Практическое занятие 3
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ И НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

1. Дифференцирование сложной функции.
2. Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением.
3. Системы неявных и параметрически заданных функций.

Пусть $z = f(u;v)$ – функция двух переменных u и v, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных x и y, т.е. $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Тогда $z = f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$ – сложная функция двух независимых переменных x и y, а переменные u и v – промежуточные переменные.

Теорема 1. *Если функция $z = f(u;v)$ дифференцируема в точке $M(u;v)$, а функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ дифференцируемы в точке $P(x;y)$, то сложная функция $z = F(x;y)$, где $u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$, дифференцируема в точке $P(x;y)$, причем ее частные производные вычисляются по формулам:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Для функции трех переменных $w = f(u,v,t)$, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных x, y, z т.е. $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $t = t(x,y,z)$ и $w = f(u(x,y,z), v(x,y,z), t(x,y,z)) = F(x,y,z)$ частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}.$$

Аналогично для функции n, $n > 3$, переменных.

Частные случаи задания сложной функции $w = f(u,v,t)$.

1. Пусть $w = f(u,v,t)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $t = t(x,y)$.

Тогда $w = f(u(x,y), v(x,y), t(x,y)) = F(x,y)$, является сложной функцией только двух аргументов, и, значит, имеем две частные производные $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$.

2. Пусть $z = f(x,y,u)$, $y = y(x)$, $u = u(x)$.

Тогда $z = f(x, y(x), u(x)) = F(x)$ – функция одной переменной x. Найдем z'_x по общей формуле дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Так как $y = y(x)$ и $u = u(x)$ – функции только одной переменной x, то их частные производные обращаются в обыкновенные производные. Кроме того, $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$.

Следовательно,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}.$$

Производная $\frac{dz}{dx}$ сложной функции $z=f(x,y(x),u(x))$ называется ***полной производной***.

Между частной $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полной $\frac{dz}{dx}$ производными имеется существенное различие. Полная производная $\frac{dz}{dx}$ – это обыкновенная производная от z как функции x, а $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть частная производная от z по переменной x, входящей в выражение функции непосредственно, т.е. при условии, что другие переменные (y и u зависящие от x, при дифференцировании остаются постоянными).

Неявные функции, задаваемые одним уравнением. Функция $y=f(x)$ может быть задана неявно уравнением, связывающим переменные x и y:

$$F(x,y)=0\,. \qquad (1)$$

Возникает вопрос, при каких условиях уравнение $F(x,y)=0$ определяет одну из переменных как функцию другой.

Теорема 1 (существование неявной функции). *Пусть функция* $F(x,y)=0$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) существует точка $P_0(x_0;y_0)$, *в которой* $F(x_0,y_0)=0$;

2) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$;

3) функции $F'_x(x,y)$ *и* $F'_y(x,y)$ *непрерывны в некоторой окрестности точки* $P_0(x_0;y_0)$.

Тогда существует единственная функция $y=f(x)$ *определенная на некотором интервале, содержащем точку* x_0, *и удовлетворяющая при любом* x *из этого интервала уравнению* $F(x,y)=0$, *такая, что* $f(x_0)=y_0$.

Замечание. Условие $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$, является достаточным, но не необходимым условием существования в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$ единственной неявной функции $y=f(x)$, определяемой уравнением (1).

Неявная функция двух независимых переменных определяется уравнением $F(x,y,z)=0$, связывающим три переменные. Справедлива теорема, аналогичная приведенной выше.

Теорема 2. *Пусть функция* $F(x,y,z)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\exists P(x_0;y_0;z_0): F(x_0,y_0,z_0)=0$;

2) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$;

3) $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$ *и* $F'_z(x,y,z)$ *непрерывны в некоторой окрестности точки* $P_0(x_0;y_0;z_0)$.

Тогда существует единственная функция $z=f(x,y)$ *определенная в некоторой* δ*-окрестности точки* $P_0(x_0;y_0)$, *удовлетворяющая уравнению* $F(x,y,z)=0$ $\forall\, x,y\in U(\delta,P_0)$, *такая, что* $f(x_0,y_0)=z_0$.

