Содержание

Введение

Пособие «Дифференциальное исчисление функции действительной переменной» является второй частью комплекса практических пособий по курсу «Математический анализ» для студентов физических факультетов вузов. В нем рассматривается раздел математического анализа, связанный с производной функции действительной переменной. Весь материал разбит на части, соответствующие одному практическому занятию. Вначале каждой части помещены определения, теоремы и формулы (без доказательств), необходимые для решения задач. Затем приводятся подробные решения типовых примеров, задания для аудиторной и домашней работ, варианты индивидуальных домашних заданий. Содержание данного пособия соответствует учебной программе по математическому анализу для физических специальностей и связано с курсом лекций.

При подборе задач авторами использованы различные источники, в том числе «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича (1990), «Сборник индивидуальных заданий» А. П. Рябушко (1991).

Пособие может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий по «Математическому анализу» и студентами в их самостоятельной работе над предметом.

Практическое занятие 1 **Определение производной**

1.1 Определение производной, правая и левая производная
1.2 Дифференцируемость функции и дифференциал
1.3 Геометрический и физический смысл производной и дифференциала
1.4 Свойства производных, связанные с арифметическими операциями

1.1 Определение производной, правая и левая производная

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(\delta; x_0)$ точки x_0. Если фиксированное значение аргумента x_0 получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0 + \Delta x \in U(\delta; x_0)$, то приращение функции определяется выражением $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в произвольной фиксированной точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначается: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$.

Производная функции $y = f(x)$ в произвольной точке x *обозначается* так: $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

При каждом конкретном числовом значении x производная $f'(x)$ (если она существует при данном x) функции $y = f(x)$ представляет собой определенное число. Значениям переменной x ставятся в соответствие определенные значения переменной $f'(x)$. Поэтому производная является функцией аргумента x.

Если для некоторого значения x предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что функция $y = f(x)$ в точке x имеет *бесконечную производную*.

Если функция $y = f(x)$ определена в левосторонней (правосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

то он называется соответственно конечной или бесконечной *производной слева* (*справа*) функции $f(x)$ в точке x_0

Обозначается: $f'(x_0 - 0)$ или $f'_-(x_0)$ ($f'(x_0 + 0)$ или $f'_+(x_0)$).

Левая и правая производные называются *односторонними производными*.

Если функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет конечную производную $f'(x_0)$, то существуют производные слева и справа, причем

$$f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0).$$

Вместе с тем существуют функции, имеющие в данной точке x_0 левую и правую производные, но не имеющие производной в этой точке.

Операция нахождения производной функции f называется *дифференцированием*.

1.2 Дифференцируемость функции и дифференциал

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение в этой точке $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

где A – некоторое действительное число и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx, приращение функции представимо в виде линейной функции от Δx.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная производная $f'(x_0) = A$. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке. Если функция $y = f(x)$ в некоторой точке имеет производную, то она непрерывна в этой точке. Обратное верно не всегда, т. е. из непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 еще не следует ее дифференцируемость в этой точке.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* на $[a;b]$, если она дифференцируема в любой точке $x \in [a;b]$.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Отсюда, если $f'(x_0) \neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{f'(x_0)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{o(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x}\right) = 1.$$

Следовательно, при $\Delta x \to 0$ приращение функции $\Delta f(x_0)$ и выражение $f'(x_0)\Delta x$ являются эквивалентными бесконечно малыми функциями. Поэтому при $\Delta x \to 0$ можно приближенно считать, что $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

Дифференциалом функции $f(x)$ называется величина $f'(x_0)\Delta x$, являющаяся *главным* (линейным) членом приращения функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$:

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

В частности, если $y = x$, то $y' = 1$, и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой. Поэтому дифференциал функции

$f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Тогда приращение функции можно записать в виде

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x).$$

Видно, что дифференциал функции в точке x_0 отличается от соответствующего приращения функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

На практике дифференциал используется при приближенных вычислениях следующим образом:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (1.1)$$

1.3 Геометрический и физический смысл производной и дифференциала

Рассмотрим задачу о проведении касательной к произвольной плоской кривой. Пусть L – дуга плоской кривой, M_0 – точка этой кривой, M_0M – секущая (рисунок 1.1). Если точка M движется по кривой к точке M_0, то секущая поворачивается вокруг точки M_0 и стремится к некоторому предельному положению M_0T.

