Практическое занятие 1
ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие функции многих переменных. Линии и поверхности уровня.
2. Определение предела функции многих переменных.
3. Повторные пределы.
4. Непрерывность функции многих переменных.

Пусть $G \subset \boldsymbol{R}^n$ – произвольное множество точек n-мерного евклидова пространства.

Если правило f каждой точке $x = (x_1; x_2; ...; x_n) \in G$ ставит в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то говорят, что на множестве G задана ***числовая функция (***или ***отображение)*** f ***от*** n ***переменных***. Множество G называется ***областью определения***, $D(f) = G$, а множество $E = \{u \in \boldsymbol{R} | \; u = f(x), x \in G\}$ – ***множеством значений функции*** f.

Обозначается: $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$; $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

В частном случае при $n = 2$ функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Частное значение функции $z = f(x, y)$ при $x = x_0$ и $y = y_0$ обозначается $f(x_0, y_0)$, $f(M_0)$, $z|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ или $z|_{M_0}$.

Функция f двух переменных x и y может быть задана аналитическим, табличным, графическим и другими способами.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ изображается в трехмерном пространстве при выбранной декартовой системе координат $Oxyz$ как множество точек

$$\Gamma = \left\{(x; y; z) \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \; z = f(x, y)\right\},$$

которое есть некоторая поверхность в $\boldsymbol{R}^3$. Проекцией этой поверхности на плоскость Oxy является область $D(f)$.

Функцию трех и более переменных изобразить графически затруднительно.

Функции нескольких переменных могут быть заданы явно (уравнением, разрешенным относительно зависимой переменной: $z = f(x, y)$, $u = f(x, y, z)$, $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$) либо неявно (уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной).

Множество точек $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющих уравнению $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c$, называется ***множеством уровня*** функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, соответствующим данному значению c.

Если $n = 2$, то множество уровня называется ***линией уровня***, если $n = 3$, то множество уровня называется ***поверхностью уровня***, если $n > 3$, то множество уровня называется ***гиперповерхностью уровня***.

Пусть функция $z = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, определена в окрестности $U(\varepsilon, x_0)$.

Число A называется ***пределом*** функции $z = f(x)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m)$,

$m=\overline{1,\infty}$, $x_m \in \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0)$, соответствующая последовательность $(f(x_m))_{m=1}^{\infty}$ значений функции сходится к A.

Символическая запись: $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ \forall (x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m \in U(\varepsilon, x_0)$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \lim\limits_{k\to\infty} f(x_m) = f(x_0)$.

Для записи предела функции можно использовать обозначение:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Как и в случае функции одной переменной, данное определение по Гейне предела функции двух переменных на языке последовательностей эквивалентно определению предела функции по Коши.

Число A называется ***пределом*** функции $z = f(x)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любой точки $x \in \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символическая запись: $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0): \forall M \in \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0) \quad |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Эквивалентность двух определений предела доказывается так же, как и для функции одной переменной.

Если функция двух переменных $z = f(x; y)$ определена в окрестности $\overset{\circ}{U}(\varepsilon; (x_0, y_0))$ и число A является пределом при $(x, y) \to (x_0, y_0)$, то

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y)$$

называется ***двойным пределом***.

Отметим, что в некоторых приложениях удобно пользоваться определением по Коши, в других – по Гейне.

При определении предела функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ полагается, что функция может быть не определена в точке M_0. Поэтому значения функции $f(M)$ отличаются от числа z_0 на достаточно малую величину, если точка M выбрана достаточно близко к точке M_0. Из определения предела функции по Коши получаем $z_0 - \varepsilon < f(M) < z_0 + \varepsilon$. С **геометрической** точки зрения, приведенное неравенство означает, что точка графика функции $z = f(M) = f(x, y)$ из окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta, M_0)$ находится между двумя плоскостями $z = z_0 - \varepsilon$ и $z = z_0 + \varepsilon$. Другими словами, предел функции $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ определяется поведением функции вблизи точки $M_0(x_0; y_0)$ и не зависит от значения функции в этой точке.

Поскольку определение предела функций многих переменных аналогично определению предела функции одного переменного, то для случая функций многих переменных сохраняются все свойства пределов функций (кроме тех, где существенна упорядоченность точек числовой прямой, например, односторонние пределы).

Повторные пределы. Для функции $z=f(x,y)$ можно определить понятие предела по переменной x, полагая y постоянным, и можно определить предел по y, полагая x постоянным.