Замечание. Пусть условия 1–3 теоремы 1 выполнены и уравнение (1) определяет y как некоторую функцию от x. Если в это уравнение подставить вместо y функцию $f(x)$, то получим тождество

$$F(x, f(x)) = 0 .$$

Продифференцируем данную функцию по правилу дифференцирования сложной функции:

$$F'_x \cdot 1 + F'_y \frac{dy}{dx} = 0 .$$

Тогда $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$.

Теорема 3. *Пусть 1) функция $F(x, y) = 0$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$; 2) частная производная $F'_y(x, y)$ непрерывна в точке $P_0(x_0; y_0)$; 3) $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует такой прямоугольник*

$$\Pi_{(P_0; d_1; d_2)} = \{(x; y) \mid |x - x_0| < d_1, |y - y_0| < d_2 \} \subset \delta ,$$

в котором уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную неявную функцию вида $y = f(x)$, причем $f(x_0) = y_0$. Функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(x_0 - d_1; x_0 + d_1)$, и ее производная вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\left.\frac{F'_x(x; y)}{F'_y(x; y)}\right|_{y=f(x)} = -\frac{F'_x(x; f(x))}{F'_y(x; f(x))}. \qquad (2)$$

Замечания. 1. В формуле важен порядок действий при вычислении $F_x(x; f(x))$: сначала берется частная производная по x функции $F(x; y)$, а затем вместо y подставляется $f(x)$, но не наоборот.

2. Пусть уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет z как некоторую функцию $z = f(x, y)$ независимых переменных x и y. Если в это уравнение вместо z подставить $f(x, y)$ получается тождество $F(x, y, f(x)) = 0$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} .$$

3. Если уравнение поверхности Q задано неявной функцией $F(x, y, z) = 0$, то:

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} .$$

Следовательно, уравнение ***касательной*** плоскости α к поверхности имеет вид
$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$ и каноническое уравнение ***нормали***:

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} .$$

Неявные функции, определяемые системой уравнений. Рассмотрим систему из m уравнений

$$
\begin{cases} F_1(x_1;x_2;\ldots x_n;y_1;y_2;\ldots;y_m)=0, \\ F_2(x_1;x_2;\ldots x_n;y_1;y_2;\ldots;y_m)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_m(x_1;x_2;\ldots x_n;y_1;y_2;\ldots;y_m)=0. \end{cases} \tag{3}
$$

Решение этой системы относительно y_1, y_2, ..., y_m есть

$$
\begin{cases} y_1 = f_1(x_1;x_2;\ldots;x_n), \\ y_2 = f_2(x_1;x_2;\ldots;x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m = f_m(x_1;x_2;\ldots;x_n), \end{cases} \tag{4}
$$

и называется ***совокупностью неявных функций***, определяемых системой уравнений (3).

Определитель

$$
J = \frac{D(F_1;F_2;\ldots;F_m)}{D(y_1;y_2;\ldots;y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}, \tag{5}
$$

составленный из частных производных, называется ***определителем Якоби (якобианом)*** функций F_1, F_2, ..., F_m по переменным y_1, y_2, ..., y_m.

Теорема 5. *Пусть 1) функции* F_1, F_2, ..., F_m *дифференцируемы в некоторой* δ*-окрестности точки*

$$
P_0(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0;y_1^0;y_2^0;\ldots;y_m^0),
$$

2) частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i,j=1,2,\ldots,m$ *непрерывны в* P_0,

3) $F_1(P_0)=0$, $F_2(P_0)=0$, ..., $F_m(P_0)=0$, $\left.\frac{D(F_1;F_2;\ldots;F_m)}{D(y_1;y_2;\ldots;y_m)}\right|_{P_0} \neq 0$.

Тогда существует такой параллелепипед

$$
\Pi = \left\{ (x_1;x_2;\ldots;x_n;y_1;y_2;\ldots;y_m) \left| \begin{array}{l} |x_i - x_i^0| < d_i,\, i=1,2,\ldots,n; \\ |y_j - y_j^0| < c_j,\, j=1,2,\ldots,m \end{array} \right. \right\} \subset \delta,
$$

в котором система уравнений (3) определяет единственную совокупность неявных функций вида (4), и эти функции дифференцируемы при $|x_i - x_i^0| < d_i, i=1,2,\ldots,n$.