Касательной к кривой L в точке M_0 называется прямая M_0T, которая представляет собой предельное положение секущей M_0M при стремлении по кривой точки M к точке M_0 (рисунок 1.1).

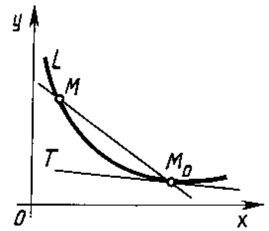

Рисунок 1.1 – Секущая M_0M и касательная M_0T

Если предельного положения секущей не существует, то говорят, что в точке M_0 провести касательную нельзя. Это бывает в случае, когда точка M_0 является *точкой излома*, или *заострения*, кривой (рисунок 1.2*, а, б, в*).

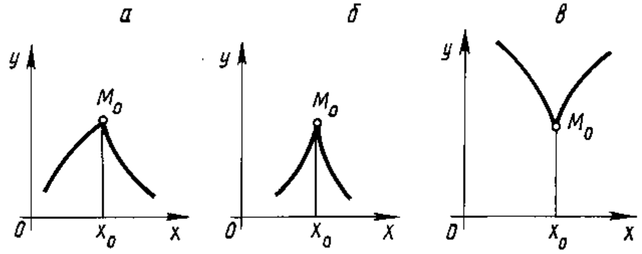

Рисунок 1.2 – Точки излома графика функции

Пусть кривая L является графиком функции $f(x)$ и точка $M(x_0; f(x_0)) \in L$ (рисунок 1.3).

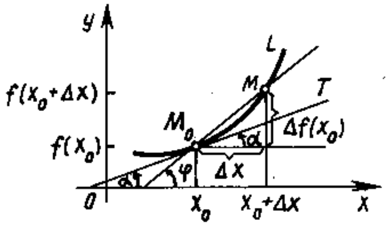

Рисунок 1.3 – Геометрический смысл касательной

Предположим, что касательная к кривой в точке M_0 существует. Угловой коэффициент секущей M_0M есть

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то точка M движется по кривой к точке M_0 и секущая MM_0 стремится к своему предельному положению M_0T. Таким образом,

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{M \to M_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (1.2)$$

Отсюда следует *геометрический смысл производной*: производная от функции $f(x)$ при $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1.3)$$

Так как угловые коэффициенты касательной и нормали связаны условием перпендикулярности $k_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{k_{\text{кас}}}$, то *уравнение нормали* в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (1.4)$$

Углом между кривыми называют угол между касательными к кривым в точке их пересечения.

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 изображается приращением ординаты точки касательной, проведенной в $M(x_0; f(x_0))$ к линии $y = f(x)$ (рисунок 1.4).

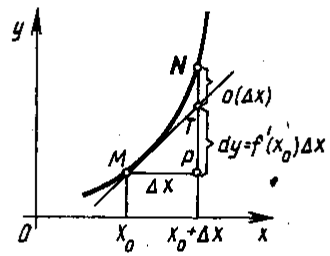

Рисунок 1.4 – Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную в некоторой окрестности точки x_0. Если аргумент x_0 функции получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0 + \Delta x$ принадлежит той же окрестности точки x_0, то соответствующее приращение функции равно $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$. Тогда средняя скорость изменения функции равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \tag{1.5}$$

а мгновенная скорость ее изменения:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{1.6}$$

Механический смысл производной: производная – математическая модель мгновенной скорости процесса, описываемого функцией $f(x)$.

В зависимости от содержательной сущности функции можно получить широкий круг математических моделей скорости протекания процессов. Рассмотрим некоторые из них.