Пусть функция $z=f(x,y)$ задана в прямоугольной окрестности $U(M_0,d_1,d_2)=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid |x-x_0|<d_1, |y-y_0|<d_2\}$ точки $M_0(x_0,y_0)$ за исключением, быть может, самой точки $M_0(x_0,y_0)$. И пусть для каждого фиксированного y, удовлетворяющего условию $0<|y-y_0|<d_2$, при $x\to x_0$ для функции $z=f(x,y)$ одной переменной x существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_{фик}}} f(x;y)=g(y)$. И пусть при $y\to y_0$ для функции $g(y)$ существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=b$. Тогда говорят, что существует ***повторный предел*** b для функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Обозначается: $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)=b$.

Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$.

Теорема 1. *Пусть функция* $z=f(x,y)$ *определена в некоторой прямоугольной окрестности* $U(M_0,d_1,d_2)$ *точки* $M_0(x_0,y_0)$, *и имеет в этой точке двойной предел* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=b$. *И пусть для любого фиксированного* x, $0<|x-x_0|<d_1$, *существует предел* $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ x_{фик}}} f(x;y)=h(x)$ *и для любого фиксированного* y, $0<|y-y_0|<d_2$, *существует предел* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_{фик}}} f(x;y)=g(y)$. *Тогда повторные пределы* $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$ *существуют и равны*

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x;y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x;y).$$

Непрерывность функции многих переменных. Понятие непрерывности функции нескольких переменных определяется с помощью предела.

Функция $u=f(x)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, называется ***непрерывной*** в точке $x_0=(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0)$, если выполнены следующие условия:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;
2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если в точке x_0 одно из указанных трех условий не выполняется, то она является точкой разрыва функции $u=f(x)$.

Для функции $z=f(x,y)$ двух независимых переменных точки разрыва могут быть изолированными или образовывать линию разрыва. Для функции $u=f(x,y,z)$ трех независимых переменных точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линию или поверхность разрыва.

Основные теоремы о свойствах непрерывных в некоторой точке функций (например, теорема о непрерывности суммы непрерывных функций) доказываются для функций многих переменных так же, как и для функции одной переменной.

Теорема 2 (непрерывность сложной функции). *Пусть функции* $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t)$, ..., $x_n=\varphi_n(t)$, $t=(t_1,t_2,...,t_n)$, *определены в некоторой окрестности точки* $t_0=\left(t_1^0;t_2^0;...;t_n^0\right)\in \boldsymbol{R}^n$ *и непрерывны в точке* t_0. *Функция* $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ *определена в окрестности точки* $x_0=(\varphi_1(t_0);\varphi_2(t_0);...;\varphi_n(t_0))\in \boldsymbol{R}^n$ *и непрерывна в точке* x_0. *Тогда в некоторой окрестности точки* t_0 *определена сложная функция* $\Phi(t)=f(\varphi_1(t);\varphi_2(t);...;\varphi_n(t))$, *причем функция* $\Phi(t)$ *непрерывна в точке* t_0.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1.Что называется функцией в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Что такое множество уровня?

2.Сформулируйте определения предела функции $z=f(x,y)$ в точке по Гейне и по Коши. Что означает эквивалентность этих определений?

3. Дайте определение бесконечно малой функции в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ при $M\to M_0$.

4. Сформулируйте определение повторного предела функции $z=f(x,y)$. Дайте определение повторного предела для функции $u=f(x_1;x_2;...;x_n)$.

5. Сформулируйте определение непрерывной функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $M_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$. Какими свойствами обладают непрерывные функции?

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1.Найти область определения следующих функций:

1) $z=x^2+y^2$, 2) $z=\sqrt{4-x^2-2y^2}$,

3) $z=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-...-x_n^2}$. 4) $z=\ln\left(5-x^2-y^2-z^2\right)$.

Решение. 1. Область определения этой функции $D(f)=\boldsymbol{R}^2$, множество значений $E(f)=[0;+\infty)$. Графиком данной функции в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ является круговой параболоид (рис.1).

2. Областью определения $D(f)$ этой функции является множество всех точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$, для которых определено выражение $\sqrt{4-x^2-2y^2}$, т.е. $4-x^2-2y^2\ge 0$. Множество таких точек лежит внутри и на эллипсе с полуосями $a=2$, $b=\sqrt{2}$ (на рис.2), т.е.

$$D(f)=\left\{M(x;y)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\le 1\right\}.$$

Множество значений $E(f)=[0;2]$. Графиком этой функции является верхняя часть эллипсоида.

