminus Q, \\ \sin t, t \in [0,1 \setminus \setminus Q. \end{cases}$

2.3	$\begin{cases} \sin t, t \in [0,1] \cap K, \\ \cos t^2, t \in [0,1] \setminus K, \\ t^2 + 1, t \in \{-1,0] \cap Q, \\ e^t, t \in \{-1,0] \setminus Q. \end{cases}$	2.4	$\begin{cases} \ln(1+t), t \in [0,1] \setminus K, \\ t^2 + e^t, t \in [0.1] \cap K, \\ t^3, t \in [-2,0] \setminus Q, \\ 1, t \in [-2,0] \cap Q. \end{cases}$
2.5	$\begin{cases} \frac{\sin \pi t}{1+t^2}, t \in K \setminus Q, \\ arctg(t), t \in [-1,5] \cap Q, \\ ch(5t), t \in [-1,4] \setminus (K \cup Q) \\ 1, t \in [4,5] \setminus Q. \end{cases}$	2.6	$\begin{cases} \frac{1}{1+t^2}, t \in K \setminus Q, \\ e^t, t \in [-2,4] \cap Q, \\ \sin(1+t^2), t \in [0,3] \setminus Q, \\ t^2 + 4, t \in [1,4] \setminus (K \cup Q). \end{cases}$
2.7	$\begin{cases} 1 + \sin \pi t, t \in Q \setminus K, \\ 2t^2 + 1, t \in Q \cap K, \\ \cos(sht), t \in [-2,4] \setminus Q, \\ \frac{\lvert t \rvert}{1+t^2}, t \in [4,5] \setminus Q. \end{cases}$	2.8	$\begin{cases} 21t^3, t \in Q \setminus K, \\ sh(1+t), t \in Q \cap K, \\ \sin \ln(1+t), t \in [0,3] \setminus Q, \\ 2^t, t \in [3,4] \setminus Q. \end{cases}$
2.9	$\begin{cases} \frac{t^2}{1+t^3}, t \in [0,5] \setminus K, \\ \sin(\pi t), t \in [0,5] \cap Q, \\ \cos t, t \in [-1,0[\cap Q, \\ sh(2+t), t \in [-1,0[\setminus Q. \end{cases}$	2.10	$\begin{cases} \frac{e^t}{1-\sin t}, t \in [0,1] \setminus K, \\ 2t + 2, t \in [0,1] \cap K, \\ e^t, t \in [-1,0[\cap Q, \\ \cos(\pi t), t \in [-1,0[\setminus Q. \end{cases}$
2.11	$\begin{cases} e^{\cos \pi t}, t \in [-2,-1] \setminus Q, \\ \ln \lvert t \rvert, t \in [-2,-1] \cap Q, \\ t^2 + 3, t \in]-1,3[\setminus K, \\ sht, t \in]-1,3[\cap K. \end{cases}$	2.12	$\begin{cases} arctg t, t \in [-2,5] \setminus K, \\ t^3 - 1, t \in \{-2m5] \cap K, \\ \sin e^t, t \in]5,8] \setminus Q, \\ 1, t \in]5,8] \cap Q. \end{cases}$
2.13	$\begin{cases} \sin t, t \in K, \\ \frac{1}{t} e^t, t \in [2,8] \cap Q, \\ t \ln t, t \in [-1,2[\setminus K, \\ \sin(t+1), t \in]2,8] \setminus Q. \end{cases}$	2.14	$\begin{cases} e^t, t \in K \cap Q, \\ \frac{1}{1-t}, t \in K \setminus Q, \\ t^2 + 2, t \in [-1, \frac{1}{3}[\setminus K, \\ \ln t^2, t \in [\frac{1}{3}, 5] \setminus K. \end{cases}$

2.15	$\begin{cases} \cos 2t, t\in Q\cap[-1,\frac{1}{2}[, \\ e^{\sin t}, t\in[-1,\frac{1}{2}[\backslash Q, \\ \arcsin\frac{t^2+1}{50}, t\in[\frac{1}{2},5]\setminus K, \\ t^3+8, t\in[\frac{1}{2},5]\cap K. \end{cases}$	2.16	$\begin{cases} \ln\|t\|, t\in Q\setminus K, \\ t^6+t^4, t\in Q\cap K, \\ t+\cos t^3, t\in[-1,2]\setminus Q, \\ e^{arctgt}, t\in[2,5]\setminus Q. \end{cases}$
2.17	$\begin{cases} \frac{1}{1+t^2}, t\in Q\setminus K, \\ sh2t, t\in Q\cap K, \\ t\sin\pi t, t\in[-1,3]\setminus Q, \\ \ln\|t\|, t\in[3,5]\setminus Q. \end{cases}$	2.18	$\begin{cases} \frac{t^2}{1+t^2}, t\in K\cap Q, \\ t^2\ln\|t\|, t\in K\setminus Q, \\ arctgt, t\in[-1,\frac{1}{5}[\backslash K, \\ 2^{\sin t}, t\in[\frac{1}{5},5[\backslash K. \end{cases}$

3. Доказать, что функция $F(x)$ измерима на **R**.

3.1	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k^4+x^4}$	3.2	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k[x]}{1+k^5[x]^2}$
3.3	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(ke^x)}{k^3\sqrt{k}}$	3.4	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{\sqrt[3]{k^4+x^4}}$
3.5	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin[x]^4}{k\sqrt{k}}$	3.6	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\|x\|}$
3.7	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos x^2}{k^2}$	3.8	$F(x)=\sin[x]$
3.9	$F(x)=\mathrm{ch}\sin[x]$	3.10	$F(x)=\cos\mathrm{sh}[x]$
3.11	$F(x)=\mathrm{arctg}([x]\cos x^2)$	3.12	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{arctg(k[x])}{\exp k}$
3.13	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}arctg\frac{x}{x^4+k^4}$	3.14	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{arctg(k[x])}{3^k}$
3.15	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\cos x}$	3.16	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos[x^2]^k}{k^2}$
3.17	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k[x]}{k^3+[x]^2}$	3.18	$F(x)=\mathrm{sign}(\cos\pi x^2)$
3.19	$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx^2)}{k\sqrt[3]{k}}$	3.20	$F(x)=\mathrm{sign}(\sin\pi x^2)$

4. Пусть m — мера Лебега на **R**, E=[0,2]. Проверить, является ли последовательность f_n сходящейся точечно, равномерно, почти всюду на

множестве E? Построить множество $M \subset E$ такое, что $m(E \backslash M) < 0.05$ и на множестве M последовательность f_n сходилась равномерно.

4.1	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$	4.2	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$
4.3	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$	4.4	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$
4.5	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$	4.6	$f_n(t)=\begin{cases} \text{ʒ}^n(\frac{\pi}{2}\iota^n), t \neq 1 \\ 0, t=1 \end{cases}$
4.7	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$	4.8	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$
4.9	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$	4.10	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$
4.11	$f_n(t) = \cos^n t$	4.12	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$
4.13	$f_n(t) = \sin^n t$	4.14	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$
4.15	$f_n(t) = \cos^n 5t$	4.16	$f_n(t)=\begin{cases} \text{ʒ}^n(\frac{\pi}{2}\iota^n), t \neq 1 \\ 0, t=1 \end{cases}$
4.17	$f_n(t) = \sin^n 5t$	4.18	$f_n(t)=\begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}\iota^n), t \neq 0 \\ 0, t=0 \end{cases}$

4.19	$f_n(t) = \cos^n(t/n)$	4.20	$f_n(t) = \begin{cases} tg^n(\frac{\pi}{3}t^n), t \neq 0 \\ 0, t = 0 \end{cases}$

5. Пусть f и g — измеримые на множестве E функции. Докажите, что на множестве E измерима функция $h(x)$, определяемая через f и g. Верно ли обратное утверждение: если h — измерима, то f и g — измеримые функции?

