Тема 2 Определенный интеграл

Практическое занятие 1 **Формула Ньютона-Лейбница**

1.1 Определение интеграла Римана
1.2 Критерий интегрируемости Дарбу
1.3 Основные свойства определенного интеграла
1.4 Формула Ньютона-Лейбница

1.1 Определение интеграла Римана

Пусть функция $y=f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. И пусть τ_n – разбиение отрезка $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, точками $x_0,x_1,...,x_n$ (рисунок 1.1): $a=x_0<x_1...<x_{n-1}<x_n=b$. Тогда $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$.

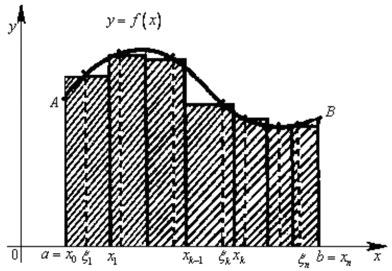

Рисунок 1.1 – Определение интеграла Римана

На каждом частичном отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму:

$$\sigma_n(f;\xi_k)=f(\xi_1)\Delta x_1+...+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (1.1)$$

Сумма (1.1) называется *интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ соответствующей данному разбиению τ_n отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_k, $k=\overline{1,n}$.

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения τ_n, называемая *диаметром разбиения*

$$\lambda=\max_{1\le k\le n}\Delta x_k.$$

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a;b]$ (или *интегрируемой по Риману*), если существует конечный предел при $\lambda\to 0$ интегральной суммы (1.1):

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=I \qquad (1.2)$$

Число I называется *определенным интегралом* (или *интегралом Римана*) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*, a и b – соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Класс всех функций $f(x)$, интегрируемых по Риману на отрезке $[a;b]$, обозначается $\mathrm{R}_{[a;b]}$.

Определение интеграла Римана на языке ε-δ формулируется следующим образом.

Число I называется *определенным интегралом* (или *интегралом Римана*) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что каково бы ни было разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, диаметр которого $\lambda<\delta$, и каковы бы ни были точки ξ_k, $k=\overline{1,n}$, выполняется неравенство

$$|\sigma_n(f;\xi_k)-I|<\varepsilon.$$

Интегральная сумма не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции. Следовательно, и ее предел, т.е.

определенный интеграл, не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy .$$

Обозначение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ похоже на обозначение неопределенного интеграла от той же функции $\int f(x)dx$. Вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла от той же подынтегральной функции (п.1.4). Однако между определенным и неопределенным интегралами имеется существенное различие: *определенный интеграл* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ есть некоторое число, в то время как *неопределенный интеграл* представляет собой множество всех первообразных функций $F(x)+C$ данной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости) Если $\int_a^b f(x)dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

1.2 Критерий интегрируемости Дарбу

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. Для произвольного разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ обозначим $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$ и $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$.

Нижней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n называется сумма

$$s_n(f;\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k .$$

Верхней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n называется сумма

$$S_n(f;\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k .$$

Если функция $f(x)$ ограничена, то нижние m_k и верхние M_k грани конечны. Тогда суммы Дарбу $s_n(f;\xi_k)$ и $S_n(f;\xi_k)$ при любом разбиении τ_n принимают конечные значения.

Нижним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I_* грань возможных ее нижних сумм Дарбу $s_n(f;\xi_k)$:

$$I_* = \sup_{\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_n} s_n(f;\xi_k).$$

Верхним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I^* грань возможных ее верхних сумм Дарбу $S_n(f;\xi_k)$:

$$I^* = \inf_{\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_n} S_n(f;\xi_k).$$

Очевидно, что $I_* \le I^*$.

Теорема 2 (Критерий Дарбу) Для того чтобы функция $y = f(x)$, ограниченная на отрезке $[a;b]$, была интегрируема по Риману на нем, необходимо и достаточно, чтобы суммы Дарбу удовлетворяли условию

$$\lim_{\lambda\to 0}(S_n - s_n) = 0 .$$

Следствия. 1 Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k = 0 ,$$

где $\omega_k(f) = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ – колебание функции $f(x)$ на частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ разбиения τ_n, $k = \overline{1,n}$.

2 Если функция $y = f(x)$ была интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$ и $s_n(f;\xi_k)$, $S_n(f;\xi_k)$ – ее суммы Дарбу, то

$$\lim_{\lambda\to 0} s_n = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \int_a^b f(x)dx .$$

Теорема 3 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 4 Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

1.3 Основные свойства определенного интеграла

Определенный интеграл обладает следующими свойствами:

– если нижний и верхний пределы интегрирования равны $(a=b)$, то интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,;$$

– если $f(x)=1$, то $\int_a^b dx = b-a$;

– при перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,;$$

– постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c \in \mathbf{R}\,;$$

– определенный интеграл от суммы (разности) конечного числа интегрируемых на $[a;b]$ функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ равен сумме (разности) определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b \left(f_1(x)\pm\ldots\pm f_n(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm\ldots\pm \int_a^b f_n(x)\,dx\,;$$

– *(аддитивность)* если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то существует также интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и справедливо

равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,,\ a \le c \le b\,.$$

Геометрический смысл свойства аддитивности состоит в том, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a;c]$ и $[c;b]$ (рисунок 1.2);

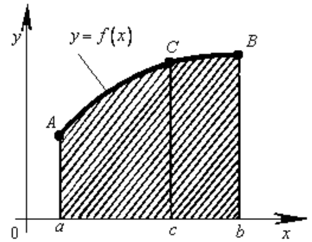

Рисунок 1.2 – Геометрический смысл свойства аддитивности

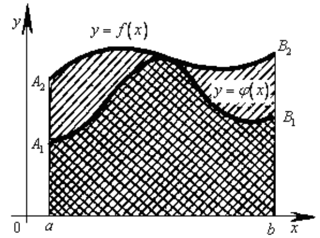

Рисунок 1.3– Геометрический смысл свойства монотонности

– *(интегрирование неравенств)* если $f(x)\ge 0\ \ \forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0\,,\ a<b\,;$$

– *(монотонность)* если интегрируемые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x)\ge\varphi(x)\ \ \forall x\in[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b \varphi(x)dx\,,\ a<b\,.$$

Геометрическая интерпретация данного свойства: площадь криволинейной трапеции aA_2B_2b не меньше площади криволинейной трапеции aA_1B_1b (рисунок 1.3);

– если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то и функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b f(x)dx\,;$$

– если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, то $\forall x \in [a;b]$ справедливо неравенство:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a); \qquad (1.3)$$

Геометрический смысл заключается в том, что площадь прямоугольника aA_1B_1b равна $m(b-a)$, площадь прямоугольника aA_2B_2b равна $M(b-a)$, а площадь криволинейной трапеции $aABb$ не меньше площади первого прямоугольника и не больше площади второго (рисунок 1.4).

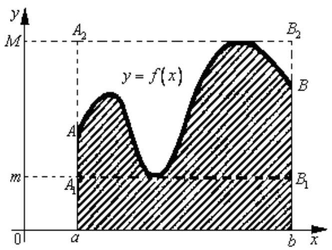

Рисунок 1.4 – Геометрический смысл неравенства (1.3)

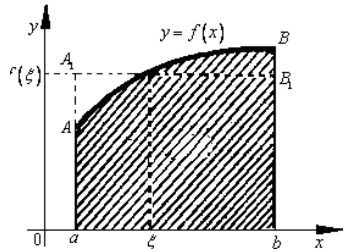

Рисунок 1.5 – Геометрический смысл неравенства (1.4)

– если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка $\xi \in [a;b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \qquad (1.4)$$

Число $f(\xi)$, называется *интегральным средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$*.

Геометрически данное свойство означает, что существует такая точка $\xi \in [a;b]$, для которой площадь прямоугольника aA_1B_1b равна площади криволинейной трапеции $aABb$.