Для того чтобы найти частные производные неявных функций, необходимо решить n систем линейных уравнений относительно $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_i}$, ..., $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,n$:

$$
\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \end{cases}
$$

определителем, которой является якобиан (в силу теоремы 5, якобиан отличен от нуля).

Зависимость функций. Достаточное условие независимости функций. Пусть n функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1; x_2; ...; x_n), \\ y_2 = f_2(x_1; x_2; ...; x_n), \\ ...., \\ y_m = f_m(x_1; x_2; ...; x_n) \end{cases} \tag{6}$$

определены и дифференцируемы в некоторой области $D \subset \boldsymbol{R}^n$, $m \le n$.

Функция $y_k = f_k(x_1; x_2; ...; x_n) = f_k(P)$ называется ***зависимой*** в области D от остальных функций, если ее можно представить в виде

$$y_k = \Phi(y_1; y_2; ... y_{k-1}; y_{k+1}; ...; y_m), \tag{7}$$

где Φ – дифференцируемая функция своих аргументов.

Функции, заданные системой (6), называются ***зависимыми*** в области D, если одна из них (любая) зависит в области D от остальных функций. Если ни одна из функций (6) не зависит от остальных, то функции (6) называются ***независимыми*** в D.

Теорема 6 (достаточное условие независимости). *Пусть: 1) функции (6) дифференцируемы в δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, 2) якобиан этих функций по каким либо переменным не равен нулю в точке P_0. Тогда эти функции независимы в δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.*

Следствие. *Если функции (6) зависимы в δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, то все якобианы $\dfrac{D(y_1; y_2; ...; y_m)}{D(x_{i_1}; x_{i_2}; ...; x_{i_n})}$ равны нулю в δ-окрестности.*

Если функция $z = z(x, y)$ двух независимых переменных задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u; v), \;\; y = y(u; v), \;\; z = z(u; v)$$

и

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u; v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0$$

в окрестности точки $P(x; y)$. Тогда дифференциал этой функции в окрестности точки $P(x; y)$ находится из системы уравнений

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u} du + \dfrac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u} du + \dfrac{\partial y}{\partial v} dv, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial u} du + \dfrac{\partial z}{\partial v} dv. \end{cases}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.

2. Какая функция называется неявной? Приведите примеры неявных функций.

2. Сформулируйте теорему о существовании, единственности и непрерывности неявной функции $F(x;y)=0$,.

3. Сформулируйте теорему о существовании, единственности и непрерывности неявной функции $F(x;y;z)=0$.

4. Сформулируйте теорему о дифференцировании функции $F(x;y)=0$, $F(x_1;x_2;...;x_n)=0$.

5. Что называется якобианом функций? Сформулируйте теорему о существовании, единственности и дифференцируемости совокупности неявных функций, определяемых системой уравнений.

6. Дайте определение функции, зависимой от других функций в некоторой области.

7. Дайте определение зависимости и независимости функций. Сформулируйте теорему о достаточном условии независимости функций.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. Вычислить частные производные сложной функции двух переменных $f(u,v)=u\cdot\ln v$, где $u=3x-y$; $v=x^2+y^2$.

Решение. Имеем $u'_x=3$, $v'_x=2x$, $u'_y=-1$, $v'_y=2y$, $f'_u=\ln v$, $f'_v=\frac{u}{v}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=3\ln v+2x\frac{u}{v}=3\ln\left(x^2+y^2\right)+2x\frac{3x-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\ln v+2y\frac{u}{v}=-\ln\left(x^2+y^2\right)+2y\frac{3x-y}{x^2+y^2}.$$

2. Найти полную производную сложной функции $z=x\sin v\cos w$, где $v=\ln\left(x^2+1\right)$; $w=-\sqrt{1-x^2}$.

Решение. По формуле имеем

$$\frac{dz}{dx}=\sin v\cos w+x\cos v\cos w\frac{2x}{x^2+1}-x\sin v\sin w\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Доказать, что уравнение $y^3+2xy+x^4-4=0$ задает неявную функцию.

Решение. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x,y)$. Имеем:

1) $F(1,1)=0$;

2) $F(1,1)=0$; $F'_y(1,1)=\left(3y^2+2x\right)\big|_{(1;1)}=5\neq 0$;

3) частные производные $F'_x=2y+4x^3$ и $F'_y=3y^2+2x$ являются непрерывными функциями в любой окрестности точки $P(1,1)$.

