Практическое занятие 5 **Экстремум функции многих переменных**

5.1 Определение и необходимые условия экстремума
5.2 Некоторые сведения о квадратичных формах
5.3 Достаточные условия экстремума

5.1 Определение и необходимые условия экстремума

Пусть дана функция $f(x_1;x_2;...;x_n)=f(P)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$.

Точка $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $f(P)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, что для всех $P(x_1;x_2;...;x_n)\in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0)$ выполняется неравенство

$$f(P_0)>f(P)$$
$$(f(P_0)<f(P)),$$

значение $f(P_0)$ называют *локальным максимумом (минимумом)* функции и обозначается:

$$\max_{P\in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0)} f(P)=f(P_0)$$
$$(\min_{P\in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0)} f(P)=f(P_0)).$$

Точки максимума или минимума функции называют *точками экстремума* функции, а максимумы и минимумы функции – *экстремумами функции*.

Очевидно, что если функция $f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ локальный экстремум, то в случае локального максимума

$$\Delta f=f(P)-f(P_0)<0\quad \forall\ P(x_1;x_2;...;x_n)\in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0),$$

а в случае локального минимума –

$$\Delta f=f(P)-f(P_0)>0\quad \forall\ P(x_1;x_2;...;x_n)\in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0).$$

Теорема 1 (необходимые условия существования локального экстремума) Если в точке P_0 дифференцируемая функция $f(P)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_1}=\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_2}=...=\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_n}=0, \qquad (5.1)$$

или, по крайней мере, одна из них не существует.

Следствие. Если функция $f(P)$ имеет в точке P_0 локальный экстремум, то ее дифференциал в этой точке $du(P_0)$ равен нулю или не существует.

Точки, в которых выполняется условие (5.1), называются *стационарными.* Точки, в которых дифференциал функции равен нулю или не существует, называются *точками возможного экстремума* или *критическими*.

Равенство нулю частных производных первого порядка не является достаточным условием существования экстремума функции $u=f(x_1;x_2;...;x_n)$ в точке $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$.

5.2 Некоторые сведения о квадратичных формах

Функция вида

$$Q(x_1;x_2;...;x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+...+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+$$
$$+a_{22}x_2^2+...+a_{2n}x_2x_n+...+a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

называется *квадратичной формой* от переменных x_1, x_2, ..., x_n, числа a_{ij}, $i,j=1,2,...,n$, называются *коэффициентами квадратичной формы*, матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ .. & .. & .. & ..\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы*.

Если $a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall i; j \quad i \neq j$, то квадратичная форма называется *симметричной*.

Главными минорами матрицы A называются определители:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ называется:

– *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если для любых значений переменных x_1, x_2, ..., x_n, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения;

– *знакоопределенной*, если она является положительно определенной или отрицательно определенной;

– *квазизнакоопределенной*, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, при этом обращается в нуль не только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$;

– *знакопеременной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема 2 (критерий Сильвестра) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма $Q(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0,\ \ldots.$$

5.3 Достаточные условия экстремума

Для функции $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ второй дифференциал представляет собой квадратичную форму

$$d^2 f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m} dx_k dx_m$$

от переменных dx_1, dx_2, …, dx_n с коэффициентами $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, …, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Теорема 3 (достаточные условия существования локального экстремума) Пусть функция $f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f(P)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ и дважды дифференцируема в самой точке P_0, причем P_0 – стационарная точка. Тогда

1) если второй дифференциал $d^2 f\big|_{P_0}$ является положительно определенной (отрицательно определенной) формой от переменных dx_1, dx_2, …, dx_n, то функция $f(P)$ имеет в точке P_0 локальный минимум (максимум);

2) если $d^2 f\big|_{P_0}$ является знакопеременной квадратичной формой, то функция $f(P)$ в точке P_0 экстремума не имеет.

В случае $df\big|_{P_0}=0$, а $d^2 f\big|_{P_0}$ является квазизнакоопределенной квадратичной формой, то функция $f(P)$ может иметь в точке P_0 локальный экстремум, а может и не иметь.