1 Пусть материальная точка M движется неравномерно и $y = s(t)$ – функция, устанавливающая зависимость пути от времени t. Тогда мгновенная скорость движения в момент времени t_0 есть производная от пути s по времени t:

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $ds = v\Delta t$ равен пути, который прошла бы рассматриваемая точка за промежуток времени Δt, начиная с момента t, если движение на этом участке равномерно со скоростью v. Этот путь отличается от истинного пути Δs на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δt: $\Delta s = ds + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

2 Пусть $y = v(t)$ – функция, описывающая процесс изменения скорости неравномерного движения в зависимости от времени t. Тогда мгновенное ускорение материальной точки в фиксированный момент времени t_0 есть производная от скорости v по времени t:

$$v = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

3 Пусть $y = Q(T)$ – функция, описывающая процесс изменения количества теплоты, сообщаемой телу при нагревании его

до температуры T. Тогда теплоемкость тела есть производная от количества теплоты Q по температуре T:

$$C = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_{T=T_0} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q(T_0)}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{Q(T_0 + \Delta T) - Q(T_0)}{\Delta T}.$$

4 Пусть необходимо определить линейную плотность неоднородного тонкого стержня длиной l, где m – масса стержня, концы которого имеют координаты 0 и x_0 (предполагается, что ось Ox направлена по стержню). Ясно, что масса стержня является функцией x: $f(x) = m(x)$. Тогда линейная плотность неоднородного тонкого стержня в точке x_0 есть производная от массы m по длине l:

$$\rho(x_0) = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}.$$

5 Пусть $y = \Phi(t)$ – функция, описывающая процесс изменения магнитного потока в зависимости от времени t. Тогда мгновенное значение электродвижущей силы индукции равно скорости изменения магнитного потока, т.е. производной от магнитного потока Φ по времени t:

$$\varepsilon = \Phi'(t_0) = \left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0)}{\Delta t}$$

6 Пусть $y = q(t)$ – функция, описывающая процесс изменения заряда в колебательном контуре в зависимости от времени t. Тогда сила тока в контуре в момент времени t_0 равна производной заряда q по времени t:

$$I = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $dq = I\Delta t$ равен количеству электричества, которое бы протекало через поперечное сечение проводника за промежуток времени Δt, если бы сила тока была постоянной и равной силе тока в момент времени t. При этом $\Delta q = dq + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

1.4 Свойства производных, связанные с арифметическими операциями

Ниже приводятся свойства производных, связанные с арифметическими операциями:

– производная постоянной функции равна нулю:

$$(c)' = 0;$$

– *(правило дифференцирования алгебраической суммы функций)* Производная алгебраической суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна алгебраической сумме (разности) производных слагаемых:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

– (*правило дифференцирования произведения функций)* производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый:

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u;$$

– если $u = u(x)$ дифференцируемая в точке x функция, то $\forall c \in \mathbf{R}$

$$(cu)' = c \cdot u';$$

– *(правило дифференцирования частного функций)* производная частного двух дифференцируемых функций равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель представляет собой разность между произведением знаменателя данной дроби на производную ее числителя и произведением числителя на производную знаменателя:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$$

В таблице 1.1 приводятся производные и дифференциалы элементарных функций

Таблица 1.1 – Производные и дифференциалы элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
$y = c$	$y' = 0$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = x^\alpha$ $\alpha \in \mathbf{R}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = a^x$	$y' = \alpha^x \ln a$	$y = \mathrm{ctg}\, x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \mathrm{sh}\, x$	$y' = \mathrm{ch}\, x$	$y = \mathrm{th}\, x$	$y' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$y = \mathrm{ch}\, x$	$y' = \mathrm{sh}\, x$	$y = \mathrm{cth}\, x$	$y' = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется приращением функции $y = f(x)$ в точке?

2 Сформулируйте определение производной.

3 Что называется правой и левой производной?

4 В чем состоит геометрический смысл производной?

5 Какая функция называется дифференцируемой в точке x_0?

6 Какая связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке производной?

7 Что такое дифференциал функции в точке? От какого аргумента он зависит?

8 В чем состоит геометрический смысл дифференциала.

9 Как используются понятия производной и дифференциала в физике?

10 Сформулируйте правила нахождения производной постоянной функции, производной суммы и разности функций, производной произведения функций, производной частного функций.