№	$h(x)$	№	$h(x)$
5.1	$\lvert f(x) \rvert$	5.2	$\sqrt[5]{f(x)}$
5.3	$[f(x)]$	5.4	$\sqrt[7]{f(x)}$
5.5	$f^{2n}(x), \quad n \in \mathbf{N}$	5.6	$f^{2n+1}(x), \quad n \in \mathbf{N}$
5.7	$\sin f(x)$	5.8	$f^{+}(x) = \max(f(x), 0)$
5.9	$f^{-}(x) = -\min(f(x), 0)$	5.10	$h(x) = \begin{cases} 1, f(x) > g(x) \\ -1, f(x) \leq g(x) \end{cases}$
5.11	$\cos f(x)$	5.12	$h(x) = \begin{cases} f(x), f(x) > g(x) \\ 1, f(x) \leq g(x) \end{cases}$
5.13	$\sup(f,g)(x) = \max(f(x), g(x))$	5.14	$h(x) = \begin{cases} g(x), f(x) > g(x) \\ -1, f(x) \leq g(x) \end{cases}$
5.15	$\inf(f,g)(x) = \min(f(x), g(x))$	5.16	$h(x) = \begin{cases} \lvert f(x) \rvert, f(x) > g(x) \\ 0, f(x) \leq g(x) \end{cases}$
5.17	$\mathrm{Sign}\, f(x)$	5.18	$h(x) = \begin{cases} \lvert f(x) \rvert, f(x) > g(x) \\ \lvert g(x) \rvert, f(x) \leq g(x) \end{cases}$

5.19	$h(x)=\begin{cases}1, f(x)>g(x)\\ -1, f(x)\le g(x)\end{cases}$	5.20	$h(x)=\begin{cases}1, f(x)>g(x)\\ -1, f(x)\le g(x)\end{cases}$

6. Пусть m — мера Лебега на $\mathbf{R}$ и пусть E — измеримое подмножество $\mathbf{R}$. Доказать, что

6.1. Неубывающая на отрезке $[a,b]$ функция измерима на этом отрезке;
6.2. Неубывающая на E функция измерима на E;
6.3. Невозрастающая на отрезке $[a,b]$ функция измерима на нем;
6.4. Неубывающая на E функция измерима на E;
6.5. Если f определена на $[a,b]$ и измерима на каждом отрезке $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, то она измерима на $[a,b]$;
6.6. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция измерима на нем;
6.7. Если f имеет производную на отрезке $[a,b]$, то производная f' измерима на этом отрезке;
6.8. Если f имеет лишь конечное число точек разрыва, то f измерима на $[a,b]$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Интеграл Лебега

Необходимые понятия и теоремы: Характеристическая функция, простая функция, ограниченная функция, непрерывная функция, классификация точек разрыва числовых функций действительного переменного, мера множества точек разрыва числовой функции действительного переменного, интеграл Римана для ограниченных и неограниченных функций, сходимость (абсолютная и условная) несобственного интеграла Римана, эквивалентные функции и их свойства, Интеграл Лебега и его свойства, двойной интеграл Римана, теорема Фубини.

Литература: [1] стр. 44-52, 61-64, [3] стр. 195-198,[4] стр. 291-310, [5] стр. 109-126, 129-136, [6] стр. 81-92.

1. Для заданной на отрезке $[a,b]$ функции f

1 доказать, что она является простой;

2 вычислить интеграл Лебега $\int_{[a,b]} f(t)dt$, если он существует.

№	a	b	$f(t)$	№	a	b	$f(t)$	№	a	b	$f(t)$

1.1	0	1	$\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]$	1.2	0	8	$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right]$	1.3	0	2	$e^{-[t]}$
1.4	−1	1	$\left[\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right]$	1.5	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$[tg\,t]$	1.6	−1	1	$[\ln\|t\|]$
1.7	0	3	$2^{-[t]}$	1.8	−1	2	$\sin\frac{\pi[t]}{12}$	1.9	0	1	$\frac{\exp[t]}{[t]}$
1.10	−1	5	$\left[\frac{1}{\sqrt[5]{t}}\right]$	1.11	−1	1	$\left[\frac{1}{t^3}\right]$	1.12	0	1	$\left[\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right]$
1.13	0	1	$\left[\frac{1}{t^2}\right]$	1.14	0	2	$3^{-[t]}$	1.15	−1	2	$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right]$
1.16	0	π	$[ctg\,t]$	1.17	−1	1	$\left[\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right]$	1.18	−1	1	$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{1-t}}\right]$
1.19	0	2	$\left[\frac{1}{\sqrt[4]{2-t}}\right]$	1.20	−1	2	$3^{-\left[\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right]}$	1.21	0	1	$\left[\frac{1}{t^3}\right]$

2. По определению вычислить интеграл Лебега $\int_{[a,b]} f(t)dt$

№	$f(t)$	№	$f(t)$
2.1	$\|4t-2\|$	2.2	$\|5t-2\|$
2.3	$\begin{cases} \|5t-3\|, \|t-0.6\|<0.1, \\ 1, \|t-0.6\|\geq 0.1. \end{cases}$	2.4	$\begin{cases} \|6t-1\|-1, t\in[0,0.5], \\ \|6t-5\|-1, t\in]0.5,1]\|. \end{cases}$
2.5	$\begin{cases} 6t-1, t\in\left[0,\frac{1}{6}\right], \\ \|3t-1\|-\|3t-2\|, t\in\left]\frac{1}{6},1\right]. \end{cases}$	2.6	$\begin{cases} 3t-1, t\in\left[0,\frac{2}{3}\right], \\ 3t-2, t\in\left]\frac{2}{3},1\right]. \end{cases}$

2.7	$\begin{cases} 6t-2, t\in[0,0.5[, \\ 3-4t, t\in[0.5,1]\,\vert. \end{cases}$	2.8	$\begin{cases} \vert 8t-4\vert, \frac{1}{4}\le\vert t-0.5\vert\le\frac{3}{8}, \\ 2, \vert t-0.5\vert<\frac{1}{4}, \\ 3, \vert t-0.5\vert>\frac{3}{8}. \end{cases}$
2.9	$\begin{cases} 1, t\in[0,0.5], \\ \vert 8t-5\vert, t\in]0.5,0.75], \\ \vert 8t-7\vert, t\in]0.75,1]. \end{cases}$	2.10	$\begin{cases} \vert 4t-2\vert, t\in[0,0.5[, \\ \vert 8t-5\vert, t\in[0.5,0.75], \\ \vert 8t-7\vert, t\in]0.75,1]. \end{cases}$
2.11	$\begin{cases} 1, t\in \left[0,\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right]\cup\left[\frac{7}{8},1\right], \\ \vert 8t-2\vert, t\in \left]\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right[, \\ \vert 8t-6\vert, t\in \left]\frac{5}{8},\frac{7}{8}\right[. \end{cases}$	2.12	$\begin{cases} \vert 8t-2\vert, t\in \left[0,\frac{3}{8}\right[, \\ \vert 8t-4\vert-1, t\in \left[\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right[, \\ \vert 8t-6\vert, t\in \left[\frac{5}{8},1\right]. \end{cases}$
2.13	$\vert 3t-\ \ \vert$	2.14	$\vert 5t-3\vert$
2.15	$\vert 4t-3\vert$	2.16	$\vert 7t-5\vert$
2.17	$\vert 6t-4\vert$	2.18	$\vert 2t-\ \ \vert$
2.19	$\vert 5t-2\vert-$	2.20	$\vert 5t-3\vert+$

3. Для функций $f_k:[a_k,b_k]\to R$, $k=\ ,2,$

а) выяснить, является ли f_k ограниченной;

б) найти меру множества точек разрыва;

в) выяснить, существует ли от нее собственный или несобственный интеграл Римана;

г) выяснить, измерима ли f_k;

д) найти интеграл Лебега, $\int_{[a_k,b_k]} f_k(t)dt$, если он существует.