В частности, для функции двух переменных $f(x; y)$ имеем теорему 4.

Теорема 4 (достаточные условия существования локального экстремума функции двух переменных) Пусть $P_0(x_0; y_0)$ стационарная точка, дважды дифференцируемой в окрестности $U(\delta; P_0)$ функции

$f(x;y)$. *И пусть*

$$\Delta(P_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2. \qquad (5.2)$$

Тогда точка $P_0(x_0;y_0)$ *является:*

1) точкой локального максимума, если $\Delta(P_0)>0$ *и* $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$*;*

2) точкой локального минимума, если $\Delta(P_0)>0$ *и* $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$*;*

3) если $\Delta(P_0)<0$*, то в стационарной точке* P_0 *локального экстремума нет,*

4) $\Delta(P_0)=0$*, то локальный экстремум в стационарной точке* P_0 *может быть, а может и не быть.*

В случае $\Delta(P_0)=0$ необходимо провести дополнительные исследования знака функции $f(x,y)$ в $U(\delta;P_0)$.

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение локального экстремума функции многих переменных.

2 Сформулируйте необходимые условия локального экстремума.

3 Какие точки называются стационарными и критическими?

4 Какая функция называется квадратичной формой? Что такое матрица квадратичной формы и ее главные миноры?

5 Какая квадратичная форма называется:

а) положительно определенной;

б) отрицательно определенной;

в) знакоопределенной;

г) квазизнакоопределенной;

д) знакопеременной?

6 Сформулируйте критерий Сильвестра.

7 Сформулируйте достаточные условия экстремума в точке:

а) функции многих переменных; б) двух переменных.

Решение типовых примеров

1 Исследовать на экстремум функцию $z=e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right)$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2+2\right),\ z'_y=2ye^{\frac{x}{2}}.$$

Находим точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z'_x&=0,\\ z'_y&=0, \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y^2+2&=0,\\ y&=0. \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0=-2$, $y_0=0$.

Таким образом, существует только одна стационарная точка $P_0(-2;0)$, в которой функция z может достигать экстремума.

Вычислим частные производные второго порядка функции z в точке P_0:

$$A=z''_{xx}(P_0)=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2+4\right)\Big|_{(-2;1)}=\frac{1}{2e},$$

$$B=z''_{xy}(P_0)=ye^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)}=0,$$

$$C=z''_{yy}(P_0)=2e^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)}=\frac{2}{e}.$$

Так как определитель

$$\Delta(P_0)=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\frac{1}{e^2}>0$$

и $A>0$, то согласно теореме 4 точка $P_0(-2;0)$ является точкой локального минимума: $z_{\min}=z(-2,0)=-\frac{2}{e}$.

2 Исследовать на экстремум функцию $z=e^{-x}\left(x+y^2\right)$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = e^{-x}\left(1 - x - y^2\right),\ z'_y = 2ye^{-x}.$$

Для определения точек возможного экстремума решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 0, \\ z'_y &= 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 - x - y^2 &= 0, \\ y &= 0. \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$. Таким образом, функция имеет только одну стационарную точку $P_0(1;0)$.

Частные производные второго порядка функции z в точке P_0 равны:

$$A = z''_{xx}(P_0) = e^{-x}\left(x + y^2 - 2\right)\Big|_{(1;0)} = -\frac{1}{e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = -2ye^{-x}\Big|_{(1;0)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{-x}\Big|_{(1;0)} = \frac{2}{e}.$$

Так как $\Delta(P_0) = AC - B^2 = -\frac{2}{e^2} < 0$, то по теореме 4 в точке $P_0(1;0)$ локального экстремума нет.

3 Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка функции z:

$$z'_x = 4x^3,\ z'_y = 4y^3.$$

Решая систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 0 \\ z'_y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x^3 &= 0, \\ 4y^3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

находим стационарную точку $P_0(0;0)$ данной функции.

