ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 17

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Обозначим через D множество всех бесконечно дифференцируемых финитных функций действительного переменного. Это линейное пространство относительно обычных операций сложения числовых функций и умножения их на число. Последовательность $(\varphi_n) \subset D$ называется **сходящейся в *D*** к функции φ из D, если 1) существует конечный интервал, вне которого все φ_n равны нулю; 2) для каждого $k = 0,1,2, ...$ последовательность производных $(\varphi^{(k)})$ порядка k равномерно сходится на **R** к $\varphi^{(k)}$.

Линейное пространство D с такой сходимостью называется **основным пространством**, а его элементы **- основными функциями.**

Обобщенной функцией на R называют линейный функционал f на D, непрерывный в следующем смысле: если последовательность $(\varphi_n) \subset D$ сходится в D к функции φ, то числовая последовательность $(f(\varphi_n))$ сходится к $f(\varphi)$.

Значение обобщенной функции f на основной функции φ часто обозначают (f, φ), а также $(f(x), \varphi(x))$ или $\int f(x)\varphi(x)dx$.

Регулярной обобщенной функцией называют всякий функционал вида

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in D,$$

где f - интегрируемая по Лебегу на каждом конечном интервале числовой прямой функция.

Обобщенная функция, не являющаяся регулярной, называется **сингулярной обобщенной функцией.**

Последовательность обобщенных функций (f_n) называется **сходящейся** к обобщенной функции f, если $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$, $n \to \infty$, для любой основной функции φ.

Сумма обобщенных функций и произведение обобщенной функции на число определяются как соответствующие операции над функционалами.

Возникающее при этом линейное пространство обобщенных функций обозначается D'.

Произведением бесконечно дифференцируемой на **R** функции α и обобщенной функции f называется обобщенная функция αf, задаваемая формулой $(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$.

Производной обобщенной функции f называется обобщенная функция f', определяемая соотношением $(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \varphi \in D$.

Каждая обобщенная функция имеет производные любого порядка; и сходящуюся последовательность обобщенных функций (ряд) можно почленно дифференцировать.

Отметим, что если f интегрируема по Лебегу на (a,b) и $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0$ для любой основной функции φ, то $f(x) = 0$ п.в. на (a,b) (a,b здесь могут принимать и бесконечные значения).

Л и т е р а т у р а: [1], с. 282 - 300; [2], с. 203 - 218.

II.З А Д А Ч И

1. Пусть $\varphi_0 \in D, \varphi_0 \neq 0$. Сходится ли в D последовательность основных функций (φ_n)?

	$\varphi_n(x)$		$\varphi_n(x)$
1.1	$\varphi_0(x)/n$	1.8	$\varphi_0(n-x)/n$
1.2	$\varphi_0(-x)/n^2$	1.9	$(\varphi_0(x) + \varphi_0(-x))/n$
1.3	$\varphi_0(x/n)/n^2$	1.10	$x\varphi_0(nx)$
1.4	$\varphi_0(-nx)/n$	1.11	$x^2\varphi_0(nx)/n$
1.5	$\varphi_0(nx)/n^2$	1.12	$(\varphi_0(x) + \varphi_0(nx))/n$
1.6	$\varphi_0(-x/n^2)/n$	1.13	$(\varphi_0(x) + \varphi_0(x/n))/n$
1.7	$\varphi_0(x + n)/n$	1.14	$x^3\varphi_0(n^2x)/n$

Решение задачи 1.14. Пусть φ_0 сосредоточена на отрезке [-*a*,*a*]. Тогда $\sup|\varphi_n| \le a^3 \sup|\varphi_0|/n \to 0, n \to \infty.$ Следовательно, если φ_n и сходится в *D*, то только к нулевой функции. Рассмотрим функцию $\psi_0(x) := x^3\varphi_0(x) \in D.$ Тогда $\varphi_n(x) = \psi_0(n^2x)/n^7$. Поэтому $\varphi_n^{(4)}(x) = n\psi_0^{(4)}(n^2x)$ и, следовательно, $\sup|\varphi_n^{(4)}| = n\sup|\psi_0^{(4)}|$. Эта последовательность сходится к нулю лишь когда $\psi_0^{(4)} = 0$, т.е. когда ψ_0 – многочлен. Полученное противоречие показывает, что данная последовательность не имеет предела в *D*.

2. Являются ли следующие функционалы в пространстве *D* обобщенными функциями?