1.4 Формула Ньютона-Лейбница

Пусть в определенном интеграле нижний предел интегрирования a остается постоянным, а верхний x изменяется так, что $x \in [a;b]$. Интеграл вида

$$\int_a^x f(t)dt = F(x), \; x \in [a;b],$$

называется *определенным интегралом с переменным верхним пределом* и является функцией верхнего предела x.

С *геометрической* точки зрения, функция $F(x)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции $aACx$ (рисунок 1.6).

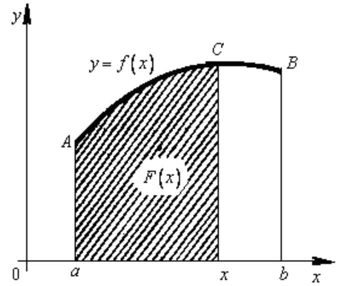

Рисунок 1.6 – Геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом

Интеграл вида

$$\int_x^b f(t)dt = G(x), \; x \in [a;b],$$

называется *определенным интегралом с переменным нижним пределом* и является функцией нижнего предела x.

Теорема 5 Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функции $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны на $[a;b]$.

Теорема 6 Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и непрерывна в точке $x \in [a;b]$, то функции $F(x)$, $G(x)$ дифференцируемы в этой точке и

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x), \qquad G'(x) = \left(\int_x^b f(t)dt\right)'_x = -f(x).$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a;b]$. Тогда на этом отрезке у нее существует первообразная. При этом для любой точки $x \in [a;b]$ функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных функций $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Совокупность всех первообразных непрерывной на некотором отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ представляет собой неопределенный интеграл:

$$\int_a^x f(t)dt = \int f(x)dx + C .$$

Таким образом, установлена связь между неопределенным и определенным интегралами.

Теорема 7 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – какая-нибудь первообразная на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Она также записывается в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b .$$

Формула Ньютона – Лейбница позволяет избавиться от вычисления определенных интегралов как пределов интегральных сумм, что позволяет вычисление определенного интеграла свести к вычислению неопределенного интеграла.

Теорема 8 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1;t_2]$, причем $\varphi([t_1;t_2]) = [a;b]$ и $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, то справедлива формула замены переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(x))\varphi'(t)dt .$$

При вычислении интеграла методом замены переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения изменяются соответственно и пределы интегрирования.

Теорема 9 Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными $u'(x)$, $v'(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u v' dx = u v\Big|_a^b - \int_a^b v u' dx .$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какая функция называется интегрируемой на отрезке?

2 Сформулируйте определение интеграла Римана.

3 Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функций.

4 Дайте определения верхних и нижних сумм Дарбу.

5 Дайте определения верхних и нижних интегралов. Сформулируйте критерий интегрируемости Дарбу.

6 Сформулируйте теорему об интегрируемости непрерывной на отрезке функции.

7 Является ли монотонная на отрезке функция интегрируемой на нем?

8 Перечислите основные свойства определенного интеграла.

9 Что называется определенным интегралом с переменным верхним пределом?

10 Является ли интеграл с переменным верхним пределом непрерывной функцией?

11 Можно ли дифференцировать интеграл по переменному верхнему пределу? При каких условиях это возможно?

12 Какая формула связывает неопределенный и определенный интегралы?

13 Сформулируйте теорему о замене переменной в определенном интеграле.

14 Сформулируйте теорему об интегрировании по частям в определенном интеграле.

Решение типовых примеров

1 Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 x^2dx$, рассматривая его как предел интегральных сумм.

Решение. Разделим отрезок интегрирования $[1;2]$ на n равных частей длины $\Delta x = \frac{1}{n}$. Точки деления

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1 + \frac{1}{n},\ x_2 = 1 + \frac{2}{n},\ \ldots,\ x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n},\ x_n = 2.$$

В качестве точек ξ_k выберем, например, левые концы каждого частичного отрезка. Тогда

$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2,\ \ldots,\ f(x_{n-1}) = \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{n}\left(1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (2n-1)^2\right) = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{2n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right).$$

Применяя формулу суммы квадратов целых чисел

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

находим

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = \frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2}.$$

Тогда

$$\int_1^2 x^2dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2} = \frac{7}{3}.$$

2 Оценить интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Решение. При $0 \le x \le 1$ имеем $1 \le 1 + x^4 \le 2$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \le 1.$$

Отсюда $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b - a = 1$.

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le I \le 1.$$

3 Найти $I'(x)$, если $I(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$.

Решение. Используя теорему 6, получим

$$I'(x) = \left(\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt\right)' = e^{-(x^2)^2}\cdot(x^2)' = 2xe^{-x^4}.$$

4 Вычислить интегралы с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;　　в) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}}$;

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$;　　г) $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx$.

Решение. а) имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1;$$

б) имеем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2;$$

в) имеем:

$$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int_1^6 (3+x)^{-1/2} d(3+x) = 2\sqrt{3+x}\Big|_1^6 = 2\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right) = 2;$$

г) имеем: $\int_{-1}^{0} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}\left(e^0 - e^2\right) = \frac{e^2-1}{2}$.

5 Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \begin{bmatrix} x = \sin t, \\ dx = \cos t dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

6 Вычислить интеграл $\int_1^e \ln x dx$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x;\ du = \frac{1}{x}dx; \\ dv = dx;\ v = x \end{bmatrix} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} x dx = e - \int_1^e dx =$$

$$= e - x\Big|_1^e = 1.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить по определению интегралы:

а) $\int_0^5 (1+x)dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

2 Определить знаки интегралов, не вычисляя их:

а) $\int_{-2}^{1} \sqrt[3]{x} dx$; б) $\int_{-1}^{1} x^3 e^x dx$.

3 Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

а) $\int_0^1 e^{-x} \cos^2 x\, dx$ и $\int_0^1 e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ и $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

4 Найти среднее значение функции на данном отрезке:

а) x^3, $[0;1]$; б) $\cos x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5 Оценить интегралы:

а) $\int_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3} dx$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$.

6 Доказать, что если функция $f(x)$ четная на $[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

7 Найти производные следующих функций:

а) $\int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} dt$; б) $\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \sin\left(t^2\right)dt$.

8 Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы:

а) $\int_{-2}^{2} x^3 dx$; г) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx$;

б) $\int_1^2 e^{-x} dx$; д) $\int_2^5 \frac{dx}{3x+1}$;

в) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$; е) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$.

9 Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$; б) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; в) $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

10 Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 x\arcsin x\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм:

а) $\int\limits_0^{10} e^x dx$; б) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{x^2}$.

2 Определить знаки интегралов, не вычисляя их:

а) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 x\ln x dx$; б) $\int\limits_{-3}^2 (1+x)dx$.

3 Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$ и $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3}$; б) $\int\limits_0^1 e^{-x}\sin^2 x\,dx$ и $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\sin^2 x\,dx$.

4 Найти среднее значение функции на данном отрезке:

а) $\sqrt[3]{x}$, $[0;1]$; б) $\cos^3 x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5 Оценить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \sqrt{(1+x^3)(1+x)}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$.

6 Доказать, что если функция $f(x)$ нечетная на $[-a;a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

7 Найти производные следующих функций:

а) $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$; б) $\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}$.

8 Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^2 (4x^3-2x+3)dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$;

б) $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx$; д) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-2x-8}$;

в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; е) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^2 x\,dx$.

9 Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$;

б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; г) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}dx$.

10 Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int\limits_0^1 xe^x dx$; б) $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin 2x\,dx$.