Так как

$$A = z''_{xx}(P_0) = 0,\ B = z''_{xy}(P_0) = 0,\ C = z''_{yy}(P_0) = 0,$$

то $\Delta(P_0) = AC - B^2 = 0$. Следовательно, по теореме 4 нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке $P_0(0;0)$.

Поскольку $\forall P(x, y) \in \dot{U}(\delta; P_0)$ имеет место

$$\Delta z(P) = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y) =$$
$$= (x + \Delta x)^4 + (y + \Delta y)^4 - (x^4 + y^4) > 0,$$

то точка возможного экстремума $P_0(0;0)$ является точкой локального минимума. При этом $z_{\min} = z(0,0) = 0$.

4 Найдите точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$

Решение. Для нахождения точек возможного экстремума данной функции вычисляем ее частные производные

$$u'_x = 4x - y + 2z,\ u'_y = -x - 1 + 3y^2,\ u'_z = 2x + 2z.$$

Приравнивая их нулю и решая систему трех уравнений, получаем две точки возможного экстремума

$$M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right),\ M_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Вычислим частные производные второго порядка данной функции:

$$u''_{xx} = 4,\ u''_{yy} = 6y,\ u''_{zz} = 2,\ u''_{xy} = -1,\ u''_{xz} = 2,\ u''_{yz} = 0.$$

Выражение для дифференциала второго порядка

$$d^2u = 4dx^2 + 6ydy^2 + 2dz^2 - 2dxdy + 2dxdz$$

есть квадратичная форма от переменных dx, dy, dz.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой

$$\Delta_1 = 4 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, d^2u является положительно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz.

Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11} = 4 > 0$, то $M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ является точкой локального минимума, $z_{\min} = -\frac{1}{27}$.

Матрица квадратичной формы d^2u в точке M_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой

$$\Delta_1 = 4 > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 < 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, d^2u не является знакоопределенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz. Следовательно, в точке $M_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ функция не имеет локального экстремума.

5 Найти локальные экстремумы функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0. \qquad (5.3)$$

Решение. Уравнение (5.3) задает неявную функцию

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10,$$

которая удовлетворяет условиям теоремы 2 практического занятия 3 и является дифференцируемой. Частные производные первого порядка находятся по формулам (3.3):

$$z'_x = \frac{x-1}{2-z}, \ z'_y = \frac{y+1}{2-z}$$

и дифференциал первого порядка имеет вид

$$dz = \frac{x-1}{2-z}dx + \frac{y+1}{2-z}dy.$$

Приравнивая к нулю частные производные первого порядка, получаем точки возможного экстремума $M_1(1, -1, -2)$, $M_2(1, -1, 6)$.

Дифференцируя дважды равенство (5.3), получим:

$$dx^2 + dy^2 + z\,d^2z + dz^2 - 2d^2z = 0.$$

Отсюда находим дифференциал второго порядка

$$d^2z = \frac{1}{2-z}dx^2 + \frac{1}{2-z}dy^2 + \frac{1}{2-z}dz^2,$$

который представляет собой квадратичную форму от переменных dx, dy, dz.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$. Согласно критерию Сильвестра, d^2z является положительно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz, следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11} = 1/4 > 0$, то $M_1(1, -1, -2)$ является точкой локального минимума, $z_{\min} = -2$.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$. Согласно критерию Сильвестра, d^2z является отрицательно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz, следовательно, в точке M_2 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11} = -1/4 < 0$, то $M_2(1, -1, 6)$ является точкой локального максимума, $z_{\max} = 6$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти экстремум функций двух переменных:

а) $z = x^2 + xy + y^2 - x - 6y$; г) $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;

б) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$; д) $z = e^{-x^2-y^2}\left(3x^2 + y^2\right)$;

в) $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$; $x > 0$; $y > 0$; е) $z = xy\ln\left(x^2 + y^2\right)$

2 Найти экстремум функций трех переменных:

а) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 8y - 6z + 40$;

б) $u = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3 Найти экстремум функции, заданной неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 9 = 0.$$

Задания для домашней работы

1 Найти экстремум функций двух переменных:

а) $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$; г) $z = e^{-x^2-y^2}\left(x^2 + 2y^2\right)$;

б) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$; д) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

в) $z = xy^2(1 - x - y)$, $x, y > 0$; е) $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} + y$.