№	*a*	*b*	*f*(*t*)
3.1	−1	1	$f_1(t)=\begin{cases} n, \quad t\in\left]\frac{1}{3^{n+1}},\frac{1}{3^n}\right[\setminus K, n\in\ , \\ \left[e^{t^2}\right], \quad t\in K, \\ \frac{1}{\sqrt{1+t}}, \quad t\in[-1,0[\cup\left]\frac{1}{3},1\right]\setminus K. \end{cases}$

	1	3	$f_2(t)=\begin{cases}\ln t, & t\in[1,2]\setminus Q,\\ \sin t, & t\in[2,3],\\ 2t-1, & t\in[1,2[\cap Q.\end{cases}$
3.2	0	1	$f_1(t)=\begin{cases}t\ln t, & t\in\left]0,\frac{4}{5}\right]\setminus K,\\ (-1)^n, & t\in\left[1-\frac{1}{5^n},1-\frac{1}{5^{n+1}}\right[\setminus K, n\in\mathbb{N},\\ arctgt, & t\in K.\end{cases}$
	-3	2	$f_2(t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{3+t}}, & t\in[-3,1]\setminus Q,\\ t^2+1, & n\in[1,2]\cup[-3,1[\cap Q.\end{cases}$
3.3	-1	1	$f_1(t)=\begin{cases}(-1)^n 2^{n/2}, & t\in\left]\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right[\setminus K, n\in\mathbb{N},\\ arctgt, & t\in K,\\ \frac{1}{\sqrt[3]{t}}, & \in[-1,0]\cup\left]\frac{1}{2},1\right]\setminus K.\end{cases}$
	0	1	$f_2(t)=\begin{cases}\frac{}{2t-\sqrt{2}}, & t\in[0,1]\cap Q,\\ e^t, & t\in]0,1[\setminus Q.\end{cases}$
3.4	-2	1	$f_1(t)=\begin{cases}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, & t\in\left[\frac{1}{6^{n+1}},\frac{1}{6^n}\right[\setminus K, n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\\ e^{\sin t}, & t\in K,\\ \frac{1}{\sqrt{1-t}}, & \in[-2,0[.\end{cases}$
	$-\frac{1}{e}$	e	$f_2(t)=\begin{cases}\frac{1}{t+2}, & t\in\left[-\frac{1}{e},e\right]\setminus Q,\\ arctg2t, & t\in\left[-\frac{1}{e},e\right]\cap Q.\end{cases}$
3.5	0	$\frac{\pi}{2}$	$f_1(t)=\begin{cases}\sqrt{n}, & t\in\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]\setminus K, n\in\mathbb{N},\\ t^{10}, & t\in K,\\ t\cos t^2, & t\in\left]1,\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$

	-1	1	$f_2(t)=\begin{cases}\frac{1}{t+2}, & t\in[-1,1]\setminus Q,\\ tg2t, & t\in[-1,1]\cap Q.\end{cases}$
3.6	$-\pi$	π	$f_1(t)=\begin{cases}(-1)^n, & t\in\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5^n},\frac{1}{2}-\frac{1}{5^{n+1}}\right[\setminus K, n\in \mathbb{N}\cup\{\\ t\ln(t+1), & t\in K,\\ t^2+1, & t\in\left[-\pi,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},\pi\right]\setminus K.\end{cases}$
	0	2	$f_2(t)=\begin{cases}tgt\sqrt{\lvert\cos t\rvert}, & t\in[0,2]\setminus Q,\\ e^{\sin t}, & t\in[0,2]\cap Q.\end{cases}$
3.7	0	$\sqrt{2}$	$f_1(t)=\begin{cases}n, & t\in\left[\frac{2}{3^{n+1}},\frac{2}{3^n}\right[\setminus K, n\in \mathbb{N},\\ \frac{t+1}{t^2+1}, & t\in\left[\frac{2}{3},\sqrt{2}\right]\setminus K,\\ e^t, & t\in K.\end{cases}$
	1	π	$f_2(t)=\begin{cases}\sin t^3, & t\in[1,\pi]\setminus Q,\\ \frac{1}{t+2}, & t\in[1,\pi]\cap Q.\end{cases}$
3.8	0	2	$f_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{t}, & t\in[0,1]\setminus K,\\ \exp(t), & t\in K,\\ \frac{1}{\sqrt[3]{t-2}}, & t\in]1,2].\end{cases}$
	-3	1	$f_2(t)=\begin{cases}-1, & t\in[-3,1]\cap Q,\\ \cos t, & t\in[-1,1]\setminus Q,\\ \ln\lvert t\rvert, & t\in[-3,-1]\setminus Q.\end{cases}$

3.9	-2	1	$f_1(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n}, & t\in\left[-\frac{1}{2^n},-\frac{1}{2^{n+1}}\right[\setminus Q,\ n\in\mathbb{N},\\ tgt, & t\in[0,1]\setminus K,\\ e^t, & t\in K\cup\left(\left[-2,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{2},0\right]\cap Q\right).\end{cases}$
	0	2	$f_2(t)=\begin{cases}\sin t, & t\in[0,2]\setminus Q,\\ \cos t^2, & t\in[0,2]\cap Q.\end{cases}$
3.10	-2	0	$f_1(t)=\begin{cases}(-n)^n, & t\in\left[-\frac{1}{n!},-\frac{1}{(n+1)!}\right]\setminus K,\ n\in\mathbb{N},\\ \sin t, & t\in K,\\ \cos\pi t, & t\in[2,-1[.\end{cases}$
	-1	3	$f_2(t)=\begin{cases}2^t\ln 2, & t\in[-1,2]\setminus Q,\\ tgt, & t\in[-1,2]\cap Q,\\ 1+t^2, & \in]2,3].\end{cases}$
3.11	-1	1	$f_1(t)=\begin{cases}(-n)^n, & t\in\left[\frac{1}{5^{n+1}},\frac{1}{5^n}\right[\setminus K,\ n\in\mathbb{N},\\ \cos^2 t, & t\in[-1,0[\cup\left[\frac{1}{5},1\right]\setminus K,\\ \lvert\cos t\rvert, & t\in K.\end{cases}$
	0	$\frac{\pi}{2}$	$f_2(t)=\begin{cases}\dfrac{\cos t}{\sqrt{1-\sin t}}, & t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\setminus Q,\\ t\ln t, & t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cap Q.\end{cases}$

3.12	-1	1	$f_1(t)=\begin{cases}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right], & t\in\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right[\setminus K, n\in \mathbb{N},\\ \left[\frac{1}{t}\right], & t\in K,\\ (\cos t)e^{\sin t}, & t\in[-1,0[\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\setminus K.\end{cases}$
	0	4	$f_2(t)=\begin{cases}t^2+t+1, & t\in[0,2]\setminus Q,\\ t\ln t, & t\in[0,4]\cap Q,\\ e^t, & \in[2,4]\setminus Q.\end{cases}$
3.13	0	3	$f_1(t)=\begin{cases}3^n, & t\in\left[\frac{1}{5^{n+1}},\frac{1}{5^n}\right[\setminus K, n\in \mathbb{N},\\ arctgt, & t\in K,\\ t\ln t, & t\in]1,3].\end{cases}$
	-3π	-3π	$f_2(t)=\begin{cases}(\cos t)2^{\sin t}, & t\in[-3\pi,\pi]\setminus Q,\\ t^2+1, & t\in[-3\pi,\pi]\cap Q.\end{cases}$
3.14	$-\frac{\pi}{2}$	π	$f_1(t)=\begin{cases}(-1)^n, & t\in\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right[\setminus K, n\in \mathbb{N},\\ e^{\arcsin t}, & t\in K,\\ t\sin t, & t\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\cup]1,\pi].\end{cases}$
	0	1	$f_2(t)=\begin{cases}\arccos t, & t\in[0,1]\setminus Q,\\ 2^{t^2}, & t\in[0,1]\cap Q.\end{cases}$

3.15	-2	1	$f_1(t)=\begin{cases}3^n, & t\in\left[\frac{1}{6^{n+1}},\frac{1}{6^n}\right[\setminus K,\ n\in\mathbb{N},\\ e^{\sin t}, & t\in K,\\ \dfrac{1}{\sqrt[5]{t-1}}, & t\in[-2,0[.\end{cases}$
	$\frac{1}{e}$	e	$f_2(t)=\begin{cases}arctgt, & t\in\left[\frac{1}{e},e\right]\setminus Q,\\ \lvert\ln t\rvert, & t\in\left[\frac{1}{e},e\right]\cap Q.\end{cases}$

4. Для заданной в области $D\subset\mathbf{R}^2$ функции f

а) выяснить, является ли она ограниченной;

б) найти меру множества точек разрыва;

в) выяснить, существует ли двойной интеграл Римана;

г) выяснить, измерима ли она;

д) найти интеграл Лебега, если он существует.