Практическое занятие 2 **Геометрические приложения определенного интеграла**

2.1 Площадь криволинейной трапеции
2.2 Длина дуги плоской кривой
2.3 Площадь поверхности вращения
2.4 Объем пространственного тела

2.1 Площадь криволинейной трапеции

Площадь криволинейной трапеции в декартовой системе координат. Если функция $y=f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции $\{(x;y)\,|\,a\le x\le b;\,0\le y\le f(x)\}$ (рисунок 2. 1) вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.1)$$

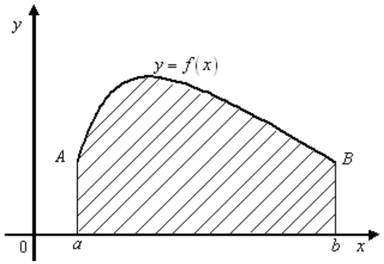

Рисунок 2. 1 –Криволинейная трапеция *aABb*

Если $f(x)<0\ \ \forall x\in[a;b]$, то и $\int_a^b f(x)dx\le 0$, $a<b$. Следовательно, площадь вычисляется по формуле:

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=-\int_a^b f(x)dx=-\int_a^b ydx.$$

Если же криволинейная трапеция ограничена кривой $x=\varphi(y)$, осью ординат Oy и прямыми $y=c$, $y=d$ (рисунок 2. 2), то ее площадь определяется формулами:

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy=\int_c^d xdy, \text{ если } \varphi(y)\ge 0\ \ \forall y\in[c;d],$$

$$S=\left|\int_c^d \varphi(y)dy\right|=-\int_c^d xdy, \text{ если } \varphi(y)\le 0\ \ \forall y\in[c;d],$$

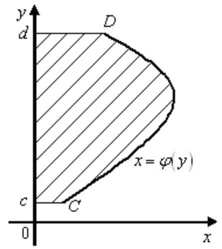

Рисунок 2. 2 – Криволинейная трапеция для функции $x=\varphi(y)$

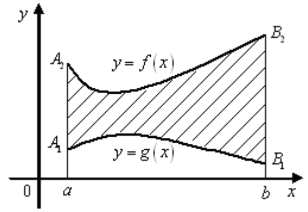

Рисунок 2. 3 – Криволинейная трапеция, ограниченная $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$

Если надо вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$, то эту площадь рассматривают как разность площадей двух криволинейных трапеций aA_2B_2b и aA_1B_1b (рисунок 2. 3). В этом случае можно воспользоваться одной из формул:

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx, \text{ если } f(x)\ge g(x)\ \ \forall x\in[a;b],$$

$$S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx, \text{ если } g(x)\ge f(x)\ \ \forall x\in[a;b].$$

В параметрическом виде. Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной уравнениями в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $t_1\le t\le t_2$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$, причем $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$, то ее площадь S при $y(t)\ge 0$ вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \qquad (2.2)$$

которая получается заменой переменной

$$x = x(t),\ y = y(t),$$

$$dx = x'(t)dt .$$

Пределы t_1, t_2 определяют из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

В полярной системе координат. Пусть фигура ограничена кривой l, заданной в полярной системе координат $\{O, r, \varphi\}$ уравнением

$$r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta .$$

Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная линией $r = r(\varphi)$ и радиус-векторами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (рисунок 2. 4).

При этом криволинейный сектор является *правильной фигурой*, если любой луч $\varphi = \varphi^*$, $\alpha \le \varphi^* \le \beta$, исходящий из полюса O, пересекает кривую $r = r(\varphi)$ не более чем в одной точке. И пусть функция $r = r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$.

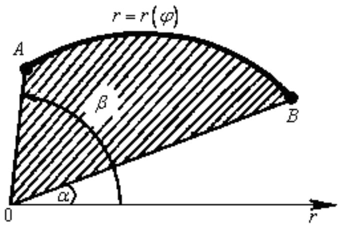

Рисунок 2. 4 – Криволинейный сектор

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi . \qquad (2.3)$$

2.2 Длина дуги плоской кривой

В декартовой системе координат. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дуга $\overset{\smile}{AB}$ – график этой функции, заключенный между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (рисунок 2. 5).

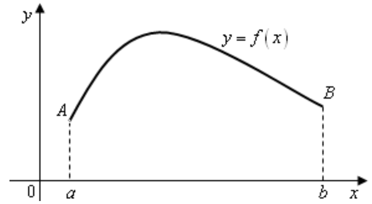

Рисунок 2. 5 –Дуга $\overset{\smile}{AB}$

Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то длина l дуги $\overset{\smile}{AB}$, вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx . \qquad (2.4)$$

Кривая $y = f(x)$ называется *спрямляемой*, если $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$.

В параметрическом виде. Пусть уравнение кривой задано параметрическими уравнениями:

$$x = x(t),\ y = y(t),$$

где $t \in [t_1; t_2]$, $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $x'(t) \ne 0\ \ \forall t \in [t_1; t_2]$.

Для вычисления длины дуги кривой воспользуемся формулой $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$, предварительно выполнив замену переменной: $x = x(t)$. Тогда $dx = x'(t)dt$ и $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Подставляя в формулу длины дуги, после преобразований получим:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt\, . \qquad (2.5)$$

В полярной системе координат. Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ $\forall \varphi \in [\alpha; \beta]$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Декартовы и полярные координаты связаны соотношениями:

$$x = r\cos\varphi\, ,\ y = r\sin\varphi \quad \forall \varphi \in [\alpha; \beta].$$

Учитывая, что $r = r(\varphi)$, получим:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi\, ,\ y = r(\varphi)\sin\varphi\, ,\ \forall \varphi \in [\alpha; \beta].$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой.

Найдем производные от x и y по параметру φ:

$$x_\varphi' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\, ,\ y_\varphi' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\, .$$

Отсюда $(x_\varphi')^2 + (y_\varphi')^2 = r^2 + (r')^2$. Следовательно,

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi\, . \qquad (2.6)$$

2.3 Площадь поверхности вращения

В декартовой системе координат. Пусть функция $f(x)$ не отрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной $f'(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда поверхность, образованная вращением графика этой функции вокруг оси Ox, имеет площадь S, которая может быть вычислена по формуле:

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx\, . \qquad (2.7)$$

В параметрическом виде. Пусть поверхность получается вращением вокруг оси Ox кривой AB, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),$$

где $t \in [\alpha; \beta]$, $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $y(t) \ge 0$, $a \le x(t) \le b$ при $\alpha \le t \le \beta$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$. Тогда, производя в интеграле (2.7) замену переменной $x = x(t)$, после преобразований получим:

$$S_x = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt\, . \qquad (2.8)$$

В полярных координатах. Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, где $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha; \beta]$.

Тогда, учитывая формулы $\forall \varphi \in [\alpha; \beta]$ $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$, из (2.8) получим:

$$S = 2\pi \int_a^b r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi\, . \qquad (2.9)$$

2.4 Объем пространственного тела

Вычисление объемов тел по известным поперечным сечениям. Пусть дано тело T, ограниченное замкнутой поверхностью. И пусть известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс (рисунок 2. 6). Эти сечения называются *поперечными*. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью Ox. С изменением x площадь S поперечного сечения изменяется, т. е. является некоторой функцией от x. Обозначим ее $S(x)$.

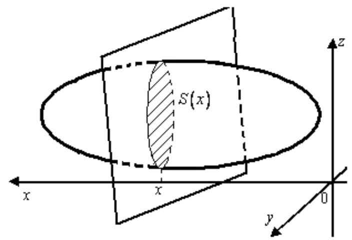

Рисунок 2. 6 – Пространственное тело с поперечным сечением $S(x)$

Пусть функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, где a и b – абсциссы крайних сечений тела T. Объем тела, заключенного между двумя плоскостями $x=a$ и $x=b$, с площадью $S=S(x)$ поперечного сечения вычисляется по формуле:

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

Вычисление объемов тел вращения. Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$ (рисунок 2. 7).

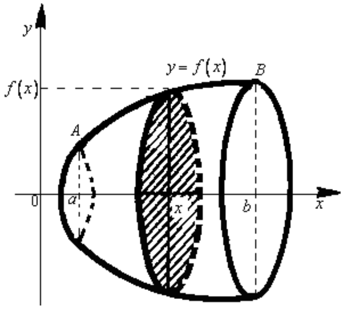

Рисунок 2. 7 – Тело, образованное вращением $aABb$ вокруг оси $0x$

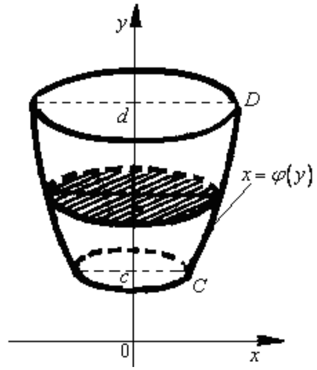

Рисунок 2. 8 – Тело, образованное вращением $cCDd$ вокруг оси $0y$

Если пересечь это тело плоскостями, перпендикулярными к оси Ox, получим круги, радиусы которых равны модулю ординат $y=f(x)$ точек данной кривой. Следовательно, площадь сечения рассматриваемого тела равна $S(x)=\pi y^2=\pi(f(x))^2$.