2 Найти экстремум функций трех переменных:

а) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$;

б) $u = (x + y + z)e^{-x^2-y^2-z^2}$.

3 Найти экстремум функции, заданной неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0.$$

Практическое занятие 6 Условный экстремум

6.1 Понятие условного экстремума

Рассмотрим функцию $f(P)$, $P(x_1; x_2; ...; x_n)$. Будем считать, что ее аргументы являются связанными между собой

$$\begin{cases} F_1(x_1; x_2; ...x_n) = 0, \\ F_2(x_1; x_2; ...x_n) = 0, \\ ...., \\ F_k(x_1; x_2; ...x_n) = 0. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Соотношения (6.1) называются *уравнениями связи.* Пусть координаты точки $P_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Говорят, что функция $f(P)$ имеет в точке $P_0\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$ *условный минимум (максимум)* при условиях связи (6.1), если существует такая δ-окрестность точки P_0, что для любой точки $P(x_1; x_2; ...; x_n) \in U(\delta; P_0)$, $P \neq P_0$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (6.1), выполняется неравенство

$$f(P) > f(P_0) \qquad (f(P) < f(P_0)).$$

В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значение функции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой δ-окрестности точки P_0, а только в тех ее точках, которые связаны между собой условиями связи.

Рассмотрим методы нахождения условного экстремума функции $f(x, y)$, переменные x и y которой удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x, y) = 0$.

6.2 Метод исключения части переменных

Пусть требуется найти локальный экстремум функции $f(x,y)$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y)=0$.

Если уравнение связи можно однозначно разрешить относительно переменной y, т. е. выразить y как функцию x: $y=y(x)$, то, подставив в аналитическое выражение функции $f(x,y)$ вместо y функцию $y(x)$, получается функция одной переменной $f(x,y(x))$. Для этой функции проводится исследование на локальный экстремум известными методами. Найденные экстремумы являются точками условного экстремума для функции $f(x,y)$. Аналогично поступают, если уравнение $\varphi(x,y)=0$ можно однозначно разрешить относительно переменной x, т. е. x выразить как функцию y.

Если условие связи задается параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in T$, то, подставляя x и y в аналитическое выражение функции $f(x,y)$, приходим к задаче отыскания экстремума функции одной переменной.

Если уравнение связи нельзя разрешить относительно какой-либо одной из переменных или представить параметрическими уравнениями, данная задача значительно усложняется.

6.3 Метод Лагранжа

Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $f(x,y)$, не разрешая уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ относительно переменной x или y.

Введем вспомогательную функцию, называемую *функцией Лагранжа*:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

где λ – некоторое действительное число.

Теорема 1 (необходимое условие Лагранжа условного экстремума) Пусть 1) функция $f(x,y)$ определена и дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи $\varphi(x,y)=0$; 2) уравнение $\varphi(x,y)=0$ удовлетворяет в δ-окрестности точки P_0 условиям теоремы 2 практического занятия 3.

Тогда существует такое число λ, что

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0. \qquad (6.2)$$

Согласно этой теореме для нахождения условного экстремума функции $f(x,y)$ с уравнением связи $\varphi(x,y)=0$ необходимо составить функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda)$ и провести ее полное исследование на локальный экстремум как функции трех переменных x, y, λ.

Метод множителей Лагранжа имеет место и для функции многих переменных $f(x_1;x_2;...;x_n)$.

6.4 Глобальный экстремум функции двух переменных

Пусть функция $f(x,y)$ определена на компакте D. Тогда на нем она достигает своих наименьшего и наибольшего значений либо внутри D, либо на границе.

