Тема 1 Числовые и функциональные ряды

Практическое занятие 1 Ряды с неотрицательными членами

1.1 Определение числового ряда, необходимый признак сходимости
1.2 Простейшие свойства числовых рядов, критерий Коши сходимости ряда
1.3 Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

1.1 Определение числового ряда, необходимый признак сходимости

Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ – числовая последовательность. Выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + ...$$

называется *числовым рядом*, числа a_1, a_2, …, a_k, … – членами ряда, а число a_k – k-м или *общим членом* ряда.

Сумма конечного числа n первых членов

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется n-й *частичной суммой* данного ряда.

В частности,

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

……………………

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

………………………… .

Если для последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *сходящимся*, а число S – *суммой* данного ряда:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Если предел последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ не существует или равен бесконечности, то ряд называют *расходящимся*.

Теорема 1 (необходимое условие сходимости числового ряда) Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то предел общего члена равен нулю: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Выражение вида $a_{n+1} + a_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, представляющее собой числовой ряд, называется n*-м остатком* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и обозначается $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ или $r_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

Для сходящегося ряда можно записать равенство

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n .$$

Теорема 2 Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ необходимо и достаточно, чтобы любой его остаток r_n сходился.

Очевидно, что если числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, т. е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 .$$

Следовательно, отбрасывание любого конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.

1.2 Простейшие свойства числовых рядов, критерий Коши сходимости ряда

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\ ,\ a_k \ge 0 \quad \forall\ k \in \mathbf{N}$$

называется *рядом с неотрицательными членами.*

Для рядов с неотрицательными членами справедливы следующие свойства:

– перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость);

– если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и их суммы равны S_a и S_b соответственно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = S_a + S_b\ .$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ называется *суммой рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$;

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot S\ .$$

Ряд $\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *произведением ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *на число* α ;

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то и ряд, полученный группировкой его членов без изменения порядка их расположения, также сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.

Т е о р е м а 3 (к р и т е р и й К о ш и с х о д и м о с т и р я д а) Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $N(\varepsilon)$, *что для всех* $k > N(\varepsilon)$ *и всех* $\forall\ p \in \mathbf{N}$ *имело место неравенство:*

$$\left|a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+p}\right| < \varepsilon\ .$$

1.3 Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Т е о р е м а 4 Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм* (S_n) *этого ряда была ограничена.*

Т е о р е м а 5 (и н т е г р а л ь н ы й п р и з н а к К о ш и) Если неотрицательная интегрируемая функция $f(x)$ *на промежутке* $[1;+\infty)$ *монотонно убывает, и члены ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *имеют вид* $a_k = f(k)$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно, причем в случае сходимости имеет место неравенство:*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1\ .$$

Т е о р е м а 6 (п р и з н а к с р а в н е н и я) Пусть для членов рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *справедливо неравенство* $0 \le a_k \le b_k$ $\forall k \ge n_0 \in \mathbf{N}$. *Тогда:*

1) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится,*

2) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится.*

Следствие (предельный признак сравнения) Пусть для членов рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k > 0)$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ $(b_k > 0)$ *существует конечный предел:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = A, \; A \neq 0.$$

Тогда ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Для исследования на сходимость рядов с помощью признаков сравнения используются ряды:

– ряд из элементов геометрической прогрессии: $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$, $(a \neq 0)$, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \geq 1$;

– обобщенный гармонический ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \leq 1$.

Теорема 7 (признак Д'аламбера) Пусть для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k > 0)$ *существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L.$$

Тогда при $L < 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а при* $L > 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Вопрос о сходимости ряда остается открытым, если $L = 1$.

Теорема 8 (признак Коши) Пусть для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k > 0)$ *существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L.$$

Тогда при $L < 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а при* $L > 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Вопрос о сходимости ряда остается открытым, если $L = 1$.

Из существования предела $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ следует, что существует и предел $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$. Обратное утверждение не всегда имеет место, т. е. признак Коши «сильнее» признака Д'аламбера.