Применяя формулу $V=\int_a^b S(x)dx$, получаем формулу для вычисления объема тела вращения

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b (f(x))^2dx.$$

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $cCDd$ (рисунок 2. 8), то его объем вычисляется по формуле $V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d (\varphi(y))^2dy$,

где $x=\varphi(y)$, $c\le y\le d$, – уравнение кривой CD.

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r=r(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3\sin\varphi\,d\varphi.$$

Вопросы для самоконтроля

1 По каким формулам вычисляются площади криволинейных трапеций, ограниченных линиями, заданными в декартовой системе координат, в параметрическом виде и в полярной системе координат?

2 Приведите формулы для вычисления длин дуги кривой, заданной в декартовой системе координат, в параметрическом виде и в полярной системе координат.

3 Как вычисляется площадь поверхности тела?

4 Как вычисляется объем пространственных тел?

Решение типовых примеров

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной аркой синусоиды $y=\sin x$ и прямой $y=0$ (рисунок 2.8).

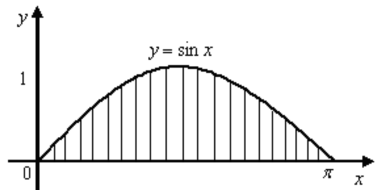

Рисунок 2.8 – Фигура, ограниченная линиями $y=\sin x$, $y=0$

Решение. По формуле (2.1) находим:

$$S=\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=2.$$

2 Вычислить площадь эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, где $0\le t\le 2\pi$ (рисунок 2. 10).

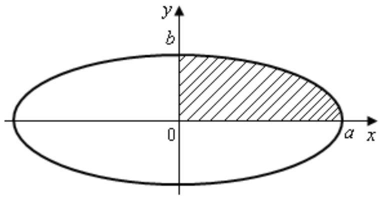

Рисунок 2. 10 – Эллипс

Решение. Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса и поэтому делят его на четыре одинаковые части. Следовательно, $S=4S_1$, где S_1 – площадь части эллипса, расположенная в первом квадранте. Тогда

$$S=4S_1=4\int_0^a y dx=\left[\begin{array}{l} x=a\cos t,\ y=b\sin t,\\ dx=-a\sin t\,dt,\\ x=0\ \Rightarrow\ t=\dfrac{\pi}{2},\\ x=a\ \Rightarrow\ t=0.\end{array}\right]=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t dt=$$

$$=-2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

3 Вычислить площадь криволинейного сектора, ограниченного кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$, где $0\le\varphi\le 2\pi$.

Решение. По формуле (2.3) получим:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\int_0^{2\pi}1d\varphi+2\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi++\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}+2\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right)=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

4 Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=x^{\frac{3}{2}}$, если $0\le x\le 5$.

Решение. По формуле (2.4) имеем:

$$l=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5=\frac{235}{27}.$$

5 Вычислить длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, если $0\le t\le 2\pi$.

Решение. По формуле (2.5) в силу симметричности астроиды относительно осей получим:

$$l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt=\left[\begin{array}{l} x'=-3a\cos^2 t\sin t,\\ y'=3a\cos t\sin^2 t\end{array}\right]=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt=6a.$$

6 Вычислить длину первого витка спирали Архимеда $r=a\varphi$.

Решение. Первый виток спирали образуется при изменении полярного угла $0\le\varphi\le 2\pi$. Поэтому по формуле (2.6):

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=$$

$$=a\left(\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right).$$

7 Вычислить площадь S поверхности, полученной вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$, вокруг оси Ox.

Решение. По формуле (2.8) имеем:

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2+(a(1-\cos t))^2}\,dt=$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

8 Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Решение. Пересечем эллипсоид плоскостью $x=h$. В сечении получим эллипс

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}=1,\\ x=h.\end{cases}$$

Площадь поперечного сечения равна $S(x)=\pi bc\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)$.

Тогда $V=\displaystyle\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)dh=\pi bc\left(x-\frac{h^2}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc$.

9 Вычислить объем тела, получающегося от вращения вокруг оси одной арки синусоиды $y=\sin x$.

*Решение***.** Имеем

$$S=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi}dx-\int_0^{\pi}\cos 2xxdx\right)=\frac{\pi^2}{2}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $x=e^2$, $y=0$.

2 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2=4x$ и прямой $x=4y$.

3 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2x$ и прямой $y=x+2$.

4 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\dfrac{27}{x^2+9}$ и $y=\dfrac{x^2}{6}$.

5 Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t.$$

6 Найти площадь петли кривой $x=a(t^2+1)$, $y=b(t^3-3t)$.

7 Найти площадь одного лепестка кривой $r=a\sin 2\varphi$.

8 Найти площадь фигуры, ограниченной двумя последовательными витками логарифмической спирали $r=e^{\varphi}$, начиная с $\varphi=0$.

9 Найти длину параболы $y=x^2$ от $x=0$ до $x=1$.

10 Найти длину одной арки циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi.$$

11 Найти длину петли кривой $x=t^2$, $y=t\left(\dfrac{1}{3}-t^2\right)$.

12 Найти длину кардиоиды $r=2(1-\cos\varphi)$.

13 Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси кардиоиды $r=2a(1+\cos\varphi)$.

14 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги цепной линии $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}2x$, $0\le x\le 3$.

15 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x=\cos t$, $y=\sin 2t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$, и осью Ox.

16 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $2y^2=x^3$, $x=4$.

Задания для домашней работы

1 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4x^3$, $y = 2x^2$.

2 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $x = 0$

3 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и прямой $y = 0$.

4 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{16}{x^2}$ и $y = 17 - x^2$ (первая четверть).

5 Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

6 Найти площадь петли кривой $x = \dfrac{1}{3}t(3 - t^2)$, $y = t^2$.

7 Найти площадь одного лепестка кривой $r = a\cos 3\varphi$.

8 Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

9 Найти длину кривой $y = \dfrac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ между точками пересечения с осью Ox (первая четверть).

10 Найти длину кривой $x = a(3\cos t - 3\cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$, от $t = 0$ до $t = \dfrac{\pi}{2}$.

11 Найти длину петли кривой $x = \dfrac{t^6}{6}$, $y = 2 - \dfrac{t^4}{4}$.

12 Найти длину кривой $r = a\cos^3 \dfrac{\varphi}{2}$.

13 Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, где $0 \le t \le 2\pi$.

14 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \dfrac{1}{3}x^3$, $-1 \le x \le 1$.

15 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y^2 = x$, $x^2 = y$.

16 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = t^2$, $y = \ln t$ и осью Ox.

17 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = \dfrac{1}{4}x^2$, $y = \dfrac{1}{8}x^3$.

Практическое занятие 3 **Физические приложения определенного интеграла**

3.1 Работа переменной силы
3.2 Работа электродвигателя переменной мощности
3.3 Сила давления жидкости
3.4 Статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс

3.1 Работа переменной силы

Пусть материальная точка движется по прямой линии под действием некоторой переменной силы $\vec{F}$. За ось Ox примем прямую, вдоль которой движется материальная точка. Пусть начальная и конечная точки пути имеют абсциссы a и b ($a<b$) соответственно. В каждой точке отрезка $[a;b]$ модуль силы принимает определенное значение и является некоторой функцией абсциссы, т. е $|\vec{F}|=F(x)$. Будем считать функцию $F(x)$ непрерывной. Тогда работа A переменной силы на прямолинейном пути от a до b задается формулой:

$$A=\int_a^b F(x)dx .$$

3.2 Работа электродвигателя переменной мощности

Пусть мощность электродвигателя в момент времени t равна $N(t)$. Работа A, совершаемая двигателем за промежуток времени $[a;b]$ выражается формулой:

$$A=\int_a^b N(t)dt .$$

3.3 Сила давления жидкости

Пусть пластинка, имеющая вид криволинейной трапеции, погружена вертикально в жидкость таким образом, что ее боковые стороны параллельны поверхности жидкости и находятся ниже ее уровня на расстояниях a и b соответственно (рисунок 3.1).