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения на компакте называются *точками глобального экстремума*. Если точка глобального экстремума функции является внутренней точкой области, то она является точкой локального экстремума, а если граничной, то – точкой условного экстремума. Следовательно, чтобы найти глобальные экстремумы функции $f(x;y)$ на компакте D, необходимо найти локальные и условные экстремумы функции, сравнить найденные значения и выбрать наибольшее и наименьшее.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется условным экстремумом функции?
2 В чем состоит метод исключения части переменных?

3 Какая функция называется функцией Лагранжа?

4 Сформулируйте теорему о необходимых условиях Лагранжа условного экстремума.

5 В чем состоит метод Лагранжа?

6 Как найти глобальные экстремумы функции?

Решение типовых примеров

1 Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при уравнении связи $x + y - 1 = 0$.

Решение. <u>1 способ.</u> Для решения воспользуемся методом исключения переменных. Выражая из уравнения связи переменную y и подставляя ее в функцию, получим функцию одной переменной x:

$$z = 2x^2 - 2x + 1.$$

Исследуем ее на локальный экстремум:

$z' = 4x - 2$, $z'' = 4 > 0$,

$z' = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, точка $x = \dfrac{1}{2}$ есть точка локального минимума для функции $z = 2x^2 - 2x + 1$, а соответственно точка $P\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ есть точка условного минимума функции $z = x^2 + y^2$ при уравнении связи $x + y - 1 = 0$.

<u>2 способ.</u> Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Находим частные производные функции Лагранжа по переменным x, y и λ:

$$L'_x = 2x + \lambda,\; L'_y = 2y + \lambda,\; L'_\lambda = x + y - 1.$$

Решим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 0{,}5$, $y_0 = 0{,}5$, $\lambda = -1$, т. е. точка $P_0(0{,}5; 0{,}5; -1)$ единственная точка возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как $L''_{xx} = 2$, $L''_{yy} = 2$, $L''_{\lambda\lambda} = 0$, то дифференциал второго порядка

$$d^2L = 2dx^2 + 2dy^2$$

является квадратичной формой от переменных dx, dy. В точке $P_0(0{,}5; 0{,}5; -1)$ матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ и $a_{11} = 2 > 0$. Следовательно, в точке $P_0(0{,}5; 0{,}5; -1)$ функция Лагранжа имеет локальный минимум. Тогда функция $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y - 1 = 0$ имеет в точке $M_0(0{,}5; 0{,}5)$ условный минимум.

2 Найти экстремум функции $z = 9 - 8x - 6y$, если $x^2 + y^2 = 25$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x; y; \lambda) = 9 - 8x - 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Находим ее частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -8 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -6 + 2\lambda y, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25.$$

Решая систему

$$\begin{cases} -8 + 2\lambda x = 0, \\ -6 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 25 = 0, \end{cases}.$$

получим

$$x_1 = 4,\; y_1 = 3,\; \lambda_1 = 1;$$

$$x_2 = -4\,,\; y_2 = -3\,,\; \lambda_2 = -1\,,$$

т. е. точки $P_1(4;3;1)$. $P_2(-4;-3;-1)$ являются точками возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda\,,\; \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0\,,\; \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda\,,$$

то выражение для второго дифференциала есть

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Видно, что $d^2L\big|_{P_1} > 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 2 > 0$, то функция $L(x;y;\lambda)$ имеет в точке P_1 минимум. Следовательно, функция $z = 9 - 8x - 6y$ при уравнении связи $x^2 + y^2 = 25$ в точке $M_1(4;3)$ имеет условный минимум, $z_{\min} = z(4;3) = -41$.

Аналогично, $d^2L\big|_{P_2} < 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right|_{P_1} = -2 < 0$; функция $L(x;y;\lambda)$ имеет в точке P_2 максимум; функция $z = 9 - 8x - 6y$ при уравнении связи $x^2 + y^2 = 25$ в точке $M_2(-4;-3)$ имеет условный максимум, $z_{\max} = z(-4;-3) = 59$.

