Практическое занятие 9 Интегралы, зависящие от параметра

9.1 Определение и свойства собственных интегралов, зависящих от параметра
9.2 Определение, сходимость и свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра
9.3 Интегралы Эйлера
9.4 Интеграл Фурье

9.1 Определение и свойства собственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть на множестве $Y \subset \mathbb{R}$ определены функции $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$, причем $\varphi(y) \le \psi(y)$. И пусть на множестве

$$Q = \left\{ (x;y) \middle| \varphi(y) \le x \le \psi(y),\, y \in Y \right\}$$

определена функция $f(x;y)$, которая при любом значении параметра $y \in Y$ интегрируема по Риману. Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ представляет собой функцию параметра y, определенную на множестве Y.

Собственным интегралом, зависящим от параметра, называется интеграл вида

$$\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx, \qquad (9.1)$$

переменная y называется *параметром*.

В частности, если $\varphi(y) = a$ и $\psi(y) = b$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, то собственный интеграл, зависящий от параметра y примет вид

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)dx. \qquad (9.2)$$

Пусть $Y = [c;d] \subset \mathbb{R}$, функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на $[c;d]$. Рассмотрим область $\bar{G}$, образованную графиками функций $\varphi(y)$, $\psi(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$

$$\bar{G} = \left\{ (x;y) \middle| \varphi(y) \le x \le \psi(y),\, -\infty < c \le y \le d < \infty \right\},$$

которая является областью определения функции $\Phi(y)$.

Теорема 1 (непрерывность) Пусть

1) функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$, причем $\varphi(y) \le \psi(y)$,

2) функция $f(x;y)$ непрерывна на множестве $\bar{G}$.

Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ есть непрерывная на $[c;d]$ функция и справедлива формула

$$\lim_{\lambda \to 0} \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx = \int\limits_{\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0}\psi(y)} \lim_{y \to y_0} f(x;y)dx. \qquad (9.3)$$

Теорема 2 (дифференцирование по параметру) Пусть 1) функции $f(x;y)$ и $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ непрерывны на прямоугольнике $\Pi = \left\{ (x;y) \middle| a \le x \le b, c \le y \le d \right\}$ и $\bar{G} \subset \Pi$; *2) функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[c;d]$. Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ является дифференцируемой функцией на $[c;d]$ и справедлива формула*

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx \right) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx + f(\psi(y);y)\psi'(y) - f(\varphi(y);y)\varphi'(y) \qquad (9.4)$$

Теорема 3 (интегрирование по параметру) Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на прямоугольнике Π.

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ является интегрируемой функцией и справедливо равенство

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;y)dy. \qquad (9.5)$$

9.2 Определение, сходимость и свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x;y)$ определена на множестве

$$\Pi_\infty=\{(x;y)\,|\,-\infty<a\le x\le b\le+\infty,\ y\in Y\}.$$

И пусть функция $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y)dx$ удовлетворяет условиям:

1) $-\infty<a<b\le+\infty$ (b может быть конечным или бесконечным);

2) для любого $y\in Y$ функция $f(x;y)$ интегрируема по переменной x на каждом отрезке $[a;\eta]$, где $a<\eta<b\le+\infty$.

Если b *конечно*, то $\lim\limits_{\eta\to b-0}\int\limits_a^\eta f(x;y)dx$ есть несобственный интеграл от неограниченной функции; если b *бесконечно*, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx$ есть несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом.

Не ограничивая общности, будем рассматривать случай $b=+\infty$.

Несобственным интегралом, зависящим от параметра, называется интеграл вида

$$\Phi(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx, \qquad (9.6)$$

где переменная y называется *параметром*.

Аналогично определяются следующие несобственные интегралы, зависящие от параметра y:

$$\Phi(y)=\int\limits_{-\infty}^{b} f(x;y)dx,\ \Phi(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx.$$

Несобственный интеграл, зависящий от параметра y, $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ называется *сходящимся (поточечно)*, если $\forall\ y\in Y$ и $b\le+\infty$ существует конечный предел $\lim\limits_{\eta\to b-0}\int\limits_a^\eta f(x;y)dx$:

$$\lim_{\eta\to b-0}\int\limits_a^\eta f(x;y)dx=\int\limits_a^b f(x;y)dx \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ y\in Y\ \ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'(y;\varepsilon)<b:\ \forall\ \eta\in(b';b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\int\limits_a^b f(x;y)dx-\int\limits_a^\eta f(x;y)dx\right|<\varepsilon.$$

Поточечная сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x;y)dx$, зависящего от параметра y определяет сходимость его при каждом фиксированном $y\in Y$ как несобственного.