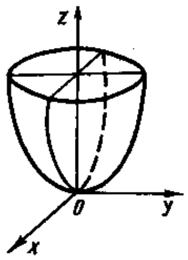

Рис.1.

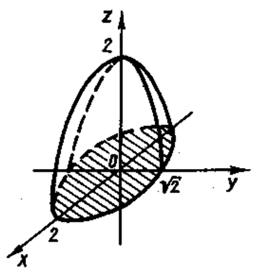

Рис.2.

3. Функция определена, если $1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 \geq 0$ или $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1$. Отсюда

$$D(f) = \left\{ M(x_1; x_2; ...; x_n) \in \boldsymbol{R}^n \middle| x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1 \right\},$$

т.е. областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек замкнутого n-мерного шара радиусом $r = 1$ с центром в начале координат, а $E(f) = [0;1]$;

4. Функция определена, если $5 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$ или $x^2 - y^2 - z^2 < 5$, откуда

$$D(f) = \left\{ M(x; y; z) \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \; x^2 + y^2 + z^2 < 5 \right\},$$

т.е. областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек открытого трехмерного шара радиусом $\sqrt{5}$, а $E(f) = (-\infty; \ln 5]$.

2. Вычислить, используя определение предела по Гейне, предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x - y}$.

Решение. Область определения данной функции $D(f) = \left\{ (x; y) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \; x \neq y \right\}$. Возьмем произвольную последовательность точек $(M_k)_{k=1}^{\infty} = ((x_k; y_k))_{k=1}^{\infty}$, таких, что $x_k \neq y_k$, $x_k \to 0$, $y_k \to 0$. Тогда

$$f(M_k) = \frac{x_k^3 - y_k^3}{x_k - y_k} = x_k^2 + x_k y_k + y_k^2.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = \lim_{\substack{k \to \infty \\ \left(\substack{x_k \to 0 \\ y_k \to 0} \right)}} \left(x_k^2 + x_k y_k + x_k^2 \right) = 0 \cdot$$

3. Доказать, пользуясь определением предела по Коши, что

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = 0.$$

Решение. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta(\varepsilon)$, такое, что для любой точки $M(x; y) \in \overset{\circ}{U}(\delta; (0;0))$ выполняется неравенство $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$. Так как для любой точки $M(x; y) \in D(f)$ справедливо соотношение

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2,$$

то

$$|f(x, y) - 0| = \left| x^2 + xy + y^2 \right| \leq x^2 + y^2 + |xy|.$$

Оценим $|x \cdot y|$:

$$(|x| - |y|)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leq x^2 + y^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; |x \cdot y| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 \right).$$

Таким образом, $|f(x,y)-0|\le\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)=\frac{3}{2}\rho^2(O,M)<\varepsilon$. Отсюда $\rho(O,M)<\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$.
где $\rho(O;M)$ – расстояние от точки $M(x;y)$ до точки $O(0;0)$.

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ мы нашли число $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$, такое, что для любой точки $M(x;y)\in U(\delta,M_0)$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x-y}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}=0.$$

4. Найти точки разрыва функций:

1) $z=\frac{1}{(x-4)^2+y^2}$; 2) $z=\frac{1}{x-y}$; 3) $u=\frac{2}{x^2+y^2+z^2-9}$.

Решение. 1. Данная функция определена на $\boldsymbol{R}^2$ всюду, кроме точки $M(4;0)$, которая и является точкой разрыва функции.

2. Данная функция определена для любых x, y, таких, что $x\ne y$. Следовательно, прямая $x=y$ является линией разрыва функции.

3. Функция $u=\frac{2}{x^2+y^2+z^2-9}$ определена для любых x, y, z, таких, что $x^2+y^2+z^2\ne9$. Сфера с центром в начале координат и радиусом 3 является поверхностью разрыва функции.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Найти области определения следующих функций

1) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$, 2) $z=\frac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$, 3) $z=\sqrt{9-\left(x^2+y\right)^2}$,

4) $z=y\sqrt{\cos x}$, 5) $z=\arcsin\frac{x}{x+y}$, 6) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-25}$,

7) $u=\arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

2. Дана функция $f(x;y)=\frac{2x-3y}{3x-2y}$. Найти $f(2;1)$, $f(1;2)$, $f(a;-a)$, $f(-a;a)$.