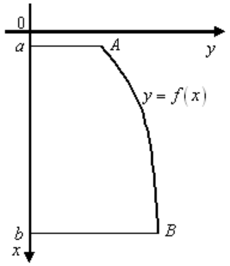

Рисунок 3.1 –Пластинка $aABb$, погруженная вертикально в жидкость

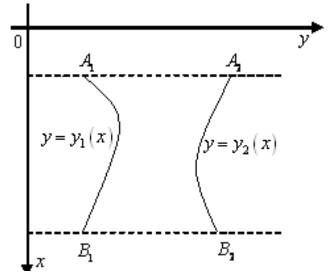

Рисунок 3.2 – Пластинка $A_1B_1B_2A_2$, погруженная вертикально в жидкость

Если пластинка находится в горизонтальном положении на глубине h от поверхности жидкости, то сила давлений P жидкости на эту пластинку будет равна весу столба жидкости, основанием которого является данная пластинка, а высотой – глубина h: $P=g\rho hS$, где $g=9{,}8$ м/с^2; ρ – плотность жидкости, S – площадь пластинки.

Если же пластинка погружена в жидкость вертикально, то давление жидкости – сила давления на единицу площади – изменяется с глубиной погружения. По закону Паскаля давление в жидкости передается одинаково по всем направлениям, в том числе и на вертикальную пластинку.

Выберем систему координат так, как показано на рисунке 3.1. Пусть уравнение кривой AB имеет вид $y=f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Сила давления жидкости на всю пластинку определяется интегралом:

$$P=g\int_a^b \rho\, x f(x)dx .$$

Если в жидкость вертикально погружена пластинка $A_1B_1B_2A_2$ (рисунок 3.2), ограниченная прямыми $x=a$, $x=b$ и кривыми $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, то сила давления на эту пластинку вычисляется по формуле:

$$P=g\int_a^b \rho x(y_2-y_1)dx .$$

3.4 Статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс

Основные определения. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. *Статическим моментом* материальной точки $A(x;y)$, в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и расстояния до оси Ox (оси Oy): $M_x = my$ ($M_y = mx$).

Моментом инерции материальной точки $A(x;y)$ в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy, точки O) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и квадрата расстояния до оси Ox (оси Oy, точки O):

$$I_x = my^2,\ I_y = mx^2,\ I_0 = I_x + I_y = m\left(x^2 + y^2\right).$$

Если дана система материальных точек $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, …, $A_n(x_n;y_n)$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, …, m_n, то статические моменты находятся по формулам:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,\ M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,$$

а моменты инерции – по формулам:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2,\ I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2,\ I_0 = I_x + I_y = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 + y_k^2\right)m_k.$$

Центром масс системы материальных точек называется точка, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ системы, то статический момент этой точки относительно любой ее оси равен статическому моменту данной системы материальных точек относительно той же оси.

Поэтому, обозначая центр масс системы $C(x_C;y_C)$, получаем:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = My_C, \qquad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k = Mx_C.$$

Таким образом, координаты центра масс системы материальных точек вычисляются по следующим формулам:

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k},\ y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

Линия (фигура) называется *однородной*, если $\rho = \text{const}$ на всей линии (фигуре). Если при этом $\rho = 1$, то масса линии (фигуры) численно равна длине линии (площади фигуры).

Вычисление массы, статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской кривой. Пусть на спрямляемой кривой AB, заданной уравнением $y = f(x)$, распределена масса с плотностью $\rho = \rho(x)$ (рисунок 3.3). По следующим формулам вычисляются:

масса кривой: $M = \int_a^b \rho\sqrt{1+(y')^2}\,dx$;

статические моменты кривой относительно осей Ox, Oy:

$$M_x = \int_a^b \rho y\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\ M_y = \int_a^b \rho x\sqrt{1+(y')^2}\,dx;$$

координаты центра масс: $x_C = \dfrac{M_y}{M}$, $y_C = \dfrac{M_x}{M}$;

моменты инерции относительно осей Ox, Oy и начала координат $O(0,0)$:

$$I_x = \int_a^b \rho y^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\ I_y = \int_a^b \rho x^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\ I_0 = I_x + I_y.$$

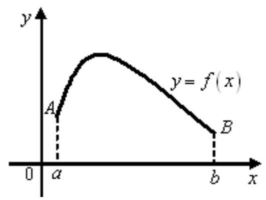

Рисунок 3.3 – Кривая AB

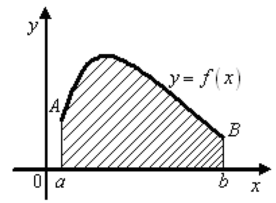

Рисунок 3.4 – Криволинейная трапеция $aABb$

Для параметрического и полярного задания плоской линии AB соответствующие формулы приводятся в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Формулы для вычисления массы, статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской линии

Параметрическое задание $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha;\beta]$	Полярное задание $r=r(\varphi),\ \varphi\in[\alpha;\beta]$
Масса	
$M=\int_\alpha^\beta \rho(x(t))\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$	$M=\int_\alpha^\beta \rho(r(\varphi)\cos\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$
Статические моменты	
$M_x=\int_\alpha^\beta \rho(x(t))y(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$, $M_y=\int_\alpha^\beta \rho(x(t))x(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$	$M_x=\int_\alpha^\beta \rho r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$, $M_y=\int_\alpha^\beta \rho r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$, $\rho=\rho(r(\varphi)\cos\varphi)$
Моменты инерции	
$I_x=\int_\alpha^\beta \rho(x(t))y^2(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$, $I_y=\int_\alpha^\beta \rho(x(t))x^2(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$, $I_0=I_x+I_y$	$I_x=\int_\alpha^\beta \rho r^2(\varphi)\sin^2\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$, $I_y=\int_\alpha^\beta \rho r^2(\varphi)\cos^2\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$, $\rho=\rho(r(\varphi)\cos\varphi)$

Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской фигуры. Пусть дана материальная криволинейная трапеция $aABb$, ограниченная графиком функции $y=f(x)\ge 0$, $x\in[a;b]$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$ (рисунок 3.4). И пусть на фигуре распределена масса с плотностью $\rho=\rho(x)$. По следующим формулам вычисляются:

масса фигуры: $M=\int_a^b \rho\, y\,dx$;

статические моменты относительно осей координат:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b \rho\, y^2dx,\quad M_y=\int_a^b \rho\, x\, ydx;$$

моменты инерции относительно осей Ox, Oy:

$$I_x=\frac{1}{2}\int_a^b \rho y^3dx,\quad I_y=\int_a^b \rho x^2ydx;$$

координаты центра масс: $x_C=\dfrac{M_y}{M}$, $y_C=\dfrac{M_x}{M}$.

