Лабораторная работа № 1

1. Метрические пространства

1.1. Является ли данная функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ метрикой на данном множестве *X*?

Вариант	*X*	$\rho(x,y)$
1	$C[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)-y(t)\rvert$
2	$B[0,1]$	$\sup\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)-y(t)\rvert$
3	l_∞	$\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\lvert x(k)-y(k)\rvert$
4	l_1	$\sum_{k=1}^{\infty}\lvert x(k)-y(k)\rvert$
5	$C^{(1)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x'(t)-y'(t)\rvert$
6	$R[a,b]$	$\int_a^b \lvert x(t)-y(t)\rvert\,dt$
7	$C^{(1)}[0,1]$	$\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)-y(t)\rvert+\max\limits_{t\in[0,1]}\lvert x'(t)-y'(t)\rvert$
8	l_2	$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lvert x(k)-y(k)\rvert^2\right)^{1/2}$
9	c	$\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\lvert x(k)-y(k)\rvert$
10	$C_L[0,1]$	$\int_a^b \lvert x(t)-y(t)\rvert\,dt$

1.2. Проверить, сходится ли заданная последовательность x_n точек метрического пространства *X* к точке *a*, если выполнены следующие условия

Вариант	X	x_n	a
1	*2*	*3*	*4*
1	$C[0;2]$	$\dfrac{tn^2+1}{n^2+t}$	t
2	$C[0;5]$	$\dfrac{nt^2+n^2t}{n^2t+1}$	1
3	$C[-3;3]$	$\sqrt{t^2+\dfrac{1}{n^3}}$	$\lvert t\rvert$
4	$C[0;8]$	$\left(\dfrac{t}{8}\right)^n-\left(\dfrac{t}{8}\right)^{2n}+t$	t
5	$C[0;1]$	$t^{2n}-t^{n+1}+t$	t

6	$C[1;2]$	$n\left(\sqrt{\frac{1}{n}+t}-\sqrt{t}\right)$	$1/(2\sqrt{t})$
7	$C[0;4]$	$\frac{2tn^2+5}{n^2-t}$	$2t$
8	$C[-3;3]$	$\sqrt{4t^2-\frac{2}{n^4}}$	$\|2t\|$
9	$C[0;1]$	$t^{4n}-t^{2n-1}-t$	$-t$
10	$C[1;3]$	$n\left(\sqrt{\frac{1}{n}+t^2}-t\right)$	$\frac{1}{2t}$

1.3. Является ли заданное отображение $F: X \to Y$:
а) непрерывным;
б) равномерно непрерывным;
в) удовлетворяющим условию Липшица?

Вариант	X	Y	F
1	$C[0;1]$	$C[0;1]$	$(Fx)(t)=x^2\left(\sqrt{t}\right)e^t$
2	$C[-1;1]$	$C[-1;1]$	$(Fx)(t)=\frac{x(t)}{1+x^2(t)}$
3	$L_2[-1;0]$	$L_1[-1;0]$	$(Fx)(t)=\int_{-1}^{0}\frac{tx(s)}{1+x^2(s)}ds$
4	$C[-1;2]$	$L_1[-1;2]$	$(Fx)(t)=\frac{e^{x(t)}}{1+e^{x(t)}}$
5	l_1	l_1	$Fx=(\cos x(1), x(2), x(3),..., x(k),...)$
6	c_0	c_0	$Fx=\left(\operatorname{arctg} x(3), x^2(2), 0, 0, ...\right)$
7	l_2	$\mathbb{R}$	$Fx=\sin x^2(3)+x(2)+2$
8	$L_1[0;1]$	$L_2[-1;1]$	$(Fx)(t)=\int_{-1}^{1}e^t \operatorname{arctg} x(s)ds$
9	$C[-3;1]$	$C[-3;1]$	$(Fx)(t)=\sqrt[4]{\|x(t)\cos x(t)\|}$
10	$C[-2;1]$	$C[-2;1]$	$(Fx)(t)=x^2(t)\cos t$

1.4. Является ли отображение *F* метрического пространства *X* в себя сжимающим? Найти x_3, где $x_{k+1}=F(x_k), x_0=0$. Оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки в случае, если *F* является сжимающим.