(В пунктах г) и д) использовать эквивалентную функцию, имеющую меньшее число точек разрыва.)

№	D	$f(x,y)$
4.1	$\{(x,y)\mid x>0,\ y>0,\ x+y<\ \}$	$\begin{cases}k+j,\ x\in\left[\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}\right[\setminus Q,\\ \qquad y\in\left[\frac{1}{3^{j+1}},\frac{1}{3^j}\right[,\ k,j\in\mathbb{N}\cup\{0\},\\ x^2+y^2,\ x\in Q.\end{cases}$
4.2	$\{(x,y)\mid 0\le x\le\ ,\ 0\le y\le\ ,\ x<y\}$	$\begin{cases}2^k,\ x\in\left[\frac{1}{3^{k+1}},\frac{1}{3^k}\right[\setminus K,\\ x+y,\ x\in K.\end{cases}$
4.3	$\{(x,y)\mid 0\le x\le\ ,\ 0\le y\le\ \}$	$\begin{cases}x^2y^2,\ y<x^2,\\ xy,\ y\ge x^2,\ x\notin Q,\\ e^{(x+y)},\ y\ge x^2,\ x\in Q.\end{cases}$

4.4	$\{(x,y)\mid \frac{1}{8}\le x\le\ ,$ $\frac{1}{16}\le y\le\ ,\ y<x^2\}$	$\begin{cases} k^2+j,\ x\in\left[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right[\setminus K, \\ \qquad y\in\left[\frac{1}{4^j},\frac{1}{4^{j-1}}\right[,\ k,j=3,4,..., \\ xy,\ x\in K. \end{cases}$
4.5	$\{(x,y)\mid 0\le x\le\ ,$ $0\le y\le\ ,\ y<x^2\}$	$\begin{cases} x+y,\ x\notin Q, y\notin K, \\ xy,\ x\in Q,\ y\in K, \\ e^x,\ x\notin Q,\ y\in K, \\ \sin(x^2+y^2),\ x\in Q,\ y\notin K. \end{cases}$
4.6	$\{(x,y)\mid y^2\le x<\ \}$	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x+y}}, x\notin K, \\ tg(x-y), x\in K, \end{cases}$
4.7	$\{(x,y)\mid y<x^2, \lvert x\rvert\le\ \}$	$\begin{cases} (-1)^k,\ x\in\left(\left[\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}\right[\setminus Q\right)\cup\left[\frac{-1}{3^k},\frac{-1}{3^{k+1}}\right[, \\ (\sin x)^2, -y, x\in Q\cap[0,1]. \end{cases}$
4.8	$\{(x,y)\mid x+y<\ , \lvert x\rvert\le\ , \lvert y\rvert\le\ \}$	$\begin{cases} x-y, \lvert x\rvert+\lvert y\rvert\le 1, \\ 1, \lvert x\rvert+\lvert y\rvert>1,\ x\notin Q, \\ \cos x, \lvert x\rvert+\lvert y\rvert>1,\ x\in Q. \end{cases}$
4.9	$\{(x,y)\mid \lvert x\rvert+\ y\rvert>\ , 0\le x\le\ ,$ $-\ \le y\le\ \}$	$\begin{cases} 2^k,\ x\in\left[\frac{1}{3^{k+1}},\frac{1}{3^k}\right[\setminus K,\ y\notin Q, \\ \sin y,\ x\in K, \\ e^{\sqrt{x^2+y^2}},\ y\in Q. \end{cases}$
4.10	$\{(x,y)\mid x^2<y\le\ \}$	$\begin{cases} k+j,\ y\in\left[\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}\right[, x\in\left[\frac{1}{3^{j+1}},\frac{1}{3^j}\right[\setminus K, \\ x^2,\ x\in K. \end{cases}$
4.11	$\{(x,y)\mid \lvert x-\ \rvert+\ y-\ \rvert\le\ \}$	$\begin{cases} \frac{1}{xy}, x\notin K, y\notin Q, \\ 1, x\in K, y\in Q. \end{cases}$

4.12	$\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\ ,\ y>\ \}$	$\begin{cases} x+y^3,\ x\in[0,1]\setminus K, \\ x^3+y,\ x\in[-1,0]\setminus Q, \\ xy,\ x\in K\cup(Q\cap[-1,0]), \end{cases}$

5. Доказать существование и вычислить $\int\limits_A f d\mu$, где $A=[0,1]\times[0,1]$, μ — плоская мера Лебега.

№	F	№	f	№	F
5.1	$\begin{cases} xy,\ x+\ \in\ ; \\ +\ ,\ x+\ \notin \end{cases}$	5.2	$\begin{cases} ,\ \frac{x}{y+1}\in\ ; \\ \sin y,\ \frac{x}{y+1}\notin \end{cases}$	5.3	$\begin{cases} ,\ x-\ \in\ ; \\ y^3,\ x-\ \notin \end{cases}$
5.4	$\begin{cases} y,\ y\in\ ; \\ -\ ,\ y\notin \end{cases}$	5.5	$\begin{cases} ,\ \frac{1}{y}\in\ ; \\ 2-\ ,\ \frac{1}{y}\notin \end{cases}$	5.6	$\begin{cases} \frac{x}{\ln y},\ x\in\ ; \\ x-\ ,\ x\notin \end{cases}$
5.7	$\begin{cases} x^2,\ \frac{x}{y}\in N \\ \frac{1}{2+\ },\ \frac{x}{y}\notin N \end{cases}$	5.8	$\begin{cases} \frac{\ln x}{\ln y},\ (x,y)\in\ \times\ ; \\ y^2,\ (x,y)\notin\ \times \end{cases}$	5.9	$\begin{cases} \frac{y}{\ln y},\ x^2-\ \in \\ \frac{-}{+},\ x^2-\ \notin \end{cases}$
5.10	$\begin{cases} n\,x,\ \frac{x^2}{y}\in N \\ \frac{+}{+},\ \frac{x^2}{y}\notin N \end{cases}$	5.11	$\begin{cases} os\,x,\ x^2y\in\ ; \\ \frac{+}{\sqrt{x}},\ x^2y\notin \end{cases}$	5.12	$\begin{cases} gx,\ x^3+\ \in \\ \sqrt{xy},\ x^3+\ \notin \end{cases}$
5.13	$\begin{cases} tgx,\ \frac{x}{y^2}\in N \\ \sqrt{\frac{x}{y}},\ \frac{x}{y^2}\notin N \end{cases}$	5.14	$\begin{cases} \frac{gx}{x},\ \frac{x}{y^3}\in N \\ \frac{y}{\sqrt{x}},\ \frac{x}{y^3}\notin N \end{cases}$	5.15	$\begin{cases} ,\ xy\in\ ; \\ y,\ xy\notin \end{cases}$

6. Пусть f – интегрируемая, а g и h — измеримые на множестве E функции. Что можно сказать об интегрируемости функций g и h, если:

6.1. $f = g + h$;
6.2. $f = g - h$;
6.3. $f = g + h$, где g и h — неотрицательные на E функции;
6.4. $f = g + h$, где g и h — неположительные на E функции;
6.5. $f = g + h$, где g — интегрируемая на E функция;
6.6. $g = h = f^2$;
6.7. $g = h = f^2$ и f — ограниченная на E функция;
6.8. $g = h = f^2$ и $\mu(E) < +\infty$;
6.9. $g = h = f^3$;
6.10. $g = h = f^3$ и f — ограниченная на E функция;
6.11. $g = h = f^3$ и f — ограниченная, неотрицательная на E функция;
6.12. $g = h = f^3$, $\mu(E) < +\infty$ и f — ограниченная на E функция;
6.13. $g = h = f^3$, $\mu(E) < +\infty$.