Вопросы для самоконтроля

1 Какое выражение называется числовым рядом?
2 Что называется суммой ряда?
3 Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда.
4 Какое выражение называется остатком ряда?
5 Перечислите простейшие свойства сходящихся числовых рядов.
6 Сформулируйте критерий Коши сходимости ряда.
7 Какие ряды называются рядами с неотрицательными членами?
8 Сформулируйте интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами.
9 Сформулируйте признаки сравнения сходимости рядов с неотрицательными членами.
10 Сформулируйте признак Д'аламбера сходимости рядов с неотрицательными членами.
11 Сформулируйте признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.

Решение типовых примеров

1 Записать первые пять членов ряда, общий член которого задан формулой $a_k = \dfrac{k}{2^{k-1}(3k+1)}$.

Решение. Полагая в формуле общего члена $k = 1$, 2, 3, 4, 5, получим

$$a_1 = \frac{1}{2^{1-1}(3 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = \frac{2}{2^{2-1}(3 \cdot 2 + 1)} = \frac{2}{14},$$

$$a_3 = \frac{3}{2^{3-1}(3 \cdot 3 + 1)} = \frac{3}{40},$$

$$a_4 = \frac{4}{2^{4-1}(3 \cdot 4 + 1)} = \frac{4}{104},$$

$$a_5 = \frac{5}{2^{5-1}(3 \cdot 5 + 1)} = \frac{5}{256}.$$

Ряд можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}(3k+1)} = \frac{1}{4} + \frac{2}{14} + \frac{3}{40} + \frac{4}{104} + \frac{5}{256} + \ldots .$$

2 Найти общий член ряда

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \ldots .$$

Решение. Показатель степени каждого члена совпадает с номером этого члена, поэтому показатель степени k-го члена равен k.

Числители дробей $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{15}$, … образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью 1. Поэтому k-й числитель равен $k+1$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию с первым членом 3 и разностью 4. Поэтому

k-й знаменатель равен $4k-1$. Следовательно, общий член ряда имеет вид $a_k = \left(\dfrac{k+1}{4k-1}\right)^k$.

3 Вычислить сумму ряда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Решение. Поскольку

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right),$$

то

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right),\ a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right),$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right),\ a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right),$$

…………………………………..….

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Значит, ряд сходится и сумма ряда равна $\frac{1}{2}$.

4 Исследовать сходимость рядов:

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a$, $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a q^{k-1}$, $a \neq 0$.

Решение. а) для ряда

$$a-a+a-a+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a$$

составим частичные суммы:

$$S_1=a,\ S_2=0,\ \ldots,\ S_{2n-1}=a,\ S_{2n}=0,\ \ldots.$$

Последовательность частичных сумм (S_n) этого ряда не имеет предела и поэтому данный ряд расходится;

б) сумма n первых членов ряда

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{k-1}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$$

имеет вид

$$S_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q},\ q\neq 1.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, \text{ если } |q|<1,\\ \infty, \text{ если } |q|>1,\end{cases}$$

то

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q}, \text{ если } |q|<1,\\ \infty, \quad\ \text{ если } |q|>1.\end{cases}$$

При $q=-1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$ совпадает с рядом $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a$, при $q=1$, $S_n=na$ и $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$.

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$ сходится при $|q|<1$ и его сумма $S=\dfrac{a}{1-q}$, при $|q|\geq 1$ он расходится.

5 Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k$

Решение. Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e\neq 0.$$

Согласно теореме 1 не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Значит, данный ряд расходится.

6 Исследовать сходимость *гармонического ряда*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Решение. Очевидно, что $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{k}=0$, однако гармонический ряд расходится. Докажем, что гармонический ряд расходится двумя способами.

<u>1 способ</u>. Действительно, предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ сходится и его сумма равна S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0.$$

Из неравенства

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},\ n\in\mathbf{N},$$

предельным переходом по n получаем противоречие: $0\geq\dfrac{1}{2}$.

<u>2 способ</u>. Имеем:

$$\left|a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+p}\right|=\left|\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+p}\right|=$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+p}.$$

Для любого $t\in\mathbf{N}$ положим $k=t$ и $p=t$. Так как $\dfrac{1}{t+i}\geq\dfrac{1}{t+t}$, $i=1,2,\ldots,t$,то получим:

$$\left|a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+p}\right|>\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}+\ldots+\frac{1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, для любого $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$ критерий Коши не выполняется. Следовательно, гармонический ряд расходится.

7 Исследовать сходимость *обобщенного гармонического ряда* (*ряда Дирихле*)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p},\ \ p\in\mathbf{R}.$$

Решение. При $p=1$ ряд совпадает с гармоническим рядом и расходится.