3. Выяснить, имеет ли функция $f(x;y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ предел при $x\to0$, $y\to0$.

4. Вычислить переделы

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{\sin xy}{y}$,

3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, 4) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ y\to1}}\frac{x^2y^3}{xy+2}$,

5) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ y\to-3}}\frac{(x-2)^2-(y+3)^2}{(x-2)^2+(y+3)^2}$.

5. Показать, что для функции

$$f(x;y)=(2x+3y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

не существуют оба повторных предела

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;y),\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x;y),$$

но существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)=0$.

6. Показать, что для функции

$$f(x;y)=\frac{x^2+y^2-x+2y}{x+y}$$

существуют оба повторных предела

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;y)=-1,\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x;y)=2,$$

а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не существует

7. Имеет ли предел функция $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$ при $x\to\infty$, $y\to\infty$?

8. Найти точки разрыва следующих функций:

1) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}$, 2) $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2-2x+3y}{x+y}$,

3) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z}$, 4) $f(x;y)=\ln\left|1-(x+1)^2-(y-2)^2\right|$,

5) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2-y^2+z^2}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Найти области определения следующих функций

1) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, 2) $z=\dfrac{2x+3y-4}{x+4y}$,

3) $z=\ln(-x-y)$, 4) $z=y\sqrt{\sin x}$,

5) $z=\arccos\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$, 6) $u=\ln\left(1-x^2-y^2+z^2\right)$,

7) $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{z^2+y^2}}{x}$.

2. Дана функция $f(x;y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. Найти $f(-3;4)$, $f\left(1;\dfrac{x}{y}\right)$, $f(a;-a)$, $f(-a;a)$.

3. Вычислить переделы

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}$,

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x^3-y}{x^2+y^2}$, 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$,

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+4y^2}}{(x-1)^2+y^2}$.

4. Показать, что для функции

$$f(x;y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

существуют оба повторных предела

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;y)=0,\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x;y)=0$$

а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не существует

5. Показать, что для функции

$$f(x;y)=xy\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

существуют оба повторных предела

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;y)=0,\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x;y)=0,$$

а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не существует.

6. Имеет ли предел функция $f(x;y)=\sin\ln\left(x^4+y^2\right)$ при $x\to 0$, $y\to 0$?

7. Найти точки разрыва следующих функций:

1) $f(x;y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$,

2) $f(x;y)=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$,

3) $f(x;y)=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2-y^2-1\right)}$,

4) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$,

5) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$,

6) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x+y)\left(y^2-x\right)}$.

Практическое занятие 2
ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

1. Частные и полные приращения функции многих переменных.
2. Частные производные.
3. Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных.
4. Полный дифференциал функции многих переменных и его геометрический смысл.

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена в окрестности точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$. Дадим переменной x_1^0 приращение Δx_1, а значения x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0 оставим без изменения.

Частным приращением функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется приращение

$$\Delta_{x_1} f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Аналогично определяются частные приращения $\Delta_{x_2} f(x_0)$, $\Delta_{x_3} f(x_0)$, ..., $\Delta_{x_n} f(x_0)$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Полным приращением функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется разность

$$\Delta f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0 + \Delta x_2; ...; x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Геометрически для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных частные и полное приращения функции

$$\Delta_x z = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y z = \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

можно изобразить отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 (рис.1).

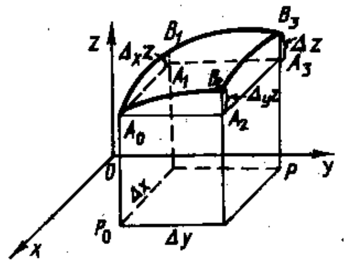

Рис.1.

Частной производной функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x1} f\ (x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx_1, когда Δx_1 произвольным образом стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)}{\Delta x_1}.$$

Обозначается: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}$, $\left.f'_{x_1}\right|_{x=x_0}$.

Таким образом, имеем:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_0}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta_{x_1} f(x_0)}{\Delta x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f\left(x_1^0+\Delta x_1;x_2^0;\ldots;x_n^0\right)-f\left(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0\right)}{\Delta x_1}.$$

Аналогично определяются частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}$, ..., $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0\right)$.

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Вследствие этого, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для производных функций одной переменной, имеют место и для частных производных. Однако во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какой-либо переменной все остальные переменные считаются постоянными.