7. Пусть f и g – интегрируемые на множестве E функции.

7.1. Пусть $\int\limits_A f d\mu = 0$ для любого $A \subset E$. Следует ли отсюда, что $f(x) = 0$ всюду на E?

7.2. Пусть $\int\limits_E f d\mu = 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) = 0$ почти всюду на E?

7.3. Пусть $\int\limits_A f d\mu = 0$ для любого $A \subset E$. Доказать, что $f(x) = 0$ почти всюду на E.

7.4. Пусть $\int\limits_E f d\mu \geq 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) \geq 0$ почти всюду на E?

7.5. Пусть $\int\limits_A f d\mu \geq 0$ для любого $A \subset E$. Доказать, что $f(x) \geq 0$ почти всюду на E.

7.6. Пусть $\int\limits_A f d\mu \geq \int\limits_A g d\mu$ для любого $A \subset E$. Доказать, что $f(x) \geq g(x)$ почти всюду на E.

7.7. Пусть $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_E g d\mu$. Следует ли отсюда, что $f(x) = g(x)$ почти всюду на E?

7.8. Пусть $\int\limits_E f d\mu \geq \int\limits_E g d\mu$. Следует ли отсюда, что $f(x) \geq g(x)$ почти всюду на E?

7.9. Пусть $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A g d\mu$ для любого $A \subset E$. Доказать, что $f(x) = g(x)$ почти всюду на E.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Интеграл Лебега- Стилтьеса

Необходимые понятия и теоремы: Мера Лебега-Стилтьеса, свойства порождающей эту меру функции, мера Лебега-Стилтьеса одноточечного множества, абсолютно непрерывные меры, интеграл Лебега-Стилтьеса, формула для его вычисления (теорема существования).

Литература:[4] стр. 356-375, [5] стр.202-218.

1. Пусть $X = \mathbf{R}$, μ — мера Лебега-Стилтьеса на $\mathbf{R}$,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ 1, & 0 < \quad \leq 2; \\ 5, & 2 < \quad \leq 3; \\ 7, & t > 3 \end{cases}$$

— ее порождающая функция. Вычислить $\int\limits_R f(x) d\mu \;\, x)$.

1.1	$f(x) = e^{x}$	1.2	$f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$
1.3	$f(x) = \dfrac{\sin x}{\lvert x\rvert+1}$	1.4	$f(x) = \dfrac{\cos x}{\lvert x\rvert+1}$
1.5	$f(x) = x^{3}$	1.6	$f(x) = x^{4}$
1.7	$f(x) = \ln(\lvert x\rvert + 1)$	1.8	$f(x) = x^{2} + e^{x}$
1.9	$f(x) = \lvert x\rvert + 1$	1.10	$f(x) = \dfrac{e^x}{\lvert x\rvert+1}$

1.11	$f(x) = \lvert x\rvert + \sin x$	1.12	$F(x) \equiv 1$
1.13	$f(x) = x^2 + 3x + 4$	1.14	$f(x) = \cos(e^x + 1)$
1.15	$f(x) = (\sin 2x)(x^2 + 1)$	1.16	$f(x) = 2^x + \cos x$

2. Проверить, что заданная на отрезке $[a,b]$ функция g не убывает и непрерывна слева в каждой точке . Рассмотреть меру Лебега-Стилтьеса, порожденную функцией g. Найти: а) меру каждого одноточечного множества; б) меру канторово множества K и множества рациональных чисел; в) интеграл $\int\limits_{[a,b[} f d\mu_g$, если он существует.

Если g — кусочно непрерывно-дифференцируемая функция, имеющая точки разрыва $t_1, t_2, \ldots, t_n$, и f — интегрируемая функция, то при вычислении интеграла можно использовать формулу:

$$\int\limits_{[a,b[} f(t)d\mu_g(t) = \int\limits_{[a,b[} f(t)g'(t)d\mu_g(t) + \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left[g(t_k + 0) - g(t_k)\right].$$

№	a	b	$g(t)$	$f(t)$
2.1	−1	5	$\begin{cases} -1, t \in \left[-1, \frac{1}{12}\right], \\ t^4, t \in \left]\frac{1}{12}, 2\right], \\ t + 14, t \in]2,5]. \end{cases}$	$\begin{cases} 2^n, t \in \left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right[\setminus K, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ e^{\sin t}, t \in K, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{10 - t}}, t \in [-1,0[\cup]1,5[. \end{cases}$
2.2	0	3	$\begin{cases} t^3, t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ t + 1, t \in \left]\frac{1}{4}, 2\right], \\ 5, t \in]2,3]. \end{cases}$	$\begin{cases} 3^n, t \in \left[\frac{1}{5^{n+1}}, \frac{1}{5^n}\right[\setminus K, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ arctg t, t \in K, \\ t \ln t, t \in]1,3[. \end{cases}$

2.3	$-\frac{\pi}{2}$	π	$\begin{cases} t^3, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{1}{12}\right[, \\ t+2, t\in\left]\frac{1}{4},2\right], \\ 5, t\in]2,\pi]. \end{cases}$	$\begin{cases} (-1)^n, t\in\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right[\setminus K, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \\ e^{\arcsin t}, t\in K, \\ t\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\cup]1,\pi[. \end{cases}$
2.4	-2	1	$\begin{cases} 1, t\in\left[-2,\frac{1}{4}\right], \\ t^2+1, t\in\left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[, \\ t+2, t\in\left]\frac{1}{2},1\right]. \end{cases}$	$\begin{cases} 3^n, t\in\left[\frac{1}{6^{n+1}},\frac{1}{6^n}\right[\setminus K, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \\ e^{\sin t}, t\in K, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}}, t\in[-2,0[. \end{cases}$
2.5	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} -1, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{1}{12}\right], \\ 2t^2+1, t\in\left]\frac{1}{121},1\right[, \\ t+4, t\in\left]1,\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$	$\begin{cases} (-1)^n, t\in\left[\frac{1}{(n+1)},\frac{1}{n}\right]\setminus K, n\in\mathbb{N}, \\ t^{100}, t\in K, \\ \sqrt{\cos t-(\cos t)^3}, t\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\cup\left]1,\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$
2.6	$-\pi$	π	$\begin{cases} -1, t\in[-\pi,0[, \\ t^2, t\in\left]0,\frac{1}{4}\right], \\ t, t\in\left]\frac{1}{4},\pi\right]. \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{n}, t\in\left[\frac{1}{(n+1)},\frac{1}{n}\right]\setminus K, n\in\mathbb{N}, \\ t\ln t, t\in K, \\ \left(\sin\frac{t}{2}\right)^2, t\in[-\pi,0]\cup]1,\pi]. \end{cases}$
2.7	0	$\sqrt{3}$	$\begin{cases} -2, t\in\left[0,\frac{1}{3}\right], \\ t^2, t\in\left]\frac{1}{3},\sqrt{2}\right], \\ t+2, t\in]\sqrt{2},\sqrt{3}[. \end{cases}$	$\begin{cases} n, t\in\left[1-\frac{1}{2^{n+1}},1-\frac{1}{2^n}\right[\setminus K, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \\ t\cdot tgt, t\in K, \\ \frac{1}{1+t^2}, t\in]1,\sqrt{3}[. \end{cases}$
2.8	-1	2	$\begin{cases} -1, t\in[-1,0], \\ t^2, t\in\left]0,\frac{1}{12}\right], \\ t+1, t\in\left]\frac{1}{12},2\right[. \end{cases}$	$\begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, t\in\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right[\setminus K, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \\ (\sin t)^{100}, t\in K, \\ \frac{\lvert t\rvert}{1+t^2}, t\in[-1,0]\cup]1,2[. \end{cases}$