Следовательно, существует единственная функция $y=f(x)$, удовлетворяющая уравнению $y^3+2xy+x^4-4=0$ и условию

$$f(1)=1.$$

4. Вычислить производную неявной функции, заданной уравнением

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

Решение. Обозначим через $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. Имеем $F'_x=\frac{2x}{a^2}$, $F'_y=\frac{2y}{b^2}$.

Следовательно, $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$.

5. Найти частные производные неявной функции $e^{-xy}-2z+e^z=0$.

Решение. Имеем $F'_x=-ye^{-xy}$, $F'_y=-xe^{-xy}$, $F'_z=-2+e^z$.

Следовательно, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}$.

6. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=5$ в точке $M_0(0;1;1)$.

Решение. Уравнение поверхности задано неявно. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$F'_x(x,y,z)=2x$, $\quad F'_x(0,1,1)=0$,

$F'_y(x,y,z)=4y$, $\quad F'_y(0,1,1)=4$,

$F'_z(x,y,z)=6z$, $\quad F'_z(0,1,1)=6$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости α имеет вид $4(y-1)+6(z-1)=0$ или $2y+3z-5=0$.

Уравнение нормали $\frac{x-0}{0}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{6}$ или $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Так как проекция направляющего вектора $\vec{n}(0;2;3)$ нормали на ось Ox равна нулю, то нормаль перпендикулярна к оси Ox, а касательная плоскость параллельна этой оси.

7. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} u+v-x=0, \\ u-yv=0. \end{cases}$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

Решение. Для данной системы имеем

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v)=u+v-x, \\ F_1(x,y,u,v)=u-yv. \end{cases}$$

Якобиан системы имеет вид

$$J=\frac{D(F_1;F_2)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix}=-y-1,$$

при этом $J\neq 0$ при $y\neq -1$.

Дифференцированием находим два уравнения, связывающих дифференциалы четырех переменных

$$\begin{cases} du+dv=dx, \\ u-ydv-vdy=0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно du, dv при $y\neq -1$, получим

$$du=\frac{ydx+vdy}{1+y},$$
$$dv=\frac{dx-vdy}{1+y}.$$

Дифференцируя повторно, имеем

$$d^2u=\frac{(dydx+dvdy)(1+y)-(ydx+vdy)dy}{(1+y)^2}=$$
$$=\frac{\left(dydx+\frac{dx-vdy}{1+y}dy\right)(1+y)-(ydx+vdy)dy}{(1+y)^2}=$$
$$=\frac{(1+y)dxdy+dxdy-vdy^2-ydxdy-vdy^2}{(1+y)^2}=\frac{2\left(dxdy-vdy^2\right)}{(1+y)^2},$$
$$d^2v=\frac{-dvdy(1+y)-(dx-vdy)dy}{(1+y)^2}=$$
$$=\frac{-\frac{dx-vdy}{1+y}dy(1+y)-(dx-vdy)dy}{(1+y)^2}=\frac{-dxdy+vdy^2-dxdy+vdy^2}{(1+y)^2}= \quad =-\frac{2\left(dxdy-vdy^2\right)}{(1+y)^2}=-d^2u.$$

8. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=cv.$$

Решение. Имеем

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u\neq 0$$

при $u\neq 0$.

Дифференцированием находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных:

$$dx=\cos v\,du-u\sin v\,dv,\ y=\sin v\,du+u\cos v\,dv,\ z=c\,dv.$$

Из первых двух уравнений находим dv:

$$dv=\frac{\cos v\,dy-\sin v\,dx}{u}.$$

Подставим в третье уравнение, получим

$$dz=\frac{c}{u}(\cos v\,dy-\sin v\,dx).$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\sin v}{u}\ \text{ и }\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\cos v}{u}.$$

9. Доказать, что функции $y_1=x_1+x_2$ и $y_2=x_1x_2$ независимы в любой окрестности точки $O(0;0)$.