Решение типовых примеров

1 Пользуясь определением производной, найти значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0:

а) $y = x^3$ в точке $x_0 = 1$,

б) $y = \sin x$, в произвольной точке x_0,

в) $y = a^x$, $a > 0$, в произвольной точке x_0.

Решение. а) находим приращение функции $y = x^3$ в точке $x = 1$:

$\Delta y = (1+\Delta x)^3 - 1 = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Тогда по определению

$$y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3$$

б) имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Поэтому

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \Delta x/2)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

в) для функции $y = a^x$, $a > 0$, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

2 Доказать, что функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не является дифференцируемой.

Решение. Очевидно, что эта функция определена и непрерывна на множестве $\mathbf{R}$. Вычислим производную функции справа в точке $x_0 = 0$.

При $x \geq 0$ имеем $y = |x| = x$, $\Delta y = \Delta x$.

Поэтому

$$f'_+(0) = f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично при $x < 0$ получим $y = |x| = -x$, $\Delta y = -\Delta x$.

Следовательно, производная слева равна

$$f'_-(0) = f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Поскольку $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, то функция $y = |x|$ в данной точке производной не имеет.

Следовательно, она не дифференцируема в этой точке.

3 Найти дифференциал функции $y = x^2 - x + 3$ в точке $x = 2$.

Решение. Используя определение дифференциала, находим:

$$\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2) = (2+\Delta x)^2 - (2+\Delta x) + 3 - \left(2^2 - 2 + 3\right) =$$
$$= 3\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Откуда $dy = 3\Delta x = 3dx$.

4 Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение $\sqrt{0{,}98}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y(x) = \sqrt{1+x}$.

Так как $y(-0,02)=\sqrt{0,98}$, и

$$y(0)=1, \qquad y'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \qquad y'(0)=\frac{1}{2},$$

то по формуле (1.1) получаем:

$$y(-0,02)\approx y(0)+y'(0)\cdot(-0,02)=1-0,01=0,99 .$$

5 Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y=\cos x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Имеем:

$$x_0=\frac{\pi}{6}, \qquad y(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad y'(x_0)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Поэтому искомое уравнение касательной по формуле (1.3) запишется так

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right),$$

а уравнение нормали по формуле (1.4) примет вид:

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

6 Вычислить и сравнить на промежутке $0\le t\le 1$ мгновенные скорости двух точек, прямолинейные движения которых заданы уравнениями $S_1=t^2$, $S_2=2t^4$ $(t\ge 0)$.

Решение. Находим мгновенные скорости точек в момент времени t:

$$V_1(t)=S_1'(t)=2t,$$

$$V_2(t)=S_2'(t)=8t^3.$$

Отсюда получаем: $V_1(0)=V_2(0)=0$.

Видно, что $\forall t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ выполняется неравенство $V_1(t)>V_2(t)$, и $\forall t\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ – неравенство $V_1(t)<V_2(t)$.

Следовательно, в точке $t=\frac{1}{2}$ имеем

$$V_1\left(\frac{1}{2}\right)=V_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

7 Используя правила дифференцирования и таблицу производных, вычислить производные следующих функций:

а) $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$, б) $y=\frac{3x-2}{4x+5}$, в) $y=x\cos x-x^2\sin x$.

Решение. а) перепишем функцию в виде:

$$y=3x^{-\frac{1}{3}}-6x^{-\frac{2}{3}}.$$

Применяя правило дифференцирования суммы, получим:

$$y'=\left(3x^{-\frac{1}{3}}-6x^{-\frac{2}{3}}\right)'=\left(3x^{-\frac{1}{3}}\right)'-\left(6x^{-\frac{2}{3}}\right)'=3\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'-6\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=$$

$$=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}-6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}.$$