2.9	1	2	$\begin{cases} t^2, t\in \left[1,\frac{3}{2}\right[, \\ t+2, t\in \left[\frac{3}{2},2\right] \end{cases}$	$\begin{cases} 2^t, t\in [1,2]\setminus Q, \\ \sin t, t\in [1,2[\cap Q. \end{cases}$
2.10	-3π	π	$\begin{cases} 2t+1, t\in [-3\pi,1[, \\ t+4, t\in [1,\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} \cos t\, 2^{\sin t}, t\in [-3\pi,\pi]\setminus Q, \\ t^2, t\in [-3\pi,\pi]\cap Q. \end{cases}$
2.11	0	1	$\begin{cases} t^2, t\in \left[0,\frac{1}{2}\right[, \\ t+1, t\in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$	$\begin{cases} 2^t, t\in [0,1]\cap Q, \\ \arccos t, t\in [0,1]\setminus Q. \end{cases}$
2.12	$\frac{1}{e}$	e	$\begin{cases} 2+3t^3, t\in \left[\frac{1}{e},1\right[, \\ t+6, t\in [1,e] \end{cases}$	$\begin{cases} arctg t, t\in \left[\frac{1}{e},e\right]\cap Q, \\ \lvert\ln t\rvert, t\in \left[\frac{1}{e},e\right]\setminus Q. \end{cases}$
2.13	-1	1	$\begin{cases} t^5, t\in \left[-1,\frac{1}{2}\right[, \\ t+3, t\in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$	$\begin{cases} e^{t^2}, t\in [-1,1]\cap Q, \\ \frac{1}{t+2}, t\in [-1,1]\setminus Q. \end{cases}$
2.14	0	e	$\begin{cases} t+2, t\in \left[0,\frac{3}{2}\right[, \\ 5+\ln t, t\in \left[\frac{3}{2},e\right] \end{cases}$	$\begin{cases} (\sin t)^3, t\in [0,e]\cap Q, \\ t\ln t, t\in [0,e]\setminus Q. \end{cases}$
2.15	1	9	$\begin{cases} e^t, t\in [1,2[, \\ t+9, t\in [2,9] \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{t^2-1}{t^4+1}, t\in [1,9]\cap Q, \\ 2t, t\in [1,9]\setminus Q. \end{cases}$
2.16	-1	1	$\begin{cases} \sin\frac{\pi t}{2}, t\in [-1,0[, \\ t+2, t\in [0,1] \end{cases}$	$\begin{cases} (arctg t)^2, t\in [-1,1]\cap Q, \\ t, t\in [-1,1]\setminus Q. \end{cases}$
2.17	0	1	$\begin{cases} \varphi(t), t\in \left[0,\frac{1}{13}\right[, \\ \frac{3}{4}, t\in \left[\frac{1}{13},\frac{1}{2}\right[, \\ t^2-t+1, t\in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$	$\begin{cases} [18t], t\in \left[0,\frac{1}{2}\right[, \\ \frac{1}{2t-1}, t\in \left[\frac{1}{2},1\right]\setminus Q, \\ e^t, t\in \left[\frac{1}{2},1\right]\cap Q. \end{cases}$

2.18	0	1	$\begin{cases} t, t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{3}{4}, t \in [\frac{1}{2}, \frac{8}{9}), \\ \varphi(t), t \in [\frac{8}{9}, 1]. \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, t \in (0, \frac{1}{2}] \setminus Q, \\ 1, t \in [0, \frac{1}{2}] \cap Q, \\ [9t], t \in (\frac{1}{2}, 1] \cap K, \\ t^2, t \in (\frac{1}{2}, 1] \setminus K. \end{cases}$
2.19	0	1	$\begin{cases} \varphi(t), t \in [0, \frac{7}{36}), \\ \frac{1}{2}, t \in [\frac{7}{36}, \frac{3}{4}), \\ t, t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$	$\begin{cases} [27t], t \in [0, \frac{4}{5}] \cap K, \\ t^2, t \in [0, 1] \setminus K, \\ t^3, t \in (\frac{4}{5}, 1] \cap K. \end{cases}$
2.20	0	1	$\begin{cases} \varphi(t), t \in [0, \frac{2}{13}), \\ \frac{1}{2}, t \in [\frac{2}{13}, \frac{3}{4}), \\ t^2 + 1, t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$	$\begin{cases} [27t], t \in [0, \frac{1}{2}] \cap K, \\ -1, t \in [0, \frac{1}{2}] \setminus K, \\ t^{-1}, t \in (\frac{1}{2}, 1] \setminus (Q \cap K), \\ t^2, t \in (\frac{1}{2}, 1] \cap Q \cap K. \end{cases}$
2.21	0	1	$\begin{cases} t^3, t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}, t \in [\frac{1}{2}, \frac{27}{36}), \\ \varphi(t), t \in [\frac{27}{36}, 1]. \end{cases}$	$\begin{cases} [\frac{1}{t}], t \in (0, \frac{1}{2}] \setminus Q, \\ [\frac{1}{t^2+1}], t \in [0, \frac{1}{2}] \cap Q, \\ [18t], t \in (\frac{1}{2}, 1] \cap K, \\ t, t \in (\frac{1}{2}, 1] \setminus K. \end{cases}$
2.22	0	1	$\begin{cases} t^4, t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}, t \in [\frac{1}{2}, \frac{26}{36}), \\ \varphi(t), t \in [\frac{26}{36}, 1]. \end{cases}$	$\begin{cases} [\frac{1}{\sin t}], t \in (0, \frac{1}{2}), \\ [9t], t \in [\frac{1}{2}, 1] \cap K, \\ t, t \in [\frac{1}{2}, 1] \setminus K. \end{cases}$
2.23	0	1	$\begin{cases} t^2, t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{3}, t \in [\frac{1}{2}, \frac{25}{36}), \\ \varphi(t), t \in [\frac{25}{36}, 1]. \end{cases}$	$\begin{cases} [ctg\, t], t \in (0, \frac{1}{2}), \\ 0, t = 0, \\ [18t], t \in [\frac{1}{2}, 1] \cap K, \\ t^2, t \in [\frac{1}{2}, 1] \setminus K. \end{cases}$

2.24	0	1	$\begin{cases}\varphi(t), t\in\left[0,\frac{11}{36}\right],\\ \frac{1}{2}, t\in\left]\frac{11}{36},\frac{1}{2}\right],\\ 2t^2, t\in\left]\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$	$\begin{cases}[10t], t\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ \exp t^2, t\in\left]\frac{1}{2},1\right]\setminus Q,\\ \frac{1}{t}, t\in\left]\frac{1}{2},1\right]\cap Q.\end{cases}$
2.25	0	1	$\begin{cases}\varphi(t), t\in\left[0,\frac{7}{36}\right],\\ \frac{1}{2}, t\in\left]\frac{11}{36},\frac{3}{4}\right],\\ t, t\in\left]\frac{3}{4},1\right].\end{cases}$	$\begin{cases}[7t], t\in\left[0,\frac{4}{5}\right]\cap K,\\ t^2, t\in[0,1]\setminus K,\\ t^3, t\in\left]\frac{4}{5},1\right]\cap K.\end{cases}$

Где $\varphi(t)$ — канторова лестница,

$[t]$ — целая часть действительного числа t.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Необходимые понятия и теоремы: Интеграл Лебега, теоремы Лебега, Леви, Фату, равномерно сходящиеся функциональные последовательности, поточечно сходящиеся функциональные последовательности, почти всюду сходящиеся функциональные последовательности.