3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ на компакте D, ограниченном осью Oy, прямой $y = 2$ и параболой $y = \dfrac{1}{2}x^2$ при $x \geq 0$ (рисунок 6. 1).

Решение. Определим локальные экстремумы функции. Для этого вычислим частные производные:

$$z'_x = 6x^2 - 6y\,,\; z'_y = -6x + 6y\,.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0, \\ -6x + 6y = 0, \end{cases}$$

получаем две точки возможного экстремума $O(0;0)$ и $M(1;1)$.

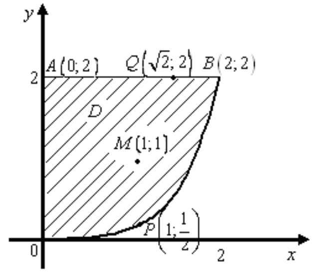

Рисунок 6. 1 – Область D типового примера 3

Внутренней точкой компакта D является только $M(1;1)$. Поскольку $z''_{xx} = 12x$, $z''_{yy} = 6$, $z''_{xy} = -6$ и

$$\Delta(M) = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 36\,,\; z''_{xx}\big|_M = 12 > 0\,,$$

то точка $M(1;1)$ является точкой локального минимума, $z_{\min} = -1$.

Исследуем функцию на границе области.

Уравнение прямой OA есть $x = 0$ и, следовательно,

$$z = 3y^2 \;\; (0 \leq y \leq 2).$$

Функция $z = 3y^2$ является возрастающей функцией одной переменной y на отрезке $[0;2]$, наибольшее и наименьшее значения она принимает в точке $O(0;0)$ и $A(0;2)$.

Уравнение прямой AB есть $y = 2$, и поэтому здесь функция

$$z = 2x^2 - 12x + 12 \;\; (0 \leq x \leq 2)$$

представляет собой функцию одной переменной x. Так как $z'_x = 6x^2 - 12$, то из уравнения $z'_x = 0$ получим $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$. Внутри отрезка $[0;2]$ находится только точка $x_1 = \sqrt{2}$, которой соответствует точка $Q(\sqrt{2};2)$. Глобальные экстремумы функции z на отрезке AB могут достигаться среди ее значений в точках A, Q и B.

На дуге параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$ имеем:

$$z=\frac{3}{4}x^4-x^3, \ (0\le x\le 2).$$

Так как $z'_x=3x^3-3x^2$, то из уравнения $x^2(x-1)=0$ находим точки возможного экстремума $x_1=0$, $x_2=1$, которым соответствуют точки $O(0;0)$ и $P\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-6xy+3y^2$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках O, A, Q, B, P, M, т. е. среди значений

$z(O)=z(0;0)=0$, $\quad z(B)=z(2;2)=4$,

$z(A)=z(0;2)=12$, $\quad z(P)=z(1;1/2)=-\frac{1}{4}$,

$z(Q)=z(\sqrt{2};2)=12-8\sqrt{2}$, $\quad z(M)=z(1;1)=-1$.

Откуда $\max\limits_D z=z(A)=12$, $\min\limits_D z=z(M)=-1$.

4 Из всех прямоугольных параллелепипедов с одинаковой площадью поверхности найти тот, который имеет наибольший объем.

Решение. Обозначим длину, ширину и высоту параллелепипеда через x, y, z. И пусть V – объем параллелепипеда, S – его площадь. Тогда

$$V=xyz,$$
$$S=2xy+2yz+2xz.$$

Задача сводится к нахождению экстремума функции $V(x;y;z)=xyz$ при условии $2xy+2yz+2xz=S$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x;y;z;\lambda)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа:

$$L'_x=yz+\lambda(2y+2z),$$
$$L'_y=xz+\lambda(2x+2z),$$
$$L'_z=xy+\lambda(2x+2y),$$
$$L'_\lambda=2xy+2yz+2xz.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases}2xy+2yz+2xz=S\\ yz+\lambda(2y+2z)=0,\\ xz+\lambda(2x+2z)=0,\\ xy+\lambda(2x+2y)=0,\end{cases}$$