Поскольку

$$\int\limits_a^b f(x;y)dx=\int\limits_a^\eta f(x;y)dx+\int\limits_\eta^b f(x;y)dx,$$

то для сходящегося интеграла справедливо равенство

$$\lim_{\eta\to 0}\int\limits_\eta^b f(x;y)dx=0.$$

Несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y)dx$ называется *равномерно сходящимся по параметру y на множестве Y*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $b'(y;\varepsilon)>0$, $a\le b'<b$, что для всех $y\in Y$ и всех η, $b'<\eta<b$, выполняется неравенство $\left|\int\limits_{b'}^{b} f(x;y)\,dx\right|<\varepsilon$:

$\int\limits_a^{\eta} f(x;y)\,dx \rightrightarrows \int\limits_a^{b} f(x;y)\,dx$, при $\eta\to b$, $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'(y;\varepsilon)<b:\ \forall\ y\in Y$ и $\forall\ \eta\in(b';b)\ \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\int\limits_{b'}^{b} f(x;y)\,dx\right|<\varepsilon$.

Обозначим $\Phi(y;\eta)=\int\limits_a^{\eta} f(x;y)\,dx$, где $a<\eta<b\le+\infty$. Тогда интеграл $\Phi(y)=\int\limits_a^{b} f(x;y)\,dx$ равномерно сходится, когда $\Phi(y;\eta)\rightrightarrows\Phi(y)$ при $\eta\to b$.

Т е о р е м а 4 (к р и т е р и й К о ш и) Для того чтобы несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} f(x;y)\,dx$ сходился равномерно по параметру y на множестве $Y\in$ □, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'\in[a,b)$ такое, что $\forall\ \eta,\eta'\in[b';b)$ и $\forall\ y\in Y$ выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_{\eta}^{\eta'} f(x;y)\,dx\right|<0.$$

С л е д с т в и е. Если $\exists\varepsilon_0>0$ такое, что $\forall b'\in[a,b)$ $\exists\eta_0,\eta_0^{'}\in[b';b)$ и $\exists\, y_0\in Y$ такие, что

$$\left|\int\limits_{\eta_0}^{\eta_0^{'}} f(x;y)\,dx\right|\ge\varepsilon_0,$$

то интеграл $\int\limits_a^{b} f(x;y)\,dx$ не сходится равномерно по параметру y на множестве Y.

Т е о р е м а 5 (В е й е р ш т р а с с а) Пусть существует функция $g(x)\ge 0$, удовлетворяющая условиям:

1) $g(x)$ определена на $[a;b)$ и интегрируема на $[a;\eta]$, $a<\eta<b\le+\infty$;

2) $|f(x;y)|\le g(x)$ для $\forall x\in[a;b)$ и $\forall y\in Y$;

3) $\int\limits_a^{b} g(x)\,dx$ сходится.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{b} f(x;y)\,dx$ сходится абсолютно и равномерно на Y.

Пусть интеграл $\Phi(y)=\int\limits_a^{b} f(x;y)\,dx$ (равномерно) сходится на множестве Y. И пусть последовательность (η_n), $n=1,2,3,\ldots$, $a\le\eta_n<b$, $\eta_0=a$, сходится к b. Тогда последовательность функций $\Phi_n(y)=\int\limits_a^{\eta_n} f(x;y)\,dx$ (равномерно) сходится на множестве Y к функции $\Phi(y)=\int\limits_a^{b} f(x;y)\,dx$.

Т е о р е м а 6 (Д и р и х л е) Пусть

1) $\forall y\in Y$ функции $f(x;y)$, $g(x;y)$ и $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ непрерывны как функции x на полуинтервале $[a;+\infty)$;

2) функция $F(x;y)$, являющаяся при любом $y\in Y$ первообразной по x функции $f(x;y)$, ограничена при $y\in Y$, $x\in[a;+\infty)$;

3) $\dfrac{\partial g}{\partial x}\le 0$ при $y\in Y$, и $x\in[a;+\infty)$;

4) существует непрерывная на $[a;+\infty)$ функция $\psi(x)$ такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$ и $|g(x;y)|\le\psi(x)$ для $y\in Y$ и $x\in[a;+\infty)$.

Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$$

сходится равномерно по параметру y на множестве Y.

Теорема 7 (непрерывность) Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике

$$\Pi_\infty=\{(x;y)|-\infty<a\le x\le b\le+\infty,\, c\le y\le d\},$$

а интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ равномерно сходится по параметру y на отрезке $[c;d]$. Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ является непрерывной функцией переменной y на отрезке $[c;d]$ и справедлива формула

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x;y)dx=\int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x;y)dx. \qquad (9.7)$$

Теорема 8 (интегрирование по параметру) Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике Π_∞, а интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c;d]$. Тогда функция $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ является интегрируемой на Π_∞ и существует интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx$.

Теорема 9 (о перестановке порядка интегрирования) Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на множестве Π_∞ и выполнены следующие условия: 1) несобственный интеграл $\int\limits_a^b |f(x;y)|dx$ сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $[c';d']\subset(c;d)$; 2) несобственный интеграл $\int\limits_c^d |f(x;y)|dy$ сходится равномерно по параметру x на любом отрезке $[a';b']\subset(a;b)$; 3) один из двух повторных интегралов

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b |f(x;y)|dx,\ \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d |f(x;y)|dy$$

сходится. Тогда сходятся оба повторных интеграла $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx$, $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;y)dy$ и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;y)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx. \qquad (9.8)$$

Теорема 10 (дифференцирование по параметру) Пусть функции $f(x;y)$ и $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ непрерывны на конечном или бесконечном прямоугольнике Π_∞, а интеграл $\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx$ равномерно сходится на отрезке $[c;d]$. Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ является дифференцируемой на отрезке $[c;d]$ функцией и справедливо равенство

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_a^b f(x;y)dx\right)=\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx. \qquad (9.9)$$

9.3 Интегралы Эйлера

Определение и свойства гамма-функции. Функция

$$\Gamma(s)=\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx\,,\quad s>0\,, \qquad (9.10)$$

называется *гамма-функцией,* а ее значение представляет собой интеграл Эйлера.

Гамма-функция обладает следующими свойствами:

– гамма-функция является непрерывной функцией переменной s;

– $\Gamma(s)>0$;

– $\Gamma(1)=1$;

– $\Gamma(s+1)=s\cdot\Gamma(s)$;

– (*формула понижения*) $\Gamma(n)=(n-1)!\quad \forall\ n\in\mathbb{N}$;

– $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$;

– гамма-функция имеет непрерывные производные любого порядка k, $k\in\mathbb{N}$, и справедливо равенство

$$\Gamma^{(k)}(s)=\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^k\,dx\,;$$

– *(интеграл Пуассона)* $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$;

– (*формула дополнения*) если $0<p<1$, то

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p};$$

– (*формула Стирлинга*) при $s\to+\infty$ справедливо

$$\Gamma(s+1)\approx\sqrt{2\pi s}\cdot\left(\frac{s}{e}\right)^s.$$

Определение и свойства бета-функции. Функция

$$\mathrm{B}(p;q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\,,\qquad p>0\,,\quad q>0 \qquad (9.11)$$

называется *бета-функцией,* а ее значение представляет собой интеграл Эйлера.

Бета-функция обладает следующими *свойствами*:

– бета-функция является непрерывной функцией и обладает частными производными любого порядка;

– $\mathrm{B}(p;q)=\mathrm{B}(q;p)$;

– $\mathrm{B}(p;q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p;q-1)$, $\mathrm{B}(p;q)=\dfrac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1;q)$;

– $\mathrm{B}(p;1)=\dfrac{1}{p}$;

– $\mathrm{B}(p;n)=\mathrm{B}(n;p)=\dfrac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{p\cdot(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}\quad\forall\ n\in\mathbb{N}$;

– $\mathrm{B}(m;n)=\dfrac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!}\quad\forall\ n,m\in\mathbb{N}$;

– $\mathrm{B}(p;q)=\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}dz$;

– $\mathrm{B}(p;1-p)=\dfrac{\pi}{\sin\pi p}$;

– (*связь гамма- и бета- функций*) $\mathrm{B}(p;q)=\dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

9.4 Интеграл Фурье

Пусть функция локально интегрируема. *Интегралом в смысле главного значения* называется интеграл:

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{-b}^{+b} f(x)dx\,,\ b>0\,. \qquad (9.12)$$

Отличие интеграла в смысле главного значения от несобственного интеграла состоит в том, что несобственный интеграл есть

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad (9.13)$$

при произвольных a и b, а интеграл в смысле главного значения (9.12) есть предел того же интеграла, но при $a=b$.