Литература:[1] стр. 53-60, [4] стр. 302-306, [5] стр.119-121.

Во всех задачах рассматривается линейная мера Лебега.

1. Проверить, является ли последовательность функций $\{f_n\}$, заданных на отрезке [0,2], сходящейся равномерно, поточечно, почти всюду на этом отрезке к функции $f \equiv 0$.

1.1	$f_n(t)=\begin{cases}2, t\in\left]\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right[;\\ 0, t\in[0,2]\setminus\left]\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right[\end{cases}$	1.2	$f_n(t)=\begin{cases}2t, t\in\left[0,\frac{1}{n}\right];\\ \frac{2n(t+1)}{2n^2+1}, t\in\left]\frac{1}{n},2\right]\end{cases}$
1.3	$f_n(t)=\cos^n \pi t$	1.4	$f_n(t)=\sin^n \pi t$

1.5	$f_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, \ t \in \ 0,2] \setminus Q; \\ {}^{n}, \ t \in 0,2] \cap \end{cases}$	1.6	$f_n(t) = \begin{cases} t, \ t \in \ 0,2] \cap \ ); \\ \frac{\text{in}\, nt}{n}, \ t \in 0,2] \setminus Q \end{cases}$
1.7	$f_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, \ t \in \ 0,2] \setminus Q; \\ , \ t \in 0,2] \cap \end{cases}$	1.8	$f_n(t) = \begin{cases} , \ t \in \ 0, \frac{1}{n}[; \\ \left(\frac{t}{2}\right)^{n}, \ t \in \ \frac{1}{n}, 2] \end{cases}$
1.9	$f_n(t) = \begin{cases} 2^n t, \ t \in \ \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}[; \\ \left(\frac{t}{2}\right)^{n}, t \in \ \frac{1}{2^{n+1}}, 2]; \\ 0, t \in \ 0, \frac{1}{2^{n+1}}[\end{cases}$	1.10	$f_n(t) = \begin{cases} \frac{k}{2}, \ t \in \ \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[, k \le n; \\ \frac{(2k+1)}{(2n+1)} t, t \in \ \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[, \\ 1, t \in \ 0\} \cup \ 1,2] \end{cases}$
1.11	$f_n(t) = \frac{2^n t^n - {}^{2n}}{2^{2n}}$	1.12	$f_n(t) = \ 1 + D(t))^n +$
1.13	$f_n(t) = \begin{cases} n, t \in [0, \frac{1}{n}[; \\ \sin\frac{\pi}{n}, t \in [\frac{1}{n}, 2] \end{cases}$	1.14	$f_n(t) = \begin{cases} \frac{\text{in}\, nt}{n}, \ t \in \ 0,1] \setminus Q; \\ 2 - \ )^n, t \in \ 1,2]; \\ n(t+1), t \in \ 0,1[\cap \end{cases}$

2. Проверить выполнение условий теоремы и теоремы Б.Леви для последовательности функций $f_n(t)$, заданных на отрезке [0,1]. Можно ли утверждать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)dx = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \, ?$$

2.1	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0; \\ ,t\in 0,2^{-}\ \ ]; \\ ,t\in 2^{-}\ \ ,2^{-\ \ +1}], \\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$	2.2	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0; \\ ^{2},t\in 0,2^{-}\ \ ]; \\ ^{2},t\in 2^{-}\ \ ,2^{-\ \ +1}], \\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$
2.3	$f_n(t)=\begin{cases},t\in\ 0,2^{-}\ \ ]; \\ ,t\in 2^{-}\ \ ,2^{-\ \ +1}], \\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$	2.4	$f_n(t)=\begin{cases}^{2},t\in\ 0,2^{-}\ \ ]; \\ ^{2},t\in 2^{-}\ \ ,2^{-\ \ +1}], \\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$
2.5	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0; \\ ^{2},t\in 0,\frac{1}{n}]; \\ ^{2},t\in \frac{1}{k},\frac{1}{k-1}], \\ \qquad k=2,3,\ldots,n\end{cases}$		$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0; \\ ,t\in 0,\frac{1}{n}]; \\ ,t\in \frac{1}{k},\frac{1}{k-1}], \\ \qquad k=2,3,\ldots,n\end{cases}$
2.7	$f_n(t)=\frac{2n}{n+1}\chi_{1/n,1]}(t)$	2.8	$f_n(t)=\ \mathrm{os}(\frac{\pi}{2n}t)\chi_{1/n,1]}(t)$
2.9	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0; \\ \mathrm{os}\frac{\pi}{2n}t,t\in 0,\frac{1}{n}]; \\ 1,t\in \frac{1}{n},1]\end{cases}$	2.10	$f_n(t)=\begin{cases}\mathrm{in}\frac{\pi}{2n+2}t,t\in\ 0,2^{-}\ \ ]; \\ \sqrt{k},t\in 2^{-}\ \ ,2^{-\ \ +1}], \\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$
2.11	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0; \\ \cos\frac{\pi}{2n}t,t\in 0,3^{-}\ \ ]; \\ ^{2},t\in 3^{-}\ \ ,3^{-\ \ +1}], \\ \qquad k=1,2,\ldots,n\end{cases}$	2.12	$f_n(t)=\begin{cases}0,\ t=0; \\ ,t\in 0,\frac{1}{n}]; \\ ,t\in \frac{1}{k},\frac{1}{k-1}],k=2,3,\end{cases}$

2.13	$f_n(t)=\begin{cases} t, t\in\ 0{,}2^{-}\ \ ]; \\ {}^{2}, t\in 2^{-}\ \ ,2^{-}\ {}^{+1}], \\ \quad k=1{,}2{,}\ldots,n \end{cases}$	2.14	$f_n(t)=\begin{cases} {}^{2}, t\in\ 0{,}4^{-}\ \ ]; \\ 4^{k}, t\in 4^{-}\ \ ,4^{-}\ {}^{+1}], \\ \quad k=1{,}2{,}\ldots,n \end{cases}$

3. Для последовательности функций $\{f_n\}$, определенных на отрезке [0,1], проверить применимость теорем Лебега о предельном переходе и Фату. Найти и сравнить интегралы

$$\int\limits_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx, \qquad \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0,1]} f_n(x)dx$$

3.1	$f_n(t)=\begin{cases} {}^{2},\ t\in\ 0{,}2^{-}\ \ ]; \\ {}^{2},\ t\in 2^{-}\ \ ,1] \end{cases}$	3.2	$f_n(t)=\begin{cases} 3^{n},\ t\in\ 0,e^{-2n}]; \\ {}^{t},\ t\in\ \ {}^{-2n},1] \end{cases}$
3.3	$f_n(t)=\begin{cases} {}^{2},\ t\in\ 0{,}2^{-}\ \ ]; \\ {}^{3},\ t\in 2^{-}\ \ ,1] \end{cases}$	3.4	$f_n(t)=\begin{cases} 2^{n},\ t\in\ 4^{-}\ {}^{-1},4^{-}\ \ ]; \\ ,\ t\in\ 0{,}4^{-}\ {}^{-1}[\cup\ 4^{-}\ \ ,1 \end{cases}$
3.5	$f_n(t)=\begin{cases} \sqrt{n},\ t\in\ \dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}]; \\ {}^{3},\ t\in\ 0,\dfrac{1}{n+1}[\cup\ \ \dfrac{1}{n},1] \end{cases}$	3.6	$f_n(t)=\begin{cases} {}^{4},\ t\in\ 2^{-}\ {}^{-1},2^{-}\ \ ]; \\ 2^{t},\ t\in\ 0{,}1]\setminus[2^{-}\ {}^{-1},2^{-} \end{cases}$
3.7	$f_n(t)=\begin{cases} ,\ t\in\ 0{,}3^{-}\ \ [; \\ {}^{t},\ t\in\ 3^{-}\ \ ,1] \end{cases}$	3.8	$f_n(t)=\begin{cases} {}^{3},\ t\in\ 0{,}2^{-}\ \ ]; \\ {}^{2},\ t\in 2^{-}\ \ ,1] \end{cases}$
3.9	$f_n(t)=\begin{cases} {}^{2},\ t\in\ 3^{-}\ {}^{-1},3^{-}\ \ ]; \\ {}^{2},\ t\in\ 0{,}1]\setminus[3^{-}\ {}^{-1},3^{-}\ \ ] \end{cases}$	3.10	$f_n(t)=\begin{cases} ,\ t\in\ 0,e^{-}\ \ ]; \\ {}^{4},\ t\in\ \ {}^{-}\ \ ,1] \end{cases}$