Если $p\le 0$, то $\frac{1}{k^p}\ge 1\ \ \forall k\in\mathbf{N}$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k^p}\ne 0$. В этом случае ряд расходится, так как нарушается необходимое условие сходимости ряда.

Пусть $p>0$ и $p\ne 1$. Положим $f(x)=\frac{1}{x^p}$. Функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty)$.

Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ сходится и расходится одновременно с интегралом $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$.

Известно, что несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}, & \text{если } p>1,\\ \infty, & \text{если } 0<p<1.\end{cases}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

8 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}$; в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^k$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{k}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^4}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}$.

Решение. а) так как $\frac{1}{k^k}\le\frac{1}{k^2}\ \ \forall k\ge 2$ и обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится ($p=2>1$), то согласно признаку сравнения сходится и данный ряд;

б) сравним ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{k}$ с гармоническим рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Поскольку

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}}=\pi,\ \ 0<\pi<\infty,$$

и гармонический ряд расходится, то расходится и исходный ряд;

в) вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+1)!\,k^k}{(k+1)^{k+1}k!}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^n}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{1}{e}.$$

Так как $L=\frac{1}{e}<1$, то по признаку Д'аламбера данный ряд сходится;

г) вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}k^4}{(k+1)^4\cdot 2^k}=2\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^4}=2.$$

Так как $L=2>1$, то согласно признаку Д'аламбера исходный ряд расходится;

д) так как

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{2k}{k+1}\right)^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{k+1}=2>1,$$

то согласно признаку Коши данный ряд расходится;

е) сравним ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}$ с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}}{\dfrac{1}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(3k^2+5k+1\right)k^2}{k^4-10k^2-5}=3,\ 0<3<\infty .$$

Поскольку для ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ имеем $p=2$, то исходный ряд сходится вместе с обобщенным гармоническим рядом.

Задания для аудиторной работы

1 Записать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

а) $a_k=\frac{k}{3^k(2k+1)}$;

б) $a_k=\frac{k!}{2^k(2k-1)!!}$;

в) $a_k=\frac{3k+4}{4k-1}$;

г) $a_k=\frac{(2k+1)!!}{(k+1)2^k}$.

2 Записать формулу общего члена для рядов:

а) $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots$;

б) $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\frac{10000}{13}+\ldots$;

в) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots$;

г) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$.

3 Найти суммы рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5^{k-1}}$.

4 Используя необходимое условие, исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{3k+2}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5k-2}{5k+3}$.

5 С помощью интегрального признака исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\ln^3 k}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2 k}$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+9}$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty}k^2e^{-k^3}$.

6 С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k+9}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+6}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{5^{2k}+7}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{\sqrt{k^4+9}}$;

д) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln k}$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k-1}$;

ж) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$;

и) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3-3k^2+5}{2k^5+9k}$.

7 С помощью признака Д’аламбера исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k5^{2k-1}}$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k}{3^k(2k-1)}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{k2^{k+1}}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k^4}$.

8 С помощью признака Коши исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k-1}{4k+5}\right)^k$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2k^2+5k+2}{3k^2+k+3}\right)^k$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5k+2}{3k+4}\right)^k$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k^2+6k+8}{2k^2-k+6}\right)^k$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{k}{k+4}\right)^{k^2}$;   е) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{k+5}\right)^k \left(\frac{k+2}{k+3}\right)^{k^2}$.

Задания для домашней работы

1 Записать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

а) $a_k = \frac{k+1}{3^{k+1}(k+1)}$;   в) $a_k = \frac{2k+3}{3k-1}$;

б) $a_k = \frac{k!}{2^k(2k^2-1)}$;   г) $a_k = \frac{k^2+1}{k!}$.

2 Записать формулу общего члена для рядов:

а) $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{1\cdot 2} + \frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$;   в) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$;

б) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$;   г) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \ldots$.

3 Найти суммы рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$;   в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$;   г) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$.

4 Используя необходимое условие, исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k-1}{3k+1}$;   б) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{5k+4}$.

5 С помощью интегрального признака исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[5]{k}}$;   г) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+9)\ln(2k+9)}$;   д) $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-k^4}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-2)\ln^4(k-2)}$;   е) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(2n)}}$.