Очевидно, что, если существует несобственный интеграл (9.13), то и существует интеграл в смысле главного значения (9.12). Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения (9.12) может существовать, а несобственный интеграл (9.13) – нет.

Рассмотрим множество $L^1(-\infty;\infty)$ кусочно-непрерывных и абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$.

Интегралом Фурье функции $f(x)$ называется функция вида

$$\hat{f}(y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx}\,dx. \qquad (9.14)$$

Поскольку

$$\left|f(x)e^{-iyx}\right| = |f(x)|\cdot\left|e^{-iyx}\right| = |f(x)|\cdot|\cos yx - i\sin yx| =$$

$$= |f(x)|\cdot\sqrt{\cos^2 yx + \sin^2 yx} = |f(x)|$$

и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$, то на основании признака сравнения несобственных интегралов, данный интеграл сходится при любом $u \in \mathbb{R}$.

Отображение F, ставящее в соответствие функции $f(x)$ функцию $\hat{f}(y)$ и определяемое формулой (9.14), называется *преобразованием Фурье* и обозначается

$$F[f](y) = \hat{f}(y).$$

Отображение F^{-1}, ставящее в соответствие функции $\hat{f}(y)$ функцию $f(x)$ по формуле

$$f(x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{iyx}\,dy. \qquad (9.15)$$

называется *обратным преобразованием Фурье* и обозначается

$$F^{-1}[f](y) = f(x).$$

Функция $F[f]$ называется *образом Фурье* функции $f(x)$.

Теорема 11 (формула обращения) Если функция $f(x)\in L^1$ и существуют правая $f_-^{'}(x)$ и левая $f_+^{'}(x)$ производные, то справедлива формула

$$F^{-1}\left[F[f]\right] = F\left[F^{-1}[f]\right] = f.$$

Формула обращения может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt}\,dt \right) e^{iyx}\,dy$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i(x-t)y}\,dt.$$

Используя формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i\sin x$, интеграл Фурье можно записать в виде

$$F[f](y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos yx - i\sin yx)\,dx =$$

$$= v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos yx\,dx - v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin yx\,dx.$$

Обратное преобразование Фурье примет вид

$$f(x) = F^{-1}[f](x) =$$

$$= v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y)\cos yx\,dy + v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y)\sin yx\,dy.$$

Косинус-преобразованием Фурье называется действительная часть преобразования Фурье:

$$F_c[f](y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos yx\,dx. \qquad (9.16)$$

Синус-преобразованием Фурье называется мнимая часть преобразования Фурье:

$$F_s[f](y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin yx\,dx. \qquad (9.17)$$

Очевидно, что $F[f] = F_c[f] - iF_s[f]$.

Если $f(x)$ – четная функция, то функция $f(x)\sin yx$ – нечетная функция. Тогда $F_s[f](y) = 0$ и

$$F[f](y) = F_c[f](y),$$

при этом

$$F_c[f](y) = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos yx\,dx,$$

$$f(x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\cos yxdy = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} F_c(y)\cos yxdy.$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то функция $f(x)\cos yx$ – четная функция. Тогда $F_c[f](y) = 0$ и

$$F[f](y) = -iF_s[f](y),$$

при этом

$$F_s[f](y) = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin yx\,dx,$$

$$f(x) = v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\sin yxdx = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} F_s(y)\sin yxdx.$$

Преобразование Фурье обладает *свойствами:*

– (*линейность*) $F[\alpha\cdot f + \beta\cdot g] = \alpha\cdot F[f] + \beta\cdot F[g]$,

$$F^{-1}[\alpha\cdot f + \beta\cdot g] = \alpha\cdot F^{-1}[f] + \beta\cdot F^{-1}[g];$$