Для параметрического и полярного задания плоской фигуры соответствующие формулы приводятся в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Формулы для вычисления массы, статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской фигуры

Параметрическое задание $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha;\beta]$	Полярное задание $r=r(\varphi),\ \varphi\in[\alpha;\beta]$
Масса	
$M=\int_\alpha^\beta \rho(x(t))y(t)x'(t)\,dt$	$M=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(r(\varphi)\cos\varphi)r^2(\varphi)\,d\varphi$
Статические моменты	
$M_x=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(x(t))y^2(t)x'(t)\,dt$, $M_y=\int_\alpha^\beta \rho(x(t))x(t)x'(t)\,dt$	$M_x=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \rho r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$, $M_y=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \rho r^3(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$, $\rho=\rho(r(\varphi)\cos\varphi)$
Моменты инерции	
$I_x=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta \rho(x(t))y^3(t)x'(t)\,dt$, $I_y=\int_\alpha^\beta \rho(x(t))x^2(t)y(t)x'(t)\,dt$,	$I_x=\frac{1}{4}\int_\alpha^\beta \rho r^4(\varphi)\sin^2\varphi\,d\varphi$, $I_y=\frac{1}{4}\int_\alpha^\beta \rho r^4(\varphi)\cos^2\varphi\,d\varphi$, $\rho=\rho(r(\varphi)\cos\varphi)$

Для нахождения центра тяжести плоской фигуры, имеющей сложную форму, разбивают фигуру на простейшие фигуры, координаты центра масс которых либо известны, либо достаточно легко определяются. При этом сложную фигуру D представляют в виде объединения простейших фигур, из которых вырезаны некоторые фигуры. Эти фигуры (вырезанные) обозначим через D_1, D_2, …, D_n, а их площади – S_1, S_2, …, S_n. Тогда координаты центра масс фигуры D можно найти по формулам:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)x_{C_k}}{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)y_{C_k}}{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)},$$

где x_{C_k} y_{C_k} – координаты центра масс фигуры D_k; S_k – площадь фигуры D_k, $k=\overline{1,n}$. В этих формулах площадь фигуры берется со знаком «+», если $D_k \subset D$, и со знаком «–», если $D_k \not\subset D$, т.е. если элементарная фигура D_k вырезана. При нахождении координат центра масс используется также свойство симметрии фигуры: если фигура имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит в этой плоскости, на этой оси или в этом центре.

Решение типовых примеров

1 Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей Ox и Oy дуги цепной линии $y=\operatorname{ch}x$ при $0\le x\le 1$.

Решение. Имеем

$$y' = \operatorname{sh}x, \; \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+(\operatorname{sh}x)^2} = \operatorname{ch}x .$$

Тогда

$$M_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+\operatorname{ch}2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\operatorname{sh}x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(2+\operatorname{sh}2),$$

$$M_y = \int_0^1 x\operatorname{ch}x\,dx = \begin{bmatrix} u=x, dv=\operatorname{ch}x\,dx, \\ du=dx, v=\operatorname{sh}x \end{bmatrix} = x\operatorname{sh}x\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \operatorname{sh}dx = \operatorname{sh}1 - \operatorname{ch}x\Big|_0^1 = \operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1+1,$$

$$I_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^3 x\,dx = \int_0^1 (1+\operatorname{sh}^2 x)\operatorname{ch}x\,dx = \left(\operatorname{sh}x+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x\right)\Big|_0^1 = \operatorname{sh}1+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 1,$$

$$I_y = \int_0^1 x^2\operatorname{ch}x\,dx = \begin{bmatrix} u=x^2, dv=\operatorname{ch}x\,dx, \\ du=2xdx, v=\operatorname{sh}x \end{bmatrix} = x^2\operatorname{sh}x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\operatorname{sh}x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u=x, dv=\operatorname{sh}x\,dx, \\ du=dx, v=\operatorname{ch}x \end{bmatrix} = \operatorname{sh}1 - 2\left(x\operatorname{ch}x\Big|_0^1 - \int_0^1 \operatorname{ch}x\,dx\right) =$$

$$= \operatorname{sh}1 - 2\operatorname{ch}1 + +2\operatorname{sh}1 = 3\operatorname{sh}1 - 2\operatorname{ch}1 .$$

2 Найти координаты центра масс дуги окружности

$$x = a\cos t, \; y = a\sin t, \; 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Масса дуги окружности в первой четверти есть

$$M = \frac{\pi a}{2}.$$

Имеем

$$x' = -a\sin t, \; y' = a\cos t,$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a .$$

Тогда

$$M_x = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = a^2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2,$$

$$M_y = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = -a^2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2 .$$

Следовательно,

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}, \qquad y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}.$$

3 Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2$ м/с. Требуется найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Решение. Так как путь, пройденный телом со скоростью $v(t)$ за отрезок времени выражается интегралом $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, то имеем

$$S = \int\limits_0^5 \left(2t + 3t^2\right)dt = \left(t^2 + t^3\right)\Big|_0^5 = 150 \text{ (м)}.$$

4 Какую работу необходимо затратить, для того, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h? Чему равна работа, если тело удаляется в бесконечность?

Решение. Работа переменной силы $f(x)$, действующей вдоль оси Ox на отрезке $[a;b]$, выражается интегралом

$$A = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Согласно закону всемирного тяготения сила F, действующая на тело массы m, равна

$$F = k\frac{mM}{r^2},$$

где M – масса земли, r – расстояние массы m от центра земли, k – гравитационная постоянная. Так как на поверхности Земли, т.е. при $r = R$, имеем $F = mg$, то можно записать

$$mg = k\frac{mM}{R^2}.$$

Отсюда получаем $kM = gR^2$. Тогда $F = mg\dfrac{R^2}{r^2}$.

Следовательно, искомая работа равна:

$$A = \int\limits_R^{R+h} F\,dr = \int\limits_R^{R+h} mgR^2\frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{R+h} = mgR\frac{h}{R+h}.$$

Отсюда при $h \to \infty$ имеем

$$\lim_{h\to\infty} A = mgR.$$

5 Вычислить кинетическую энергию однородного кругового конуса, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси, если заданы радиус основания конуса R, высота H и плотность γ.

Решение. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, равна $\frac{1}{2}I\omega^2$, где I момент инерции тела относительно оси вращения. Пусть dm – элементарная масса полого цилиндра высоты h с внутренним радиусом r и толщиной стенок dr (рисунок 3.5)

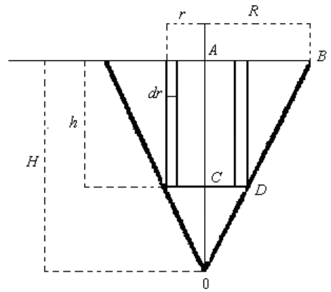

Рисунок 3.5 – Геометрическая интерпретация типового примера 5

Тогда

$$dm = 2\pi\, rh\gamma\, dr,\ 0 \le r \le R.$$

Из подобия треугольников OCD и OAB имеем

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}.$$

Отсюда

$$h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Следовательно,

$$dm = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r\,dr\,,$$

и элементарный момент инерции dI равен

$$dI = dm\,r^2 = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\,dr\,.$$

Таким образом, момент инерции всего конуса есть

$$I = \int_0^R dI = \int_0^R 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\,dr = 2\pi\gamma H\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{5}\right) = \frac{1}{10}\pi\gamma H R^4\,,$$

и кинетическая энергия конуса равна

$$K = \frac{1}{20}\pi\gamma H R^4\omega^4\,.$$

6 Найти силу давления воды на вертикальную треугольную пластину с основанием a и высотой h, погруженную в воду вершиной вниз так, что основание находится на поверхности воды.

Решение. Согласно закону Паскаля сила давления P жидкости с удельным весом γ на площадку S при глубине погружения H равна

$$P = \gamma H S\,.$$

Введем систему координат (рисунок 3.6) Oxy и рассмотрим элементарную прямоугольную площадку, находящуюся на глубине x и имеющую основание b и высоту dx.

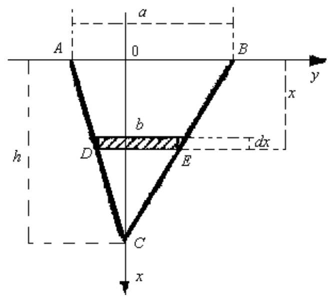

Рисунок 3.6 – Геометрическая интерпретация типового примера 6

Из подобия треугольников CAB и CDE имеем

$$\frac{b}{a} = \frac{h-x}{h}\,.$$

Отсюда $b = \frac{a}{h}(h-x)$.