б) по правилу дифференцирования дроби имеем:

$$y'=\left(\frac{3x-2}{4x+5}\right)'=\frac{(3x-2)'\cdot(4x+5)-(4x+5)'\cdot(3x-2)}{(4x+5)^2}=$$

$$=\frac{3\cdot(4x+5)-4\cdot(3x-2)}{(4x+5)^2}=\frac{23}{(4x+5)^2}.$$

в) используя правила дифференцирования суммы и произведения, получим:

$$y'=\left(x\cos x-x^2\sin x\right)'=$$

$$=(x)'\cdot\cos x+x\cdot(\cos x)'-\left((x^2)'\cdot\sin x+x^2\cdot(\sin x)'\right)=$$

$$=\cos x-x\cdot\sin x-\left(2x\cdot\sin x+x^2\cdot\cos x\right)=$$

$$=\cos x-3x\cdot\sin x-x^2\cdot\cos x.$$

Задания для аудиторной работы

1 Пользуясь определением производной, получить формулы для производных для данных функций в точке x_0:

а) $y = 3x^2$; в) $y = \dfrac{1}{x}$;

б) $y = x \cdot \ln x$; г) $y = \operatorname{tg} \pi x - x$.

Найти дифференциалы этих функций в точке $x_0 = 1$.

2 Доказать, что функция Хевисайда

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ не является дифференцируемой.

3 Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

а) $\sqrt[3]{0{,}1002}$; в) $e^{-0{,}85}$;

б) $\sin 31°$; г) $\operatorname{arctg} 1{,}03$.

4 Составить уравнения касательной и нормали к графику функций в указанной точке:

а) $y = \sin x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

б) $y = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ в точке $x_0 = 1$.

5 Точка совершает гармоническое колебательное движение по закону $x = A \sin \omega t$. Определить скорость движения в момент времени $t_0 = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

6 Используя правила дифференцирования и таблицу производных, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y = 3x^4 + 5x^2 - 6x - 4$; г) $y = \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)^2$;

б) $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{sh} x}$; д) $y = \left(x^2 + 1\right) \cdot \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \operatorname{th} x + 2^x \cdot \operatorname{ch} x$; е) $y = \dfrac{\log_3 x}{2x^3 + 3}$.

Задания для домашней работы

1 Пользуясь определением производной, вывести формулы для производных функций в точке x_0:

а) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \operatorname{ctg} x + 2x$;

б) $y = 2\cos x + \sin x$; г) $y = 4x^2 - 3x + 7$.

Найти дифференциалы этих функций в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

2 Доказать, что функция знака

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ при } x < 0, \\ 0 \text{ при } x = 0 \\ 1 \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ не является дифференцируемой.

3 Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

а) $2{,}002^7$; в) $\cos 62°$;

б) $2^{3{,}1}$; г) $\arcsin 0{,}07$.

4 Составить уравнения касательной и нормали к графику функций в указанной точке:

а) $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $y = 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 - x - 1$ в точке $x_0 = 2$.

5 Точка совершает гармоническое колебательное движение по закону $x = A\cos \omega t$. Определить скорость движения в момент времени $t_0 = \dfrac{\pi}{\omega}$.

6 Используя правила дифференцирования и таблицу производных, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y = 2e^x$; е) $y = x^5 + 5^x$;

б) $y = \left(x^2 + 1\right) \cdot \ln x - \log_2 x$; ж) $y = 2\arcsin x - x \cdot \arccos x$;

в) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcctg} x}$; и) $y=\dfrac{x^2+8x-7}{\operatorname{ch} x}$;

г) $y=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+\dfrac{3}{2}x^2-x$; к) $y=\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{3x^3}$;

д) $y=\operatorname{th} x-x$; л) $y=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x+1}$.

Практическое занятие 2 **Производная обратной и сложной функции**

2.1 Производная обратной функции
2.2 Производная и дифференциал сложной функции
2.3 Логарифмическая производная

2.1 Производная обратной функции

Пусть функция $y=f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$ и имеет во всех точках интервала $(a;b)$ ненулевую производную $y'=f'(x)$. Тогда обратная функция $x=f^{-1}(y)$ дифференцируема во всех точках интервала $(f(a);f(b))$ и для любого $y\in(f(a);f(b))$ ее производная равна

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}.$$

2.2 Производная и дифференциал сложной функции

Пусть $y=f(u(x))$ сложная функция. Если функция $u=u(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y=f(u)$ имеет производную в точке $u_0=u(x_0)$, то сложная функция $y=f(u(x))$ имеет в точке x_0 производную и справедлива формула

$$y'=f'_u(u)\cdot u'(x).$$

Функция u называется *промежуточным аргументом*, а x – *основным аргументом*.