– (*преобразование Фурье от сдвига*)

$$F[f(x-a)] = e^{iay}\cdot F[f];$$

– (*преобразование Фурье от производной*) если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, то

$$F[f'] = iy\cdot F[f];$$

– если функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n-1)}(x)$ принадлежат пространству $L^1(-\infty;\infty)$ и $f^{(n)}(x)$ – кусочно-непрерывна на любом отрезке, то

$$F[f^{(n)}] = (iy)^n\cdot F[f];$$

– пусть $f(x)$ и ее первообразная $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ абсолютно интегрируемые функции на $(-\infty;+\infty)$, $f(x)$ – непрерывна, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Тогда

$$F[g] = \frac{F[f]}{iy};$$

– (*дифференцирование преобразования Фурье*) пусть функции $f(x)$, $xf(x)$ абсолютно интегрируемые функции на $(-\infty;+\infty)$. Тогда функция $\hat{f}(y) = F[f](y)$ имеет на $(-\infty;+\infty)$ непрерывную производную, причем

$$\frac{d}{dy}(F[f]) = F[(-ix)f];$$

– если $f(x)$ непрерывна, а функции $xf(x)$, $x^2 f(x)$, …, $x^n f(x)$ – абсолютно интегрируемы, то

$$\frac{d^n}{dy^n}(F[f]) = F[(-ix)^n f];$$

– если $F[f] = F[g]$, то $f(x) = g(x)$;

Пусть функции $f(x)$ и $g(x) \in L^1(-\infty;\infty)$. Функция (если несобственный интеграл сходится $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \qquad (9.18)$$

называется *сверткой* функций $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 12 Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то свертка $f*g$ есть непрерывная ограниченная и абсолютно интегрируемая функция на $\mathbb{R}$.

Теорема 13 Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то

$$F[f*g]=F[f]\cdot F[g].$$

Свертка обладает *свойствами*:

– (*коммутативность*) $f*g=g*f$;

– (*распределительный закон*) $(f+g)*h=f*h+g*h$;

– (*сочетательный закон*): $(f*g)*h=f*(g*h)$.

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение собственного интеграла, зависящего от параметра.

2 Перечислите свойства собственного интеграла, зависящего от параметра.

3 Дайте определение несобственного интеграла, зависящего от параметра.

4 Дайте определения: а) поточечной сходимости, б) равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

5 Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

6 Сформулируйте признаки Вейерштрасса и Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

7 Перечислите свойства несобственного интеграла по параметру.

8 Дайте определение гамма-функции и перечислите ее свойства.

9 Дайте определение бета-функции и перечислите ее свойства.

10 Для каких функций существует преобразование Фурье?

11 Дайте определение прямого и обратного преобразования Фурье.

12 В чем суть теоремы обращения?

13 Что называется косинус-, синус- преобразованиями Фурье?

14 В чем особенность преобразования Фурье для четных и нечетных функций?

15 Какими свойствами обладает преобразование Фурье?

16 Что называется сверткой функций?

17 Чему равно преобразование Фурье от свертки функций?

Решение типовых примеров

1 Найти производную функции

$$\Phi(y)=\int_0^y\left(x^2+y^2+xy\right)dx.$$

Решение. Имеем:

$$\Phi'(y)=\int_0^y(2y+x)dx+\left(y^2+y^2+y^2\right)\cdot 1-\left(y^2\right)\cdot 0=$$

$$=\left(2xy-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^y+3y^2=2y^2+\frac{y^2}{2}+3y^2=5{,}5y^2.$$

2 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos xy\,dx,\ \ y\in\mathbb{R}.$$

Решение. Возьмем $\forall\,\varepsilon>0$. Покажем, что существует $b'=b'(y;\varepsilon)$.

Имеем

$$\left|\int_\eta^{+\infty}e^{-x}\cos xy\,dx\right|\le\int_\eta^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-\eta}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Положим $b'(y;\varepsilon)=\ln\frac{2}{\varepsilon}$. Тогда $\forall\,\eta\in[b';+\infty)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{\eta}^{+\infty} e^{-x}\cos xy\,dx\right| < \varepsilon .$$

Согласно определению, интеграл сходится равномерно по параметру y на $\mathbb{R}$.

3 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} ye^{-xy}dx\,,\ y\in[0;+\infty).$$

Решение. Покажем, что определение равномерной сходимости не выполняется. Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{e}$. Тогда $\forall\ b'\in(0;+\infty)$ $\exists\eta=b'$ и $y=\frac{1}{b'}$ такие, что

$$\int_{\eta}^{+\infty} ye^{-xy}dx=\int_{b'}^{+\infty} ye^{-xy}dx=\begin{bmatrix} t=xy,\ y=\dfrac{t}{x}, \\ x=\dfrac{t}{y}, dx=dt \end{bmatrix}=$$

$$=\int_{b'\cdot y}^{+\infty} e^{-t}dt=\int_{1}^{+\infty} e^{-t}dt=e^{-1}=\varepsilon .$$

Следовательно, интеграл $\int_{0}^{+\infty} ye^{-xy}dx$ сходится неравномерно по параметру y на множестве $Y=[0;+\infty)$.