Решение. Составим якобиан функций y_1 и y_2 по переменным x_1 и x_2

$$J=\frac{D(y_1;y_2)}{D(x_1;x_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_2 & x_1\end{vmatrix}=x_1-x_2.$$

В точке $O(0;0)$ якобиан равен нулю $\left.\frac{D(y_1;y_2)}{D(x_1;x_2)}\right|_{(0;0)} = 0$. Для любой точки $P(x_1;x_2)$, где $x_1 \neq x_2$, из окрестности точки $O(0;0)$ якобиан отличен от нуля $\left.\frac{D(y_1;y_2)}{D(x_1;x_2)}\right|_{P(x_1;x_2)} \neq 0$. Согласно теореме 6, функции y_1 и y_2 независимы в окрестности точки $O(0;0)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

1) $z = e^{x^2+y^2}$, где $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;

2) $z = e^{2x-3y}$, где $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - t$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$ если $z = \ln(x^2 - y^2)$, где $y = e^x$.

3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ если $z = \ln(u^2 + v^2)$, где $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

4. Дана дифференцируемая функция $= f(x;y)$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Выражение

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

представить в полярных координатах.

5. Найти dz, если $z = u^2 v - v^2 u$, где $u = x\sin y$, $v = y\cos x$.

6. Найти производные неявной функции в указанной точке:

1) $x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 6y - 3 = 0$, $M(-1;1)$;

2) $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, $M(3;1)$.

7. Записать уравнение касательной и нормали в указанной точке:

1) $xy - 4x + 6y - 14 = 0$, $M(-1;2)$;

2) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$, $M(1;0)$.

8. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$\begin{cases} 7x^2 + y^2 - 3z^2 + 1 = 0, \\ 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0. \end{cases}$$

Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}$ в точке $M(1;-2;2)$.

9. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x = u + v,\ y = u - v,\ z = u^2 v^2.$$

10. Найти dz, если $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Найти $\frac{dz}{dx}$, если

1) $z = \frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$, где $v = \operatorname{ctg}^2 x$, $u = \operatorname{tg}^2 x$;

2) $z = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$ если $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$, где $y = 4x + 1$.

3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ если

1) $z = u^2 + v^2$, где $u = x + y$, $v = x - y$;

2) $z = u^2 \ln v$, где $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.

4. Дана дифференцируемая функция $= f(x; y)$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Выражение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

представить в полярных координатах.

5. Найти dz, если $z = \frac{u}{v}$, где $u = x^2 + y$, $v = xy$.

6. Найти производные неявной функции в указанной точке:

1) $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$, $M(1;1)$;

2) $x^3 + y^3 - x^2 - y^2 = 0$, $M(2;1)$.

7. Записать уравнение касательной и нормали в указанной точке:

1) $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$, $M(1;-1)$;

2) $e^y - x + y + 3 = 0$, $M(4;0)$.

8. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 3z^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Найти dy, dz, d^2y, d^2z.

9. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x = a\cos u \operatorname{ch} v,\ y = b\sin u \operatorname{ch} v,\ z = c \operatorname{sh} v.$$

10. Найти dz, если $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$.

Практическое задание 4
ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1.Частные производные высших порядков.
2.Теорема о равенстве смешанных производных.
3.Дифференциалы высших порядков.
4. Формула Тейлора для функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x,y)$ двух переменных имеет непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в точке $P(x;y) \in D(f)$. Эти производные, в свою очередь, являются функциями двух переменных x и y. Функции $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ называются ***частными производными первого порядка***. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются ***частными производными второго порядка*** от функции $z = f(x,y)$ в точке $P(x;y)$.

Обозначаются:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $f''_{xx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, z''_{xx} – функция f дифференцируется последовательно два раза по x;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $f''_{xy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, z''_{xy} – функция f дифференцируется сначала по x, а затем по y;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $f''_{yx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, z''_{yx} – функция f дифференцируется сначала по y, а затем по x;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $f''_{yy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$, z''_{yy} – функция f дифференцируется последовательно два раза по переменной y.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. В результате получим восемь ***частных производных третьего порядка***:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Таким образом, частная производная от производной $(n-1)$-го порядка называется ***частной производной n-го порядка*** и обозначается $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2}$ и т.д.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ называются ***смешанными производными***.

Среди частных производных второго порядка функции $z = f(x,y)$ имеются две смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Возникает вопрос: зависит ли результат дифференцирования функций нескольких переменных от порядка дифференцирования по разным переменным.