Геометрический смысл частных производных. Рассмотрим функцию $z=f(x,y)$. Графиком функции $z=f(x,y)$ является некоторая поверхность Q. Возьмем точку $P_0(x_0;y_0)\in D(f)$. На этой поверхности ей соответствует точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Пересечем график данной функции плоскостью $y=y_0$. В сечении получим кривую $z=f(x;y_0)$ (на рис.2 это кривая AM_0B), которую можно рассматривать как график функции одной переменной $z=f(x;y_0)$ в плоскости $y=y_0$. Тогда, по геометрическому смыслу производной функций одной переменной, значение частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ есть тангенс угла α, образованного положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной в точке $M_0(x_0;y_0)$ к линии пересечения поверхности $z=f(x,y)$ и плоскости $y=y_0$ (см. рис.2).

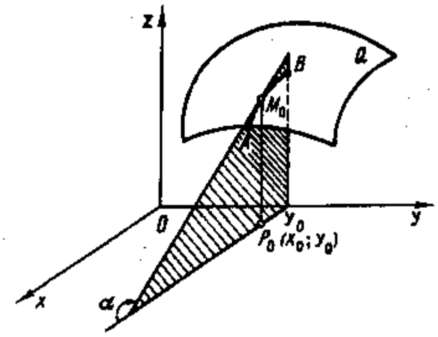

Рис.2.

Аналогично определяется геометрический смысл частной производной функции $z=f(x,y)$ по y.

Механический смысл частных производных. Частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$ характеризуют скорость изменения функции $z=f(x,y)$ в данной точке $P_0(x_0;y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0)$ задает скорость изменения функции в направлении прямой $y=y_0$ (или, что то же, относительно переменной x), $f'_y(x_0,y_0)$

– в направлении прямой $x = x_0$ (относительно переменной y).

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Графиком функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ является некоторая поверхность Q (рис.3). Выберем на ней точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

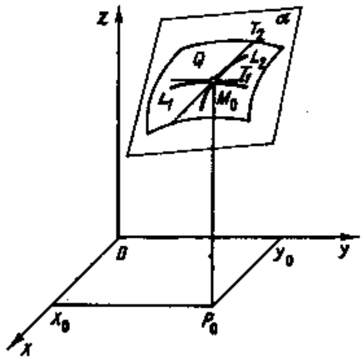

Рис.3.

Касательной плоскостью к поверхности Q в данной точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Уравнение касательной плоскости α к поверхности, проходящей через касательные T_1 и T_2 имеет вид

$$f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

или

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0).$$

Нормалью к поверхности Q в данной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, канонические уравнения нормали запишутся в виде

$$\frac{(x - x_0)}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{(y - y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

Замечание. Точка, в которой $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ или хотя бы одна из этих частных производных не существует, называется ***особой точкой поверхности***. В такой точке поверхность может не иметь касательной плоскости.

Дифференцируемость функции. Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть $z = f(x, y)$ определена в окрестности $U(\delta; P_0)$ точки $P_0(x_0; y_0)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $P_0(x_0; y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (1)$$

где A и B – некоторые постоянные, зависящие от x_0 и y_0; $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые функции от Δx и Δy: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Данное равенство выражает *условие дифференцируемости* функции $z = f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$.

Функция $z = f(x,y)$, дифференцируемая в каждой точке множества G, называется ***дифференцируемой на*** G.

Пусть $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0;y_0)$ и $P(x;y)$. Очевидно, что если $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то $\rho \to 0$, и наоборот, если $\rho \to 0$, то $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а следовательно, α и β стремятся к нулю.

Тогда сумму $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ можно переписать в виде

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho}\right) \cdot \rho = \varepsilon \cdot \rho = o(\rho),$$

так как $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \le 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \le 1$ и $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon = \lim\limits_{\rho \to 0}\left(\alpha \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \frac{\Delta y}{\rho}\right) = 0$.

С учетом этого условие дифференцируемости функции в точке $P_0(x_0;y_0)$ можно записать в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \qquad (2)$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0;y_0)$ и $P(x;y)$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$.

Условия дифференцируемости (1) и (2) функции $z = f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ эквивалентны.