4 Исследовать на равномерную сходимость интегралы

а) $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ при $\alpha\in[\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0>0$ и $\alpha\in[0;+\infty)$;

б) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2+1}$, $y\in\mathbb{R}$.

Решение. а) пусть $\alpha\in[\alpha_0;+\infty)$. Так как $e^{-\alpha x^2}\le e^{-\alpha_0 x^2}$ и $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha_0 x^2}dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится равномерно по параметру α на $[\alpha_0;+\infty)$.

Пусть $\alpha\in(0;+\infty)$. Покажем, что на $(0;+\infty)$ интеграл $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится неравномерно. Воспользуемся следствием из критерия Коши. Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{e}$, $\forall\,b>0$ возьмем $\eta_0=b$, $\eta_0'=b+1$, $\alpha_0=\frac{1}{(b+1)^2}$. Тогда

$$\int_{\eta_0}^{\eta_0'} \varepsilon^{-\alpha_0 x^2}dx=\int_{b}^{b+1} e^{-\alpha_0 x^2}dx\ge e^{-\alpha_0(b+1)^2}\int_{b}^{b+1}dx=\frac{1}{e}=\varepsilon_0 .$$

Следовательно, интеграл $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится неравномерно по параметру α на множестве $[\alpha_0;+\infty)$;

б) для подынтегральной функции $f(x;y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}$ рассмотрим функцию $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$, для которой

$$f(x;y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}\le\frac{1}{x^2+1}=g(x).$$

Интеграл $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}$ и является сходящимся для всех $x\in[0;+\infty)$.

Тогда интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2+1}$ сходится равномерно согласно признаку Вейерштрасса.

5 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx,\ y\in[0;+\infty).$$

Решение. Пусть $f(x;y)=\sin x$, $g(x;y)=\frac{e^{-xy}}{x}$.

Функция $\sin x$ имеет ограниченную первообразную

$$F(x)=-\cos x.$$

При $x\ge 1$, $y\ge 0$ для функции $g(x;y)=\frac{e^{-xy}}{x}$ выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xy}}{x}\right)=-\frac{e^{-xy}}{x^2}(1+xy)<0, \qquad \frac{e^{-xy}}{x}<\frac{1}{x}=\psi(x),$$

и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Значит, согласно признаку Дирихле, данный интеграл сходится равномерно по параметру y на множестве $Y=[0;+\infty)$.

6 Вычислить интеграл Пуассона

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Решение. Имеем

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\begin{bmatrix} t=xy, y>0, \\ dt=ydx \end{bmatrix}=y\int_0^{+\infty} e^{-x^2y^2}dx.$$

Умножая это равенство на e^{-y^2} и интегрируя его от 0 до $+\infty$ по y, получаем

$$I^2=\int_0^{+\infty} I\cdot e^{-y^2}dy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dx. \tag{9.19}$$

Так как $\left|ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}\right|\le de^{-c^2\left(1+x^2\right)}$ и интеграл $\int_0^{+\infty}\left(de^{-c^2\left(1+x^2\right)}\right)dx$ сходится, то интеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dx$ сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $[c;d]\subset(0;+\infty)$ согласно признаку Вейерштрасса.

Аналогично доказывается, что интеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy$ сходится равномерно по параметру x на любом отрезке $[a;b]\subset(0;+\infty)$. Следовательно, повторный интеграл $\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy$ сходится.

Переставляя порядок интегрирования в равенстве (9.19), получаем

$$I^2=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy=-\int_0^{+\infty}\left(\left.\frac{e^{-y^2\left(1+x^2\right)}}{2\left(1+x^2\right)}\right|_0^{+\infty}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда $I=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

7 Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x;y)=\frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Интеграл $\Phi(y)=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ является несобственным, так как функция $f(x;y)$ не определена в точках $x=0$ и $x=1$.