Теорема 1. Если функция $z = f(x,y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} определены и непрерывны в точке $P_0(x_0; y_0)$ и в некоторой ее окрестности, то

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Замечание. Все приведенные выше рассуждения, а также теорема 1 имеют место и для функции любого числа переменных.

Дифференциалы высших порядков. Пусть $z = f(x,y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области $D(f)$. Придавая x и y приращения $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, в любой точке $P(x;y) \in D(f)$ можно вычислить полный дифференциал

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy,$$

который называют ***дифференциалом первого порядка*** функции $z = f(x,y)$.

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $P(x;y) \in D(f)$ если он существует, называется ***дифференциалом второго порядка*** и обозначается

$$d^2 z = d(dz).$$

Найдем аналитическое выражение для $d^2 z$, считая dx и dy постоянными:

$$d^2 z = d\big(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\big) = d\big(f'_x(x,y)\big)dx + d\big(f'_y(x,y)\big)dy =$$
$$= \big(f''_{xx}(x,y)dx + f''_{yx}(x,y)dy\big)dx + \big(f''_{yx}(x,y)dx + f''_{yy}(x,y)dy\big)dy =$$
$$= f''_{xx}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)dy^2.$$

Поступая аналогично, получаем аналитическое выражение для ***дифференциала третьего порядка*** $d^3 z$**:**

$$d^3 z = d\left(d^2 z\right) =$$
$$= f'''_{xxx}(x,y)dx^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)dx^2 dy + 3f'''_{xyy}(x,y)dxdy^2 + 3f'''_{yyy}(x,y)dy^3.$$

И так далее.

Функция f называется k ***раз непрерывно дифференцируемой*** в области G, если для нее существует k-ый дифференциал в этой области.

Обозначается: $f \in \mathrm{C}_G^k$.

Замечания. 1. Аналитические выражения для dz, $d^2 z$ и $d^3 z$ кратко записывают в виде следующих символических формул:

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)z,$$

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z,$$

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Тогда и для любого n справедливо соотношение

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z ,$$

причем правая часть этого равенства раскрывается формально по биномиальному закону.

2. Если $z = f(x, y)$ – дифференцируемая функция промежуточных аргументов x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями u и v, то $dx \neq \Delta x$, $dy \neq \Delta y$. Следовательно, можно получить новые выражения для $d^2 z = d(dz)$, $d^3 z = d(d^2 z)$, …. Следовательно, приведенные выше формулы дифференциалов *не являются* инвариантными для сложных функций.

Формула Тейлора для функции двух переменных.

Теорема 1 (Тейлора). *Пусть функция двух переменных* $z = f(x, y)$ *непрерывна со всеми частными производными до* $(n+1)$ *порядка включительно в некоторой* δ*-окрестности точки* $P_0(x_0; y_0) \in D(f)$. *Тогда справедлива формула Тейлора для функции двух переменных*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + R_n ,$$

где $R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\xi, \eta)$, $x_0 < \xi < x$; $y_0 < \eta < y$.

Следствие. *При условиях теоремы 1 имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + o(\rho^n).$$

Если в формуле Тейлора положить $x_0 = y_0 = 0$, получается ***формула Маклорена*** для функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$$f(x, y) = f(0,0) + df(0,0) + \frac{1}{2!} d^2 f(0,0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(0,0) + R_n .$$

С помощью формулы Тейлора для функции двух независимых переменных можно находить приближенные значения функции в точке, а также исследовать функции двух переменных на экстремум.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как находятся частные производные высших порядков?
2. Что называется смешанной производной?
3. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных.
4. Сформулируйте теорему Тейлора для функции двух переменных.
5. Какой вид имеет формула Маклорена для функции двух переменных?