2.1	$(f,\varphi) = \varphi(0) - \varphi(1)$	2.8	$(f,\varphi) = v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx$
2.2	$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2+1}dx$	2.9	$(f,\varphi) = \int_0^{\infty}\varphi^2(x)dx$
2.3	$(f,\varphi) = \varphi^2(0)$	2.10	$(f,\varphi) = \int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}dx$
2.4	$(f,\varphi) = \varphi(0) - \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$	2.11	$(f,\varphi) = \varphi(0) + 2\varphi^2(1)$
2.5	$(f,\varphi) = \max\limits_{x\in R}\varphi(x)$	2.12	$(f,\varphi) = \int_0^1\varphi(x)\ln x\,dx$
2.6	$(f,\varphi) = \varphi''(0)$	2.13	$(P\frac{1}{x},\varphi) = \int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx$
2.7	$(f,\varphi) = v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$	2.14	$(P\frac{\cos kx}{x},\varphi) = v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)dx$

Решение задачи 2.14. Убедимся, прежде всего, в существовании этого интеграла

$$(P\frac{\cos kx}{x},\varphi) = v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\cos kx}{x}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\cos kx}{x}\varphi(-x)dx\right) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\cos kx}{x}(\varphi(x)-\varphi(-x))dx = \int_0^{+\infty}\cos kx\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx,$$

ибо $\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} = 2\varphi'(0)$ и, следовательно, последний интеграл абсолютно сходится.

Таким образом, рассматриваемая формула действительно задает функционал на D, линейность которого легко проверяется. Докажем его непрерывность. Пусть $\varphi_n \to 0$ в D. Тогда вне некоторого отрезка $[-a,a]$ все φ_n равны нулю, и последовательность φ_n' равномерно на этом отрезке сходится к нулю. По теореме Лагранжа $(\varphi_n(x)-\varphi_n(-x))/x = 2\varphi'_n(\theta_n)$, где θ_n лежит между x и $-x$. Следовательно,

$$|(P\frac{\cos kx}{x},\varphi_n)| = |\int_0^a \cos kx \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}dx| = |\int_0^a \cos kx\cdot 2\varphi_n'(\theta_n)dx| \le$$

$$\le 2\max_{-a\le\theta\le a}|\varphi_n'(\theta)|\,a \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Мы доказали, что рассматриваемая формула задает обобщенную функцию.

3. Докажите, что следующие обобщенные функции сингулярны.

3.1	$\delta(x)$	3.8	$\delta''(x)$
3.2	$\delta'(x+3)$	3.9	$\delta(x-1) + \delta'(x)$
3.3	$\delta'(x + 2)$	3.10	$2\delta(x + 1)$
3.4	$\delta(x - 1)$	3.11	$-\delta''(x)$
3.5	$e^x\delta(x)$	3.12	$\sin x + \delta(x)$
3.6	$\delta(x) + \delta(x - 1)$	3.13	$e^x + \delta'(x)$
3.7	$\delta(x) + \delta'(x)$	3.14	$\delta(x) + \delta'(x - 1) + \delta''(x - 2)$

Решение задачи 3.14. Допустим противное, т.е. существует такая локально интегрируемая функция f, что при всех φ из D выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) - \varphi'(1) + \varphi''(2). \quad (1)$$

Пусть основная функция ω сосредоточена на отрезке $[-1,1]$ и положительна в нуле. Тогда основная функция $\varphi_n(x) = \omega(nx)$ сосредоточена на отрезке $[-1/n,1/n]$, а потому ограниченная последовательность φ_n стремится к нулю почти всюду. Подставляя в (1) φ_n вместо φ, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_n(x)dx = \omega(0) - n\omega'(n) + n^2\omega''(2n);$$

Следовательно, при достаточно больших n

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_n(x)dx = \omega(0) \ne 0.$$

Но последовательность, стоящая слева, стремится к нулю по теореме Лебега, — противоречие.

4. Докажите, что $f_n \to f$ в пространстве D'.