При $x \to 0$ функция $\frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = o(1)$, при $x \to 1$ функция $\frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Поскольку $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}}$, то $\frac{\partial f}{\partial y} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Значит, интеграл $\Phi(y) = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ равномерно сходится, и функция $\Phi(y)$ является дифференцируемой. По теореме 10 имеем

$$\Phi'(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t, \\ dx = \cos t \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t} =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t = z, \\ t = \operatorname{arctg} z \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{1+\left(1+y^2\right)z^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

8 Используя интегралы Эйлера, вычислить $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 2\sqrt{t}, t > 0, \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{t}}, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = 2 \Rightarrow t = 1 \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 4t \cdot \frac{\sqrt{4-4t}}{\sqrt{t}}dt =$$

$$= 8\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}} \cdot (1-t)^{\frac{1}{2}}dt = 8 \cdot \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) = 8 \cdot \frac{\Gamma(3/2)\cdot\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} =$$

$$= 8 \cdot \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = 8 \cdot \frac{\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}}{2!} = \pi.$$

9 Найти косинус- и синус- преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-x}$, $x \ge 0$, и обратные к ним.

Решение. Функция $f(x) = e^{-x}$, $x \ge 0$, – гладкая и абсолютно интегрируемая на интервале $[0;\infty)$. Следовательно, для нее существуют косинус- и синус- преобразования Фурье:

$$F_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-t}\cos yt dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-t}\cos yt\Big|_0^B - u\int\limits_0^B e^{-t}\sin yt dt\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-B}\cos yB + 1 - u\left(-e^{-t}\sin yt\Big|_0^B + u\int\limits_0^B e^{-t}\cos yt dt\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - y^2\int\limits_0^\infty e^{-t}\cos yt dt\right).$$

Отсюда

$$F_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}.$$

Аналогично получим

$$F_s(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-t}\sin yt dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{y^2+1}.$$

Обратные косинус- и синус -преобразования Фурье равны:

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos yx}{y^2+1}dy,$$

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{y\sin yx}{y^2+1}dy.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти производные функций:

а) $F(x) = \int\limits_x^{x^2} e^{-xy^2}dy$; в) $F(x) = \int\limits_0^x (x+y)f(y)dy$;

б) $F(\alpha)=\int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$; г) $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha}f(\alpha x)dx$.

2 Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$, $a>0$, $b>0$, если $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int\limits_a^b x^y dy$;

б) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$.

3 Исследовать равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,\ -\infty<x<+\infty.$$

4 Вычислить несобственные интегралы, зависящие от параметра:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax\cos bx}{x}dx$, $a>0$, $b>0$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(ax^2+2bx+c\right)}dx$, $a>0$, $ac-b^2>0$;

в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$, $\alpha>0$.

5 С помощью интегралов Эйлера вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\,dx$; г) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, $n>0$.

6 Найти область определения и выразить через интегралы Эйлера интегралы:

а) $\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^n}dx$, $n>0$.

7 Найти синус- и косинус- преобразования Фурье функции $f(x)=e^{-2x}$, $x\ge 0$.

8 Найти преобразование Фурье функций:

а) $f(x)=\begin{cases}\sin x \text{ при } |x|<\pi,\\ 0 \text{ при } |x|\ge\pi,\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}1+x \text{ при } -1<x\le 0,\\ 1-x \text{ при } 0<x\le 1,\\ 0 \text{ при } |x|\ge 1.\end{cases}$

Задания для домашней работы

1 Найти производные функций:

а) $F(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}f(x+\alpha;x-\alpha)dx$;

б) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$; г) $F(\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{\alpha^2}\frac{\cos\alpha x}{x}dx$.

2 Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, $a>0$, $b>0$, если $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int\limits_a^b e^{-xy}dy$;

б) $\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^3dx$.

3 Исследовать равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ n\ge 0.$$

4 Вычислить несобственные интегралы, зависящие от параметра:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}ax-\operatorname{arctg}bx}{x}dx$, $a>0$, $b>0$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx$, $a>0$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

5 С помощью интегралов Эйлера вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

б) $\int\limits_0^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, $a > 0$; г) $\int\limits_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$, $n > 0$.

6 Найти область определения и выразить через интегралы Эйлера интегралы:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$, $n > 0$; б) $\int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\, dx$, $n > 0$.

7 Найти синус- и косинус- преобразования Фурье функции

$$f(x) = e^{-3x},\ x \geq 0.$$

8 Найти преобразование Фурье функций:

а) $f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ при } 0 < x \leq \pi, \\ 0 \text{ при } x > \pi, \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } 0 < x < 3, \\ 1 \text{ при } x = 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$