Следовательно, (для воды $\gamma = 1$).

$$dS = b\,dx = \frac{a}{h}(h-x)dx\,,$$

$$dP = x\,dS = \frac{ax}{h}(h-x)dx$$

Таким образом, сила давления воды на всю пластину равна

$$P = \int_0^h x\,dS = \frac{a}{h}\int_0^h x(h-x)dx = \frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right) = \frac{ah^2}{6}\,.$$

7 Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если известно, что для удаления ее на 1см необходимо приложить силу в 1 кН.

Решение. Согласно закону Гука, сила F, растягивающая пружину пропорциональна ее растяжению

$$F = kx\,,$$

где k – коэффициент пропорциональности, x – растяжение пружины (в метрах).

Так как по условию при $x = 0{,}01$ м сила $F = 1$ кН, то из равенства

$$1 = 0{,}01k\,,$$

получаем

$$k = 100\,,\ F = 100x\,.$$

Следовательно, искомая работа равна

$$A = \int_0^{0,1} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0,1} = 0{,}5 \text{ кДж}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Какую работу затрачивает подъемный кран при извлечении железобетонной надолбы со дна реки глубиною в 5 м, если надолба имеет форму правильного тетраэдра с ребром 1м, плотность железобетона 2500 кг/м^3.

2 Найти работу, затраченную на выкачивание воды из сосуда, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a, радиус r.

3 Водопроводная труба имеет диаметр 6 см.; один ее конец соединен с баком, в котором уровень воды на 100 см выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти полное давление на заслонку.

4 Найти величину давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которого 6 м и находится на поверхности воды (рисунок 3.7).

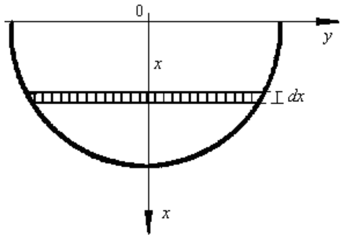

Рисунок 3.7 – К задаче 4 аудиторной работы

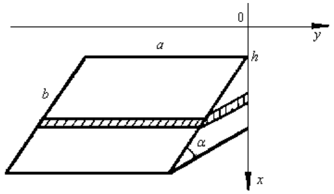

Рисунок 3.8 – К задаче 6 аудиторной работы

5 Найти давление бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотою $h = 3{,}5$ м и радиусом $r = 1{,}5$ м, на его стенки, если плотность бензина $\rho = 900$ кг/м^3.

6 Какое давление испытывает прямоугольная пластинка длиною a и шириною b, $a > b$, если она наклонена к горизонту жидкости под углом α и ее большая сторона находится на глубине h (рисунок 3.8).

7 Найти момент инерции относительно оси Oy площади эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

8 Найти статические моменты и моменты инерции дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти.

9 Найти координаты центра тяжести параболического сегмента, ограниченного линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

Задания для домашней работы

1 Найти работу, затрачиваемую на выкачивание воды из конического сосуда, основание которого горизонтально и расположено ниже вершины, если радиус основания r и высота h.

2 Из цилиндрической цистерны выкачивается жидкость. Какую работу надо затратить на это, если длина цистерны a, а диаметр d.

3 Подъемным краном при помощи каната, прикрепленного к вершине, поднимается конической формы камень из воды. Какую работу затратит подъемный кран на полное извлечение камня из воды, если вершина конуса находилась на поверхности воды. Радиус основания конуса 1 м, высота 3 м, плотность 2,5 г/см^3. *Указание*: $P(y) = 1500\pi + \frac{1000}{27}\pi y^3$.

4 В жидкость с плотностью ρ погружена треугольная пластинка вершиной вверх. Найти давление жидкости на пластинку, если основание треугольника a, высота h. Вершина треугольника расположена на поверхности.

5 Скорость точки меняется по закону $v = 100 + 8t$ м/сек. Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени $[0;10]$.

6 Найти момент инерции параболического сегмента, ограниченного параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 3$ относительно Ox.

7 Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной дугой эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, расположенной в первой четверти, и осями координат.

8 Найти координаты центра тяжести параболического сегмента, ограниченного линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

9 Найти координаты центра тяжести дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти.

10 Найти координаты центра тяжести параболического сегмента, ограниченного линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Практическое занятие 4 **Несобственные интегралы**

4.1 Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования
4.2 Несобственный интеграл от неограниченных функций
4.3 Формулы для несобственных интегралов
4.4 Признаки сходимости несобственных интегралов

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы предполагалось, что пределы интегрирования a и b являются конечными и подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода. В этом случае определенные интегралы называются *собственными*.

Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то интегралы называются *несобственными*. При этом определение интеграла Римана теряет смысл. Действительно, в случае бесконечного отрезка интегрирования его нельзя разбить на n частичных отрезков конечной длины, а в случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела.

4.1 Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\infty)$. Тогда она будет непрерывной на любом конечном отрезке $[a;b]$, $a<b$. Для функции $f(x)$ непрерывной на $[a;b]$, существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, зависящий от верхнего предела b.

Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования от непрерывной на промежутке $[a;\infty)$ функции $f(x)$ называется предел $b\to+\infty$:

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называется *сходящимся*, если этот предел не существует или равен ∞, то *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$ называется интеграл $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$.

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^c f(x)dx+\int\limits_c^\infty f(x)dx,\ c\in(-\infty;\infty),$$

то по определению

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim_{b\to\infty}\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Этот несобственный интеграл называется *сходящимся*, если оба предела существуют. Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ называется *расходящимся*.

Интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ называются также *несобственными интегралами первого рода*.

С geометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ означает, что фигура, ограниченная кривой

$y=f(x)\geq 0$, прямыми $x=a$, $y=0$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Ox, имеет конечную площадь S (рисунок 4.1).

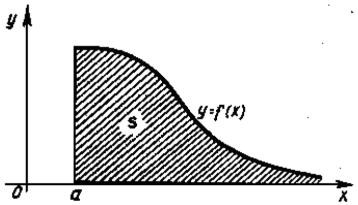

Рисунок 4.1 – Геометрический смысл несобственного интеграла 1-го рода

Интегралом в смысле главного значения называется интеграл:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{+b} f(x)dx,\ b>0.$$

Очевидно, что, если существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, то и существует интеграл в смысле главного значения. Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения может существовать, а соответствующий ему несобственный интеграл – нет.

4.2 Несобственный интеграл от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и неограничена в левосторонней окрестности точки b (b – точка бесконечного разрыва), т. е. $\lim\limits_{x\to b-\varepsilon} f(x)=\infty$. Будем считать, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $[a;b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=b$ называется при $\varepsilon\to 0$ предел:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ \varepsilon>0.$$

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $(a;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,\ \varepsilon>0.$$

Если же функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то интеграл необходимо представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Если пределы в правых частях формул существуют и конечны, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ является *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Несобственные интегралы от неограниченных функций называются *несобственными интегралами второго рода*.

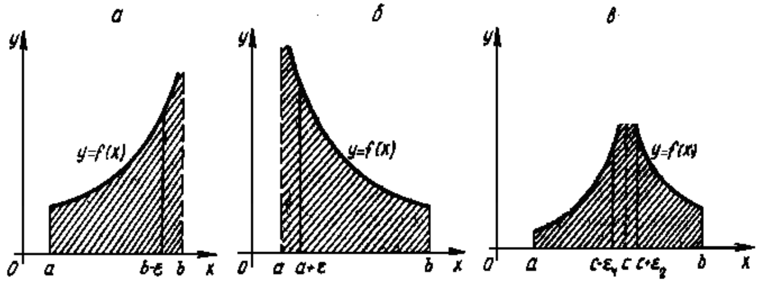

Рисунок 4.2 – Геометрический смысл несобственного интеграла от неограниченных функций

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл второго рода означает, что фигура, ограниченная кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$ $x=b$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Oy при $x\to b-0$ (рисунок 4.2, а), ($x\to a+0$, рисунок 4.2, б; $x\to c\pm 0$ рисунок 4.2,в), имеет конечную площадь S.