3.11	$f_n(t)=\begin{cases}\frac{n}{\sqrt{t}},\ t\in\ 0,2^{-}\ \ ];\\ ^{t},\ t\in 2^{-}\ \ ,1]\end{cases}$	3.12	$f_n(t)=\begin{cases}3^n,\ t\in\ \frac{1}{5^{n+1}},\frac{1}{5^n}];\\ ,\ t\in\ 0,1]\setminus[\frac{1}{5^{n+1}},\frac{1}{5^n}]\end{cases}$
3.13	$f_n(t)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2n}t,\ t\in\ 0,3^{-}\ \ [;\\ ^{2},\ t\in\ 3^{-}\ \ ,1]\end{cases}$	3.14	$f_n(t)=\begin{cases}2^n,\ t\in\ \frac{1}{4^{n+1}},\frac{1}{4^n}];\\ 2^t,\ t\in\ 0,1]\setminus[\frac{1}{4^{n+1}},\frac{1}{4^n}\end{cases}$

4. Показать, что f_n не сходится равномерно на [0,1]. Найти поточечный предел последовательности f_n, если он существует. Если нет, найти $\lim\limits_{n\to} f_n$ почти всюду. Выяснить какие из теорем о предельном переходе Лебега, Леви, Фату применимы к последовательности f_n. Найти и сравнить интегралы

$$\int\limits_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx,\qquad \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0,1]} f_n(x)dx.$$

№	$f_n(t)$	№	$f_n(t)$
4.1	$\begin{cases}n^3,t\in\left[0,\frac{1}{3^n}\right],\\ t^5,t\in\left]\frac{1}{3^n},1\right].\end{cases}$	4.2	$\begin{cases}2^n,t\in\left[0,\frac{1}{8^n}\right[,\\ e^t,t\in\left[\frac{1}{8^n},1\right].\end{cases}$
4.3	$\begin{cases}n,t\in\left[0,\frac{1}{2^n}\right[,\\ t^n,t\in\left[\frac{1}{2^n},1\right].\end{cases}$	4.4	$\begin{cases}3^n,t\in\left[\frac{1}{4^{n+1}},\frac{1}{4^n}\right],\\ \sqrt{t^3},t\in\left[0,\frac{1}{4^{n+1}}\right[\cup\left]\frac{1}{4^n},1\right].\end{cases}$
4.5	$\begin{cases}n^2,t\in\left]\frac{1}{3^{n+1}},\frac{1}{3^n}\right[,\\ e^{-t},t\in\left[0,\frac{1}{3^{n+1}}\right]\cup\left[\frac{1}{3^n},1\right].\end{cases}$	4.6	$\begin{cases}\sqrt[3]{n},t\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right],\\ t^3,t\in\left[0,\frac{1}{n+1}\right[\cup\left]\frac{1}{n},1\right].\end{cases}$

4.7	$\begin{cases} n^2+n, t\in\left[\frac{1}{3^{n+1}},\frac{1}{3^n}\right[\cup\{0\}, \\ \ln t, t\in\left]0,\frac{1}{3^{n+1}}\right[\cup\left[\frac{1}{3^n},1\right]. \end{cases}$	4.8	$\begin{cases} \frac{n}{\sqrt{t}}, t\in\left]0,\frac{1}{3^n}\right[, \\ \sin t, t\in\left[\frac{1}{3^n},1\right]\cup\{0\}. \end{cases}$
4.9	$\begin{cases} n^4, t\in\left[\frac{1}{4^n},\frac{1}{4^{n-1}}\right], \\ t^4, t\in\left[0,\frac{1}{4^n}\right[\cup\left]\frac{1}{4^{n-1}},1\right]. \end{cases}$	4.10	$\begin{cases} \frac{2^n}{t}, t\in\left[\frac{1}{3^{n+1}},\frac{1}{3^n}\right[\cup\{0\}, \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, t\in\left]0,\frac{1}{3^{n+1}}\right[\cup\left[\frac{1}{3^n},1\right]. \end{cases}$
4.11	$\begin{cases} n, t\in\left[\frac{1}{(n+1)^2},\frac{1}{n^2}\right], \\ \sin t, t\in\left[0,\frac{1}{(n+1)^2}\right[\cup\left]\frac{1}{n^2},1\right]. \end{cases}$	4.12	$\begin{cases} nt, t\in\left[0,\frac{1}{n}\right], \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, t\in\left]\frac{1}{n},1\right]. \end{cases}$
4.13	$\begin{cases} \frac{1}{t^2+n^{-2}}, t\in\left[0,\frac{1}{n^4}\right], \\ n, t\in\left]\frac{1}{n^4},\frac{1}{(n-1)^4}\right], \\ e^t, t\in\left]\frac{1}{(n-1)^4},1\right]. \end{cases}$	4.14	$\begin{cases} \frac{1}{(t+n^{-1})^2}, t\in\left[0,\frac{1}{n^2}\right], \\ n^2, t\in\left]\frac{1}{n^2},\frac{1}{n^2-1}\right], \\ t^n, t\in\left]\frac{1}{n^2-1},1\right]. \end{cases}$
4.15	$\begin{cases} \frac{1}{t+n^{-1}}, t\in\left[0,\frac{1}{n}\right], \\ n, t\in\left]\frac{1}{n},\frac{1}{(n-1)}\right], \\ (\sin 100t)^{2n}, t\in\left]\frac{1}{(n-1)},1\right]. \end{cases}$	4.16	$\begin{cases} 0, t=0, \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, t\in\left]0,\frac{1}{(n+1)^2}\right], \\ n, t\in\left]\frac{1}{(n+1)^2},\frac{1}{n^2}\right], \\ \sin t, t\in\left]\frac{1}{n^2},1\right]. \end{cases}$
4.17	$\begin{cases} \frac{1}{(t^2+n^{-1})^2}, t\in\left[0,\frac{1}{n}\right], \\ n, t\in\left]\frac{1}{n},\frac{1}{(n-1)}\right], \\ e^t, t\in\left]\frac{1}{(n-1)},1\right]. \end{cases}$	4.18	$\begin{cases} \frac{1}{t+n^{-1}}, t\in\left[0,\frac{1}{n+1}\right], \\ \ln n, t\in\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right], \\ 1, t\in\left]\frac{1}{n},1\right]. \end{cases}$

4.19	$\begin{cases} \dfrac{1}{t^2+n^{-2}}, t \in \left[0, \dfrac{1}{n^3}\right], \\ n, t \in \left(\dfrac{1}{n^3}, \dfrac{1}{(n-1)^3}\right], \\ e^t, t \in \left(\dfrac{1}{(n-1)^3}, 1\right]. \end{cases}$	4.20	$\begin{cases} \dfrac{1}{t+n^{-1}}, t \in \left[0, \dfrac{1}{n^2}\right], \\ n^2, t \in \left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n^2-1}\right], \\ t^n, t \in \left(\dfrac{1}{n^2-1}, 1\right]. \end{cases}$