	$f_n(x)$	$f(x)$		$f_n(x)$	$f(x)$

4.1	$\delta(x-n)$	*0*	4.8	$x\delta'(x+n)$	0
4.2	$\sin nx$	*0*	4.9	$\cos nx$	0
4.3	$n\chi_{[0,1/n]}(x)$	$\delta(x)$	4.10	$n\chi_{[-1/n,0]}(x)$	$\delta(x)$
4.4	$n\chi_{[-1/n,1/n]}(x)$	$(1/2)\,\delta(x)$	4.11	$n\chi_{[1-1/n,1]}(x)$	$\delta(x-1)$
4.5	e^{inx}	0	4.12	$x\delta(x+n)$	0
4.6	$n\delta(x-n)$	0	4.13	$e^x\delta'(x-n)$	0
4.7	$n\chi_{[1,1+1/n]}(x)$	$\delta(x-1)$	4.14	$n/(n^2x^2+1)+$ $\delta''(x+n)$	$\pi\,\delta(x)$

Решение задачи 4.14. Пусть $\varphi \in D$. Заметим, прежде всего, что

$$(\delta''(x+n), \varphi(x)) = \varphi''(n) \to 0.$$

Далее, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\left(\frac{n}{n^2x^2+1}, \varphi(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{n^2x^2+1}\varphi(x)dx = [nx = t] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)dt \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\varphi(0)dt =$$

$$= (\pi\,\delta(x), \varphi(x)),$$

что и завершает доказательство.

5. Найдите производную обобщенной функции f (всюду ниже $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$).

	f		f
5.1	$\mathrm{sgn}\,x$	5.2	$\chi_{[-1,1]}$
5.2	$x_+^{-1/2} := x^{-1/2}\theta(x)$	5.9	$\theta(-x)$
5.3	$\theta(x)e^x$	5.10	$\ln\|x\|$
5.4	$x_+^{-1/3} := x^{-1/3}\theta(x)$	5.11	$\chi_{[-1,0]}$
5.5	$\chi_{[0,1]}$	5.12	$\theta(x-1)+\theta(x+1)$
5.6	$\|x\|$	5.13	$\theta(x)\sin x$
5.7	$\|x\|^{-1/3}$	5.14	$\|x\|^{-1/2}$

Решение задачи 5.14. Заметим, что функция $|x|^{-1/2}$ интегрируема на каждом отрезке числовой прямой и, следовательно, определяет регулярную обобщенную функцию

$$(|x|^{-1/2}, \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1/2} \varphi(x)dx, \quad \varphi \in D.$$

По определению производной

$$((|x|^{-1/2})', \varphi(x)) = -(|x|^{-1/2} \varphi'(x)) = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1/2} \varphi(x)' dx.$$

Преобразуем последнюю формулу так, чтобы освободиться от производной основной функции. Имеем

$$((|x|^{-1/2})', \varphi(x)) = -\lim_{\varepsilon \to +0} (\int_{-\infty}^{-\varepsilon} |x|^{-1/2} \varphi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} |x|^{-1/2} \varphi'(x)dx).$$

Теперь, интегрируя по частям, получаем

$$((|x|^{-1/2})', \varphi(x)) = -\lim_{\varepsilon \to +0} (|x|^{-1/2} \varphi(x)|_{-\infty}^{-\varepsilon} + |x|^{-1/2} \varphi(x)|_{\varepsilon}^{+\infty}) +$$
$$\lim_{\varepsilon \to +0} (\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} (-x)^{-3/2} \varphi(x)dx - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^{-3/2} \varphi(x)dx) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-1/2} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) -$$
$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^{-3/2} (\varphi(x) - \varphi(-x))dx = -\frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} x^{-3/2} (\varphi(x) - \varphi(-x))dx.$$

Варианты заданий см. в лабораторной работе 13 (задачи 1 - 5).

III. Д О П О Л Н И Т Е Л Ь Н Ы Е З А Д А Ч И.

25. Пусть f есть ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на **R**. Будет ли умножение на f непрерывным оператором в D?

26. Докажите сингулярность обобщенной функции $P\dfrac{\cos kx}{x}$ (см. задачу 2.14).

27. Найдите следующие пределы в D':

а) $\lim\limits_{k \to \infty} P\dfrac{\cos kx}{x}$;

б) $\ln(x + i0) := \lim\limits_{y \to +0} \ln(x + iy)$.

28. Докажите, что $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n} e^{-nx^2} = \sqrt{\pi}\delta(x)$.

29. Докажите, что $\dfrac{1}{x \pm io} := \lim\limits_{y \to +0} \dfrac{1}{x \pm iy} = P\dfrac{1}{x} \mp \pi i \delta(x)$ (формулы Сохоцкого).

30. Вычислите производные следующих обобщенных функций:

а) $[x]$ - целая часть x;

б) $|\sin x|$;

в) $\ln x_+ := \theta(x) \ln x$;

г) $\ln(x + i0)$ (см. задачу 27);

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.