6 С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+1}$;   д) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^4-k^2+10}}{3k^4+5k-6}$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^3+2}$;   е) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k(2^k+1)}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k-3}$;   ж) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^4+2k^2}}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^2+k-6}{15k^3-2k+4}$;   и) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+1}{3^k+7}$.

7 С помощью признака Даламбера исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}}$;   в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{10}{11}\right)^k k^5$;   г) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{11}{10}\right)^k \frac{1}{k^5}$.

8 С помощью признака Коши исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5k+2}{4k-1}\right)^k$;   г) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5k+1}{7k+4}\right)^k$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k^2+4k+1}{3k^2+2k+3}\right)^k$;   д) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k^2+k+1}{3k^2+7k+16}\right)^k$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \left(\frac{k}{2k-1}\right)^{k^2}$;   е) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+4}\right)^k \left(\frac{2k-1}{k+3}\right)^{k^2}$.

Практическое занятие 2 **Знакопеременные ряды**

2.1 Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница
2.2 Абсолютно и условно сходящиеся ряды
2.3 Признаки Дирихле и Абеля

2.1 Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница

Знакочередующимся называется ряд, все члены которого поочередно меняют знак:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{k-1}a_k + \ldots,$$

где a_k, $k = 1,2,\ldots$, – числа одного знака.

Теорема 1 (признак Лейбница) Пусть члены знакочередующегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ *удовлетворяют условиям:*

1) $a_k \geq a_{k+1}$ $\forall k \in \mathbf{N}$;

2) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ *сходится, а его сумма* S *не превосходит первого члена, т. е.* $S \leq a_1$.

Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 1 называется *рядом Лейбница*.

Остаток $r_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots)$ ряда Лейбница удовлетворяет неравенству $|r_n| \leq a_{n+1}$.

Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются *знакопеременными*.

2.2 Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд с неотрицательными членами $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ сходится.

Теорема 2 Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

Обратное утверждение в общем случае не имеет места.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают *свойствами*:

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ абсолютно сходится и $\sum_{k=1}^{\infty}a_k = S$, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \sigma$, то $|S| \leq \sigma$;

– если ряды $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ абсолютно сходятся, то при любых α и β ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ абсолютно сходится;

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ абсолютно сходится, то ряд, составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна сумме исходного ряда;

– если ряды $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $a_k b_m$ членов этих рядов, расположенных в любом порядке, также абсолютно сходится.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется *условно сходящимся*.

Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ обозначим через a_1^+, a_2^+, …, a_k^+, … и a_1^-, a_2^-, …, a_k^-, … соответственно его неотрицательные и отрицательные члены, взятые в том же порядке, в котором они расположены в ряде $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$. Рассмотрим ряды $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^-$, члены которых неотрицательны.

Теорема 3 Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *условно сходится, то оба ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ *расходятся.*

Теорема 4 (Римана) Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *условно сходится, то, каково бы ни было действительное число* s*, можно так переставить его члены, что сумма получившегося ряда будет равна* s.

2.3 Признаки Дирихле и Абеля

Для исследования сходимости знакопеременных рядов часто используются признаки Дирихле и Абеля.

Теорема 5 (признак Дирихле) Пусть

1) последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *монотонна и* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$,

2) последовательность сумм $(B_n)_{n=1}^{\infty}$, $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, *ограничена.*

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Теорема 6 (признак Абеля) Пусть

1) последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *ограничена и монотонна,*

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится.*

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Вопросы для самоконтроля

1 Какой ряд называется знакочередующимся?
2 Сформулируйте признак Лейбница.
3 Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
4 Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

5 Какой ряд называется условно сходящимся?
6 Какими свойствами обладают условно сходящиеся ряды?
7 Сформулируйте признак Дирихле.
8 Сформулируйте признак Абеля.

Решение типовых примеров

1 Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Решение. Так как $\frac{1}{k^2} > \frac{1}{(k+1)^2}$ $\forall k \in \mathbf{N}$ и $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = 0$, то данный ряд, согласно признаку Лейбница, сходится.

2 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Решение. а) ряд, составленный из абсолютных величин исходного ряда, имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ и является сходящимся. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$ является абсолютно сходящимся;

б) по признаку Лейбница ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ сходится. С другой стороны, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ является расходящимся гармоническим рядом. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ не является абсолютно сходящимся.