Полученное правило распространяется на сложную функцию, зависящую от нескольких аргументов. Предположим, что функции $y=f(u)$, $u=u(v)$, $v=v(t)$, $t=t(x)$ дифференцируемы. Рассмотрим сложную функцию F переменной x через посредство промежуточных функций f, u, v, t:

$$F(x)=f(u(v(t(x)))).$$

Придадим фиксированному значению x приращение Δx. Тогда t получит приращение Δt, v – приращение Δv, u – приращение Δu.

Запишем $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Так как u, v, t дифференцируемы, поэтому и непрерывны, то в силу непрерывности при $\Delta x\to 0$ приращения $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$ и $\Delta t\to 0$. Переходя к пределам, имеем

$$F'(x)=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_t\cdot t'_x.$$

2.3 Логарифмическая производная

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и $f(x)>0$ $\forall x\in[a;b]$. Тогда определен логарифм

$$\ln y=\ln f(x).$$

Дифференцируя обе части этого равенства по переменной x, имеем

$$(\ln y)'=(\ln f(x))'.$$

Отсюда $\frac{y'}{y}=(\ln f(x))'$ и $y'=y\cdot(\ln f(x))'$.

Производная $(\ln f(x))'$ от логарифма функции $f(x)$ называется *логарифмической производной.*

Логарифмическое дифференцирование удобно применять в двух случаях:

– при нахождении производной большого числа сомножителей,

– при нахождении производной степенно-показательной функции.

Вопросы для самоконтроля

1 Какая функция называется обратной. Как находится производная обратной функции?

2 Какая функция называется сложной? Сформулируйте правило нахождения производной сложной функции.

3 Что называется логарифмической производной? При нахождении производных каких функций ее желательно использовать?

Решение типовых примеров

1 Найти производную и дифференциал функции $y=\arcsin x$.

Решение. Рассмотрим обратную функцию $x=\sin y$. В интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ она монотонна, ее производная $x'_y=\cos y$ не обращается в нуль. Следовательно, используя соотношения между производными взаимно обратных функций, имеем

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(перед квадратным корнем выбран знак «+», так как на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos y>0$).

Тогда дифференциал равен $d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2 Найдите производные следующих сложных функций:

а) $y=\cos 4x$;

б) $y=(5x^3+8)^4$;

в) $y=\operatorname{tg}^5 x$;

г) $y=\ln(\sin 2x)$;

д) $y=\operatorname{sh} x$.

Решение. а) аргументом функции является $4x$, поэтому эту функцию можно представить как

$$y=\cos u,$$

где $u=4x$.

Так как $y'=-\sin u$, а $u'=4$, то по формуле $y'=y_u{}'\cdot u_x{}'$ получаем: $y'=-4\sin 4x$.

б) обозначим $5x^3+8=u$, тогда $y=u^4$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'=(u^4)'\cdot(5x^3+8)'=4u^3\cdot(15x^2)=60x^2(5x^3+8)^3.$$

в) имеем:

$$y'=(\operatorname{tg}^5 x)'=5\operatorname{tg}^4 x\cdot(\operatorname{tg} x)'=5\operatorname{tg}^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{5\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}.$$

г) используя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$y' = \left(\ln(\sin 2x)\right)' = \frac{1}{\sin 2x}\cdot(\sin 2x)' = \frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot(2x)' = .$$

$= \operatorname{tg} 2x \cdot 2 = 2\operatorname{tg} 2x$.

д) имеем

$$y' = (\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x\right)' - \frac{1}{2}\left(e^{-x}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

3 Найти производную функции $y = x^x$, $x > 0$.