Вариант	X	F

1	$l_{8/3}$	$F(x)=\left(0,\dfrac{x(1)}{2}+\dfrac{1}{2},\dfrac{x(2)}{4}+\dfrac{1}{3},...,\dfrac{x(k)}{2^k}+\dfrac{1}{k+1},...\right)$
2	l_∞	$F(x)=(\dfrac{x(2)}{2}+\dfrac{1}{2},\dfrac{x(3)}{3}+\dfrac{1}{4},...,\dfrac{x(k)}{k}+\dfrac{1}{2^{k-1}},...)$
3	$C[-1;1]$	$(Fx)(t)=tx(t)+\exp(\sin\pi t)$
4	l_{21}	$F(x)=(\sin(\pi/6)x(1)+1,...,(\sin(\pi/6))^k x(k)+1/k,...)$
5	$C[-1;1]$	$(Fx)(t)=0,5x(t^2)+t$
6	$L_2[0;1]$	$(Fx)(t)=\dfrac{1}{8}x(\sqrt{t})+1$
7	l_3	$F(x)=\left(1,\dfrac{x(1)}{4},\dfrac{x(2)}{4},,\dfrac{x(3)}{4},...\right)$
8	$C[0;1]$	$(Fx)(t)=0,2\sin x(t)+\sin t$
9	l_4	$F(x)=\left(1,\dfrac{x(3)}{5},\dfrac{x(4)}{6},,\dfrac{x(5)}{7},...\right)$
10	$L_2[0;1]$	$(Fx)(t)=0,2x(\sqrt[3]{t})+21$

1.5 Применим ли принцип сжимающих отображений к заданному интегральному уравнению в пространстве *X* при $\lambda=\lambda_1,\lambda=\lambda_2,\lambda=\lambda_3$? При $\lambda=\lambda_1$ найти приближенное решение с точностью до 0,01 и сравнить его с точным решением.

Вариант	*X*	λ_1	λ_2	λ_3	Уравнение
1	$C[0;1]$	$\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{1}{8}$	$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$	$x(t)=\lambda\int_0^1 t^{1/4}sx(s)ds+t^2$
2	$C[-1;1]$	$\dfrac{1}{8}$	$-\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{2}$	$x(t)=\lambda\int_{-1}^1 (t^2-1)s^2x(s)ds+t$
3	$C[-2;2]$	$\dfrac{1}{45}$	$-\dfrac{1}{40}$	$\dfrac{2}{15}$	$x(t)=\lambda\int_{-2}^2 (1+s)(1-t)x(s)ds+t$

4	$C[-1;1]$	$\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{12}$	1	$x(t)=\lambda\int_{-1}^{1} tsx(s)ds+2$
5	$C[0;1]$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$x(t)=\lambda\int_{0}^{1} t(1+s)x(s)ds-5$
6	$C[-1;1]$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$x(t)=\lambda\int_{-1}^{1} t^2s^2x(s)ds+t^3$
7	$L_2[0;1]$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{8}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$x(t)=\lambda\int_{0}^{1} t^{1/4}sx(s)ds+2t$
8	$C[0;1]$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$x(t)=\lambda\int_{0}^{1} t(3+s)x(s)ds+5\sin t$
9	$L_2[-1;1]$	$\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{20}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$x(t)=\lambda\int_{0}^{1} s^{-1/5}x(s)ds+2t$
10	$C[-2;2]$	$\frac{1}{45}$	$-\frac{1}{40}$	$\frac{2}{15}$	$x(t)=\lambda\int_{-2}^{2} (1+s)(1-t)x(s)ds+\cos t$