В равенствах (1) и (2) слагаемое $A\Delta x + B\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, называется ***главной частью приращения функции***, так как оставшееся слагаемое $\alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(\rho)$ является бесконечно малой функцией более высокого порядка малости, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Теорема 1 (связь дифференцируемости и непрерывности). *Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то она и непрерывна в этой точке.*

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости функции). *Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0) = A$, $f'_y(x_0,y_0) = B$.*

Замечание. Утверждения, обратные утверждениям теорем 1 и 2 неверны, т.е. из непрерывности функции, а также существования ее частных производных, еще не следует дифференцируемость функции.

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости функции). *Если функция $z = f(x,y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$, непрерывные в самой этой точке, то она дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$.*

Функции с непрерывными частными производными называются ***непрерывно дифференцируемыми***.

Полный дифференциал функции нескольких переменных и его геометрический смысл. Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Сумма первых двух слагаемых есть главная линейная (относительно Δx и Δy) часть приращения функции.

Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то главная линейная относительно приращения аргументов часть ее полного приращения называется ***полным дифференциалом*** функции.

Обозначается:

$$dz\big|_{P(x_0;y_0)} = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

или

$$df(x_0; y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y .$$

Приращения независимых переменных Δx и Δy называются ***дифференциалами независимых переменных*** x и y и *обозначаются* соответственно dx и dy.

Тогда полный дифференциал функции запишется в виде:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy .$$

Выражения $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy$ называются ***частными дифференциалами*** функции $z = f(x; y)$.

Обозначаются: $d_x z$ и $d_y z$.

Таким образом,

$$dz = d_x z + d_y z .$$

Геометрический смысл дифференциала. Учитывая, что $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y = y - y_0 = dy$, уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy .$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, а левая его часть $z - z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания: $z - z_0 = df(x_0, y_0)$.

Поэтому полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ представляет собой отрезок AB (рис.4).

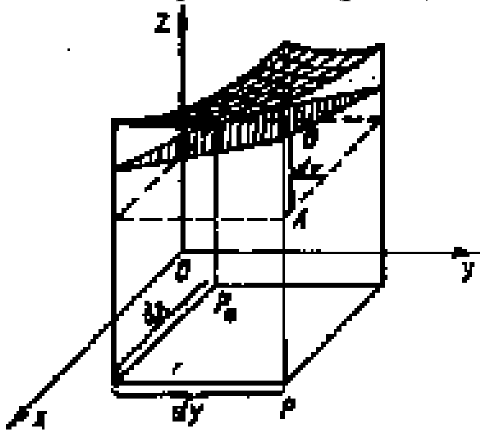

Рис.4.

Замечание. Определение дифференцируемости функции и ее дифференциала обобщаются на случай функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Условие дифференцируемости запишется в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$.

Дифференциал функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как определяются частные и полные приращения функции многих переменных.
2. Дайте определение частных производных.
3. В чем состоит геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных.
4. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.
5. Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.
6. Как связаны непрерывность и дифференцируемость функции $z = f(x, y)$?
7. Сформулируйте необходимое условие дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке.
8. Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке.
9. Что называется полным дифференциалом функции многих переменных? В чем состоит его геометрический смысл?

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2$ в точке $M_0(1;2)$, если $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Решение. Имеем

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x) y_0^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 \Delta x ,$$

$$\Delta_x z\big|_{(1;2)} = 2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4 .$$

Аналогично

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = x_0 (y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$

$$= 2 x_0 y_0 \Delta y + x_0 \Delta y^2 ,$$

$$\Delta_y z\big|_{(1;2)} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 = 0{,}84 .$$

Тогда

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$

$$= 1{,}1 \cdot 2{,}2^2 - 1 \cdot 2^2 = 1{,}324 .$$

2. Найти частные производные функций

1) $z = x^2 + \sin(x + y^2)$, 2) $u = xy + \ln(x - y - z)$,

3) $u = xy + \sin^2(z - xt)$.

Решение.

1**.** Частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая y постоянной. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \cos\left(x + y^2\right).$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x + y^2\right).$$

2. Частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая, что переменные y, z постоянны. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{x - y - z} = \frac{xy - y^2 - yz + 1}{x - y - z}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{x - y - z} = \frac{x^2 - xy - xz - 1}{x - y - z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{x - y - z}.$$

3. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-t) = y - t\sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt) = \sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-x) = -x\sin 2(z - xt).$$

3. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 5 - x^2 - y^2$ в точке $M_0(1;1;3)$.

Решение. Уравнение поверхности задано явной функцией. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = -2, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = -2.$$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

$$-2(x-1) - 2(y-1) - (z-3) = 0 \text{ или } 2x + 2y + z - 7 = 0.$$

Канонические уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1} \text{ или } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

4. Доказать, что функция $z = xy^2$ дифференцируема на всей плоскости Oxy.