Решение. Логарифмируя степенно-показательную функцию $y = x^x$, получим

$$\ln y = x \cdot \ln x.$$

Дифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Задания для аудиторной работы

1 Определить области существования обратных функций $x = x(y)$ и пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $y = \arccos x$; д) $y = x + \ln x$ $(x > 0)$;

б) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; г) $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$; е) $y = e^{\arcsin x}$.

2 Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y = \cos^3 x^2$; л) $y = \sqrt[4]{(5 - 8x)^3}$;

б) $y = \sin\sqrt{x^2 + 4x - 5}$; м) $y = e^{\cos 2x}$;

в) $y = \ln\sqrt{x^2 + 4x + 5}$; н) $y = \operatorname{arctg} 5x$;

г) $y = 2^{\sin 5x}$; о) $y = \ln\cos 4x$;

д) $y = \ln\arccos 2x$; п) $y = \log_{x^2} 2$;

е) $y = \sin(\ln x)\cdot\cos(\ln x) - \ln\dfrac{1}{x}$; р) $y = \left(\dfrac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2$;

ж) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$; с) $y = \dfrac{1 + \operatorname{ch} 2x}{1 - \operatorname{sh} 2x}$;

и) $y = e^{\operatorname{th}^2 x}$; т) $y = \log_2\left(\sin^2 x\right)$;

к) $y = \arccos^2\sin(2x - 1)$; у) $y = 5^{\operatorname{sh}^2(x+3)}$.

3 Вычислить значение производной функции

$$y = 2\sin^4 x \cdot \operatorname{tg} x + \cos^3 x \text{ в точке } x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

4 Используя логарифмическую производную, найти производные следующих функций:

а) $y = (\sin x)^{\cos x}$; г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$;

б) $y = (\operatorname{tg} x)^x$; д) $y = \sqrt[x]{x}$;

в) $y = \dfrac{x^2 \cdot e^{x^2}}{x^2 + 1}$; е) $y = \dfrac{\left(x^2 - 4\right)^3\left(x^3 - x + 5\right)^6}{\sqrt[5]{x^3 + 5x^2 - x + 4}}$.

Задания для домашней работы

1 Определить области существования обратных функций $x = x(y)$ и пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y = \operatorname{arcctg} x$; г) $y = 2x^2 - x^4$;

б) $y = 2 - 3x + x^2$; д) $y = x + e^x$;

в) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$; е) $y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$.

2 Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y=\sin^3 x$;

б) $y=\sin^3\dfrac{x}{3}$;

в) $y=\sqrt{x^2+\cos 4x}$;

г) $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$;

д) $y=\arccos\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

е) $y=e^{\frac{1}{2}\operatorname{th}^2 x}\cdot\operatorname{ch} x$;

ж) $y=\log_2\left(\operatorname{sh}2x+\operatorname{ch}^2 x\right)$;

и) $y=\operatorname{th}^2 x-\ln(\operatorname{sh} x)$;

к) $y=\sqrt[3]{x^3+3x+5}$;

л) $y=\sin^2\left(x^2-2x+3\right)$;

м) $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\sqrt{2}(x-2)$;

н) $y=\arcsin\dfrac{x}{8}$;

о) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$;

п) $y=3^{\cos^3 x-2\cos x}$;

р) $y=\ln\ln x\cdot(\ln\ln\ln x-1)$;

с) $y=\ln\operatorname{tg} x+\cos x\cdot\ln x^2$.

3 Вычислить значение производной функции

$$y=4\cos^3 x\cdot\sin x+\operatorname{ctg} x$$

в точке $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4 Используя логарифмическую производную, найти производные следующих функций:

а) $y=x^{\operatorname{tg} x}$;

б) $y=x^{\sqrt{x}}$;

в) $y=(\operatorname{arctg} x)^x$;

г) $y=(\cos x)^{\sin\left(x^2\right)}$;

д) $y=\dfrac{\left(x^2-5x+4\right)^7\left(4x^2+5\right)^6}{\sqrt[4]{x^4-8}}$;

е) $y=x^{\cos x}$;

ж) $y=e^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x}\cdot\sin^3 x\cdot\operatorname{tg}^2 x$;

и) $y=\dfrac{\sqrt[5]{x-3}\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt[4]{x^2+5x-2}}$.