получаем $x=\sqrt{\frac{S}{6}}$, $y=\sqrt{\frac{S}{6}}$, $z=\sqrt{\frac{S}{6}}$, $\lambda=-\frac{1}{24}\sqrt{\frac{6}{S}}$, т. е. при $\lambda=-\frac{1}{24}\sqrt{\frac{6}{S}}$ имеем единственную точку $P\left(\sqrt{S/6},\sqrt{S/6},\sqrt{S/6}\right)$ возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как

$$L''_{xx}=L''_{yy}=L''_{zz}=0,$$
$$L''_{xy}=z-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}},\ L''_{xz}=y-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}},\ L''_{yz}=x-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}},$$

то дифференциал второго порядка в точке $P\left(\sqrt{S/6},\sqrt{S/6},\sqrt{S/6}\right)$ имеет вид

$$d^2L=2\left(\sqrt{\frac{S}{6}}-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}}\right)(dxdy+dxdz+dydz).$$

Главные миноры соответствующей матрицы квадратичной формы неотрицательны при $S>3$. Поэтому можно считать, что в найденных значениях x, y, z объем будет наибольшим.

Следовательно, прямоугольный параллелепипед с заданной площадью поверхности S, имеющий наибольший объем

$$V_{\max}=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}},$$

является кубом со стороной $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти условные экстремумы функций:

а) $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$ при $x+y+3=0$;

б) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$;

в) $z = xy^2$ при $x^2 + y^2 = 1$;

г) $u = xy^2z^3$ при $x + 2y + 3z = 12$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

2 Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных областях:

а) $z = xy^2 + 4xy + 4x - 8$ в области $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 0$;

б) $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \le 1$;

в) $z = 1 + 2x + 2y$ в области $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

3 Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d, имеющей наибольший объем.

4 Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

5 В прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

6 На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку наиболее удаленную от точки $P(0;0;3)$.

7 Точки A и B расположены в различных оптических средах, отделенных одна от другой плоскостью A_1B_1. Скорость распространения света в первой среде равна v_1, во второй – v_2. Пользуясь принципом Ферма, вывести закон преломления светового луча (рисунок 6. 2). (Принцип Ферма: световой луч распространяется вдоль той линии, для прохождения которой требуется минимум времени.)

Задания для домашней работы

1 Найти условные экстремумы функций:

а) $z = 8 - 2x - 4y$ при $x^2 + 2y^2 = 12$;

б) $z = x^2 - y^2$ при $x + 2y = 6$;

в) $z = xy^2$ при $x^2 + y^2 = 4$;

г) $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

2 Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных областях:

а) $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 3$;

б) $z = x^2 + y^2$ в области $x^2 + y^2 \le 9$;

в) $z = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.

3 В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

4 Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную сумму длин ребер $12a$, найти параллелепипед с наибольшим объемом.

5 Представить положительное число в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.

6 Найти наименьшее из расстояний между точками параболы $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

7 Пользуясь принципом Ферма, вывести закон отражения светового луча от плоскости в однородной среде (рисунок 6.3).

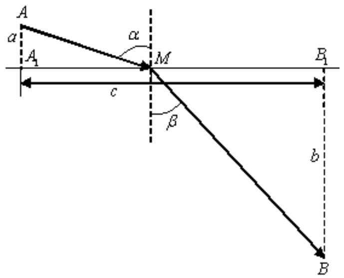

Рисунок 6. 2 – Рисунок к задаче 7 аудиторной работы

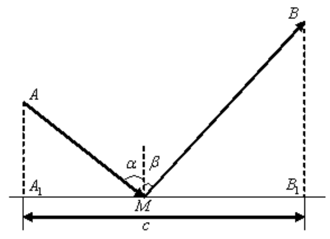

Рисунок 6. 3 – Рисунок к задаче 7 домашней работы