4.3 Формулы для несобственных интегралов

В силу свойств предела функции и определения несобственного интеграла как предела функции, являющейся интегралом Римана с переменным пределом интегрирования, многие свойства определенного интеграла предельным переходом переносятся на несобственные интегралы.

Не ограничивая общности, ниже приводятся свойства несобственного интеграла от функции, определенной на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$:

– *(формула Ньютона-Лейбница)* если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и $F(x)$ какая-либо ее первообразная, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a);$$

– *(линейность)* если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то для любых чисел α и β несобственный интеграл $\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx$ также сходится и

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx;$$

– *(монотонность)* если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и для всех $x \in [a;b)$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

– *(замена переменной)* если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha;\beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, и выполняются условия $\varphi([\alpha;\beta)) = [a;b)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t\to\beta} \varphi(t) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

– *(интегрирование по частям)* пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ кусочно-непрерывны на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$. Тогда

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

4.4 Признаки сходимости несобственных интегралов

Будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a;\eta)$, $a \le \eta < b$ (несобственный интеграл 1-го или 2-го рода).

Теорема 1 (признак сравнения) Пусть на промежутке $[a;b)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на каждом конечном отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, причем $\forall x \in [a;b)$ справедливо $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда

1) из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, 2) из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Следствие (предельный признак сравнения) Пусть на промежутке $[a;b)$ определены две неотрицательные *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *интегрируемые на каждом конечном отрезке* $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, *причем* $\forall x \in [a;b)$ $g(x) \ne 0$, *и существует конечный предел*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0 .$$

Тогда 1) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *сходится и* $0 \le A < +\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится,*

2) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *расходится и* $0 < A \le +\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *расходится,*

3) если $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, *то интегралы* $\int_a^b g(x)dx$ *и* $\int_a^b f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 2 (критерий Коши абсолютной сходимости интеграла) Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* η, *что для всех* η_1 *и* η_2, *удовлетворяющих условию* $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, *выполняется неравенство* $\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$.

Теорема 3 Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится, то он сходится.*

Обратное верно не всегда.

Теорема 4 (признак Дирихле) Пусть на промежутке $[a;b)$ *функция* $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченную первообразную, и функция* $g(x)$ *непрерывно дифференцируема и* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. *Тогда интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Теорема 5 (признак Абеля) Пусть на промежутке $[a;b)$ *функция* $f(x)$ *непрерывна и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится и функция* $g(x)$ *непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна. Тогда интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Вопросы для самоконтроля

1 Какой интеграл называется несобственным интегралом первого рода? Когда несобственный интеграл первого рода сходится, расходится?

2 Какой интеграл называется несобственным интегралом второго рода? Когда несобственный интеграл второго рода сходится, расходится?

3 Перечислите основные свойства несобственных интегралов.

4 Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

5 Сформулируйте признак сравнения.

6 Сформулируйте предельный признак сравнения.

7 Какой несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся?

8 Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.

Решение типовых примеров

1 Вычислить интегралы

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$; в) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^p}$.

Решение. а) имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b=\frac{\pi}{2};$$

б) при $p=1$ имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln b-\ln 1\right)=+\infty.$$

При $p\neq1$ получим:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^b=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p},\text{ если } p>1,\\ +\infty,\text{ если } p<1.\end{cases}$$

Значит, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le1$;

в) при $p=1$ имеем:

$$\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_\varepsilon^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0}\ln x\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln 1-\ln\varepsilon\right)=+\infty.$$

При $p\neq1$ имеем:

$$\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^p}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_\varepsilon^{1}x^{-p}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_\varepsilon^1=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p},\text{ если } p<1,\\ +\infty,\text{ если } p>1.\end{cases}$$

Значит, интеграл $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p<1$ и расходится при $p\ge1$.

2 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$, $n=0,1,2,\ldots$.

Решение. Проинтегрируем по частям:

$$I_n=\int\limits_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=\begin{bmatrix}u=x^n;dv=e^{-x};\\ du=nx^{n-1};v=-e^{-x}\end{bmatrix}=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int\limits_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx,$$

т. е. $I_n=n\cdot I_{n-1}$.

Поскольку

$$I_0=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

то, применяя последовательно рекуррентную формулу, получим

$$I_n=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=\ldots=n!I_0=n!.$$

3 Исследовать на сходимость интегралы

а) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\ln x}$; б) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение. а) сравним интеграл $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\ln x}$ с расходящимся интегралом $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x-1}$. Поскольку

$$\ln x=\ln\left(1+(x-1)\right)\sim x-1$$

при $x\to1$, то

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln\left(1+(x-1)\right)}{x-1}=1;$$

Значит, интеграл $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\ln x}$ расходится;

б) сравним данный интеграл со сходящимся интегралом

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$. Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \ \forall x \in [1;+\infty)$$

то из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ согласно признаку сравнения следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ сходится.

4 Исследовать на сходимость интегралы

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$, б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x}$.

Решение. а) имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x} = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{d(\cos x)}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \cos x d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Поскольку $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ абсолютно сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$ сходится;

б) из неравенства

$$|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

следует, что для любого $\eta > 1$ выполняется неравенство

$$\int\limits_1^{\eta} \frac{|\sin x| dx}{x} \ge \frac{1}{2}\int\limits_1^{\eta} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{\eta} \frac{\cos 2x dx}{x}.$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x}$ сходится, поскольку

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x} = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{d(\sin 2x)}{x} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{x}\Big|_1^{\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 2 + \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$$

и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$ сходится ($\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится).

Значит, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x}$ расходится.

5 Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$.

Решение. Функция $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а функция $g(x) = \frac{1}{x^p}$, $p > 0$, убывает при $x \to +\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0$. Согласно признаку Дирихле интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$ сходится.

6 Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$.

Решение. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{x^p}$ сходится, а функция $g(x)=\operatorname{arctg} x$ ограничена и монотонна. В силу признака Абеля интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$$

сходится.

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$; д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$;

б) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}\cos x\,dx$; е) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4}$;

в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^6}$; ж) $\int\limits_0^{+\infty}x e^{-x^2}\,dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty}\sin 2x\,dx$; и) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

2 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{5x^4+2x^2+3}$; в) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}dx$;

б) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$; г) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^{11}}}$.

3 Вычислить площадь бесконечной трапеции, ограниченной указанными линиями:

а) $y=xe^{-x}$, ($x\ge 0$), $y=0$;

б) $y=\frac{1}{x^2+9}$, $y=0$.

4 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$; в) $\int\limits_0^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

б) $\int\limits_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; г) $\int\limits_{-8}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

5 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\operatorname{tg} x-x}$; д) $\int\limits_0^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

б) $\int\limits_0^{1}\frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$; е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 xdx}{\cos x}$;

в) $\int\limits_0^{1}\ln x\,dx$; ж) $\int\limits_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

г) $\int\limits_0^{0,4}\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$; и) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{\cos^3(\ln x)}{x\ln x}dx$.

6 Вычислить интеграл в смысле главного значения:

а) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin xdx$; б) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg} xdx$; в) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{13+x}{17+x^2}dx$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; д) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}$;

б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)} dx$;

в) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2++6)^3}}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+1}$;

е) $\int\limits_{0}^{+\infty} x\cos x\,dx$;

ж) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$;

и) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin 3x\,dx$.

2 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}$;

в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$;

г) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$.

3. Вычислить площадь бесконечной трапеции, ограниченной указанными линиями:

а) $y=e^{-x}$, ($x \ge 0$), $y=0$;

б) $y=\frac{1}{x^2-4}$, ($x \ge 5$), $y=0$.

4 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+x^4}$,

б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x}$,

в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1}$,

г) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

5 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$;

б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1} dx$;

д) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

е) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}$;

в) $\int\limits_{0}^{0,51} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

ж) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;

и) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{x^2+1}\sin\frac{1}{x}\,dx$.

6 Вычислить интеграл в смысле главного значения:

а) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}$;   б) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx$;   в) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2}$.