3 Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$.

Решение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ является расходящимся, так как

$\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^k$ не существует.

Ряды

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$$

и

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\dots,$$

полученные из него путем объединения его членов, сходятся:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=0,$$

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\dots=1.$$

Таким образом, для исходного ряда сумма ряда не существует, а ряды, полученные из него указанным объединением его членов, имеют конечные суммы.

4 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k\alpha}{k}$.

Решение. Последовательность $(a)_{n=1}^{\infty}=\left(\dfrac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывающая и $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}=0$.

Рассмотрим последовательность $(B_n)_{n=1}^{\infty}=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\alpha\right)_{n=1}^{\infty}$. При $\alpha\neq 2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\dots+\sin n\alpha=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\dots+2\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}-\dots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha\right|\leq=\frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|+\left|\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

При $\alpha\neq 2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$, все рассматриваемые суммы ограничены. В силу признака Дирихле ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k\alpha}{k}$ сходится.

При $\alpha=2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$, все члены ряда обращаются в нуль и ряд также сходится.

5 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k\alpha}{k}\cos\dfrac{\pi}{k}$.

Решение. Последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}=\left(\cos\dfrac{\pi}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ ограничена и монотонна. Ряд сходится по признаку Дирихле. Согласно признаку Абеля ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k\alpha}{k}\cos\dfrac{\pi}{k}$ сходится.

6 Сколько членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^4}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,0001?

Решение. Этот ряд является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям признака Лейбница:

$$1>\frac{1}{2^4}>\frac{1}{3^4}>\dots>\frac{1}{k^4}>\dots,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^4}=0.$$

Следовательно, данный ряд сходится, причем абсолютно, поскольку ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^4}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

является сходящимся обобщенным гармоническим рядом ($p=4>1$).

Определим число членов, которые нужно взять, чтобы вычислить его сумму с заданной точностью.

Если

$$\frac{1}{k^4}<0{,}0001 \text{ или } \frac{1}{k^4}<\frac{1}{10000},$$

то $k>10$.

Следовательно, нужно взять 10 членов данного ряда.

Так как $a_{11}=\frac{1}{11^4}<\frac{1}{10^4}=0{,}0001$, то оценка ряда есть

$$R_{10}<a_{11}<0{,}0001.$$

7 Составить сумму рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}$. Сходится ли полученный ряд?

Решение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ есть геометрический со знаменателем $q_1=\frac{1}{2}$, его сумма $S_1=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$, второй $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}$ геометрический ряд со знаменателем $q_2=-\frac{1}{3}$, его сумма $S_2=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$.

По определению суммы двух рядов полученный ряд имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right).$$

Данный ряд сходится, его сумма

$$S=S_1+S_2=2{,}75.$$

Задания для аудиторной работы

1 Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{3^k}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)(k-2)}{2}}}{k^2}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-5)^k}{1+(-5)^{2k}}$; д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{3k-1}$;

в) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\ln k}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\alpha}{k^4}$.

2 Исследовать абсолютно или условно сходятся ряды:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{3k(3k-1)}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k\ln k)^2}$; д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(3^k+1)}{k\cdot 3^k}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+2^k}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!!}{(k+1)^k}$.

3 С точностью до 0,001 вычислить сумму рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\,2^k}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$; д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[3]{k+1}}$.

4 Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^k}+\frac{(-1)^k}{5^k}\right)$.

5 Составить ряд, полученный из разности соответствующих членов рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}$. Сходится ли полученный ряд?

6 Даны два ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}$. Записать первые пять членов их произведения. Сходится ли полученный ряд?

Задания для домашней работы

1 Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)(k-2)}{2}}}{5^k}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k^3}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4)^k}{1+(-4)^{2k}}$; д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt{k}}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k^5}$.

2 Исследовать, абсолютно или условно сходятся ряды:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt[4]{k}}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k+1)}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+5^k}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}$.

3 С точностью до 0,001 вычислить сумму рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k!)^2}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{5^k}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}$.

4 Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)$.

5 Составить ряд, полученный из разности соответствующих членов рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Сходится ли полученный ряд?

6 Даны два ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$. Записать первые пять членов их произведения. Сходится ли полученный ряд?