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. Найти частные производные второго порядка функции

$$z = \sin(x^2 + y^2).$$

Решение. Функция определена и непрерывна на $\boldsymbol{R}^2$. Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos\left(x^2+y^2\right),\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y\cos\left(x^2+y^2\right).$$

Частные производные первого порядка определены и непрерывны на $\boldsymbol{R}^2$. Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xy\sin\left(x^2+y^2\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-4xy\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Видно, что смешанные частные производные второго порядка этой функции равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

Далее находим:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}=2\cos\left(x^2+y^2\right)-4^2x\sin\left(x^2+y^2\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\cos\left(x^2+y^2\right)-4y^2\sin\left(x^2+y^2\right).$$

2. Найти частные производные второго порядка функции

$$u=xyz-e^{x+y}.$$

Решение. Функция определена и непрерывна на $\boldsymbol{R}^3$. Вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz-e^{x+y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=xz-e^{x+y},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-e^{x+y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=z-e^{x+y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{x+y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

3. Найти dz и d^2z, если $z=\ln(x-y)+\sqrt{xy}$.

Решение. Используем формулу $dz=z'_x dx+z'_y dy$. Так как

$$z'_x=\frac{1}{x-y}+\frac{y}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}},$$

$$z'_y=\frac{-1}{x-y}+\frac{x}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{1}{x-y},$$

то

$$dz=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{1}{x-y}\right)dx+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{1}{x-y}\right)dy.$$

Для определения d^2z вычислим предварительно частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}},$$

$$z''_{yy}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}-\frac{1}{(x-y)^2},$$

$$z''_{xy}=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4\sqrt{xy}}.$$

Тогда

$$d^2z=\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)dx^2+2\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4\sqrt{xy}}\right)dxdy-$$

$-\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right)dy^2$.

3. Разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y)=2^{xy}$.

Решение. Для любых x, $y\in U(\varepsilon;P_0)$ имеет место формула Тейлора второго порядка:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+o(\rho^2)$$

или в краткой записи

$$f(P)=f(P_0)+df(P_0)+\frac{1}{2!}d^2f(P_0)+o(\rho^2).$$

Вычислим:

$f(P_0)=2$,

$df(P_0)=\left(f'_x(P_0)dx+f'_y(P_0)dy\right)=$

$=\left(y\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(x-1)+x\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-1)\right)\Big|_{P_0}==2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1)$,

$d^2f(P_0)=f''_{xx}(P_0)dx^2+2f''_{xy}(P_0)dxdy+f''_{yy}(P_0)dy^2=$

$=\left(y^2\cdot 2^{xy}\ln^2 2(x-1)^2+2\left(2^{xy}\ln 2+xy\cdot 2^{xy}\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)\right)+$

$+x^2\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-2)^2\Big|_{P_0}=$

$=2\ln^2 2\cdot(x-1)^2+2\left(\ln 2+2\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)+2\ln 2\cdot(y-1)^2$.

Следовательно,

$$2^{xy}=2+2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1)+\ln^2 2\cdot(x-1)^2+$$
$$+(1-2\ln 2)\ln 2\cdot(x-1)(y-1)+\ln 2\cdot(y-1)^2+o(\rho^2),$$

где $\rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Найти частные производные второго порядка следующих функций:

1) $z=xy+\frac{x}{y}$, 2) $z=xe^{-xy}$,

3) $z=y^x$, 4) $z=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

5) $u=\left(\frac{y}{x}\right)^z$.

2. Найти частные производные первого и второго порядка функции $z=x^3y+xy^2-2x+3y-1$ в точке $M(3;2)$.

3. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=\cos\frac{y}{x}\arccos\frac{x}{y}$.

4. Найти дифференциал второго порядка от указанной функции:

1) $z=x^3y^3$, 2) $z=e^{xy}$.

5. Найти дифференциал третьего порядка функции

$$z = x^4 - y^4 + x^2y^2.$$

6. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(2;-1)$ до членов второго порядка включительно функцию

$$f(x,y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4.$$

7. Разложить по формуле Маклорена до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y) = \sin x \operatorname{sh} y$.

8. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Найти частные производные второго порядка следующих функций:

1) $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$, 2) $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

3) $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$, 4) $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

2. Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = 2x^3y^2 - xy + 4x - 2y - 5$ в точке $M(1;-1)$.

3. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = x\sin(2x + 3y)$.

4. Найти дифференциал второго порядка от указанной функции:

1) $z = \dfrac{x}{x + y}$, 2) $z = \ln xy$.

5. Найти дифференциал третьего порядка функции

$$z = x^3y - xy^3.$$

6. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(2;1)$ до членов второго порядка включительно функцию

$$f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy.$$

7. Разложить по формуле Маклорена до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y) = e^y \cos x$.

8. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$.