***Решение*.** Действительно, полное приращение данной функции в любой точке $P(x;y) \in \boldsymbol{R}^2$ имеет вид

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y)^2 - xy^2 =$$
$$= y^2\Delta x + 2xy\Delta y + \left(2xy\Delta y + \Delta y^2\right)\Delta x + x(\Delta y)^2 .$$

Положив $y^2 = A$, $2xy = B$, $2xy\Delta y + \Delta y^2 = \alpha$, $x\Delta y = \beta$, получим представление Δz в виде условия дифференцируемости, так как A и B в фиксированной точке $P_0(x_0; y_0)$ являются постоянными, а $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

5. Доказать, что функция $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$ не имеет частных производных.

Решение. Действительно,

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(0+\Delta x) + 0 - 0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} .$$

Функция $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $f'_x(0,0)$ не существует.

Аналогично доказывается, что не существует $f'_y(0,0)$.

6. Найти полный дифференциал функции

$$f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Решение. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} .$$

Тогда полный дифференциал равен

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz =$$
$$= -\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx - \frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy + \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}dz =$$
$$= \frac{\left(x^2+y^2\right)dz - z(xdx+ydy)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

7. Приближенно вычислить $\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2}$.

Решение. Искомое число будем рассматривать как значение функции

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

при $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, где $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = 0{,}07$.

Имеем

$$f(4,3) = \sqrt{4^2+3^2} = 5 ,$$
$$\Delta f \approx df = \frac{x\,\Delta x + y\,\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}} ,$$
$$\Delta f(4,3) \approx \frac{4\cdot 0{,}05 + 3\cdot 0{,}07}{5} \approx 0{,}08 .$$

Тогда

$$\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2} \approx 5 + 0{,}08 = 5{,}08 .$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Найти частные производные следующих функций:

1) $z = x^2 + y^3 - 3x^2y + 4x + 5y - 7$, 2) $z = y\sin(3x - 4y)$,

3) $z = 3^{x^2y^4}$, 4) $z = \dfrac{3x - y^5}{x^2 + 4y^3}$,

5) $z = \arccos\dfrac{x}{y}$, 6) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - xy}{x - y}$.

2. Вычислить значения частных производных в указанной точке:

1) $z = \dfrac{x + y}{x - y}$, $M_0(3,2)$; 2) $u = \dfrac{y - z}{z - x}$, $M_0(2,1,3)$.

3. Найти полный дифференциал следующих функций:

1) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{1 + x^2}$, 2) $z = e^{\frac{x}{y}}$.

4. Вычислить полный дифференциал и полное приращение функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ при переходе от точки $M_0(1;1)$ к точке $M(1,1;0,8)$.

5. Показать, что функция $z = y\sin\left(y e^{-x}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

6. Вычислить приближенно выражение, заменив приращение функции дифференциалом:

1) $\operatorname{arctg}\dfrac{1,02}{0,95}$, **2)** $1,98^{2,02}$.

7. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 1 + x^2 = y^2$ в точке $M(1,1,3)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

1. Найти частные производные следующих функций:

1) $z = 4x^2 - 2y^3 - 3xy^3 - 3xy + 5y + 8$, 2) $z = x^2\cos(x + 6y)$,

3) $z = 5^{x^2y + xy^4}$, 4) $z = \dfrac{4x^3 + 3y^5}{2x^2 - 5y^6}$,

5) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$, 6) $z = \sqrt{y}\,e^{-2x}$.

2. Вычислить значения частных производных в указанной точке:

1) $z = \dfrac{xy}{x + y}$, $M_0(4,-5)$; 2) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_0(1,-2,2)$.

3. Найти полный дифференциал следующих функций:

1) $u = z^{y^x}$, 2) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Вычислить полный дифференциал и полное приращение функции $z = x^2 - xy + y^2$ при переходе от точки $M_0(2;1)$ к точке $M(2,1;0,9)$.

5. Показать, что функция $u = \ln\left(e^x + e^y + e^z\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

6. Вычислить приближенно выражение, заменив приращение функции дифференциалом:

1) $\sqrt{(1{,}03)^2+(2{,}98)^2}$, 2) $\ln\left(0{,}09^3+0{,}99^3\right)$.

7. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ в точке $M(1{,}0{,}0)$.