Практическое занятие 3 **Производные и дифференциалы высших порядков**

3.1 Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

3.2 Производная неявной функции

3.3 Производные и дифференциалы высших порядков

3.1 Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

Пусть функция $y=y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t),\end{aligned}\right\} \qquad (3.\ 1)$$

где $t\in T\subset\mathbf{R}$.

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы для любого $t\in T$ и $\varphi'(t)\neq 0$. Кроме этого, будем считать, что функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t=\varphi^{-1}(x)$, которая также дифференцируема. Тогда функцию $y=y(x)$, заданную параметрическими уравнениями (3.1), можно рассматривать как сложную функцию $y=\psi(t)$, $t=\varphi^{-1}(x)$, считая t промежуточным аргументом.

Продифференцировав функцию $y=\psi(t)$, $t=\varphi^{-1}(x)$, по правилу дифференцирования сложной функции, получим $y'_x=\psi'(t)\cdot t'_x$. Производную t'_x найдем по правилу дифференцирования обратной функции:

$$t'_x=\frac{1}{x'_t}=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Учитывая, что $\varphi'(t)=x'_t$, $\psi'(t)=y'_t$, окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t),\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} y'_x&=\frac{y'_t}{x'_t},\\ x&=\varphi(t).\end{aligned}\right.$$

3.2 Производная неявной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема. Если в уравнении $F(x, y) = 0$ под переменной y подразумевать функцию $y(x)$, то это уравнение обращается в тождество по аргументу x:

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in [a; b].$$

Дифференцируем уравнение по x и считаем, что переменная y есть функция переменной x. Получается новое уравнение, содержащее x, y и y'. Разрешая его относительно y', находим производную функции $y = f(x)$, заданной в неявном виде.

3.3 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ является дифференцируемой. Производная $f'(x)$ является также функцией от x и может быть дифференцируема.

Производная от производной функции $y = f(x)$ называется *производной второго порядка* или *второй производной функции.*

Обозначается: y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Механический смысл второй производной. Пусть $s = s(t)$ – закон движения материальной точки, тогда первая производная определяет скорость движения $v = s'(t)$. Вторая же производная есть скорость изменения скорости движения, т.е. ускорение $a = \dfrac{dv}{dt} = s''(t)$.

Аналогично вводятся производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

Производная от производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется *производной третьего порядка.*

Обозначается: y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$:

Аналогично

$$y^{IV} = (y''')' = f^{IV}(x).$$

Производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x).$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Найденная производная y'_x содержит, в общем случае, как аргумент x, так и функцию y. По определению вторая производная от функции $y = f(x)$ есть производная от первой производной. Следовательно, для нахождения второй производной, надо продифференцировать найденную первую производную по аргументу x, продолжая рассматривать y как функцию от x. В выражение для второй производной войдут x, y и y'. Подставляя вместо y' его значение, находим y'', зависящую только от x и y. Аналогично поступаем при нахождении y''', y^{IV} и производных более высоких порядков.

Пусть y – функция от x, заданная уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\}$$

где $t \in T$.

Поскольку вторая производная от y по x есть первая производная от y'_x по x, то задача нахождения второй производной сводится к отысканию первой производной от функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, по определению первой производной для функции, заданной параметрическими уравнениями, имеем:

$$\left.\begin{array}{r} y''_x = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t). \end{array}\right\}$$

Аналогично находится третья производная:

$$\left.\begin{array}{r} y'''_x = \dfrac{\left(y''_x\right)'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t) \end{array}\right\}$$

и производные высших порядков.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$ зависит от x и $dx = \Delta x$, причем Δx от x не зависит, так как приращение в данной точке x можно выбирать независимо от точки x. Поэтому dx в формуле первого дифференциала будет постоянным. Тогда выражение $f'(x)dx$ зависит только от x и его можно дифференцировать по x.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ в данной точке x называется *дифференциалом второго порядка* или *вторым дифференциалом* и обозначается d^2y или $d^2f(x)$, т. е. $d^2y = d(dy)$. Полагая dx в формуле $dy = f'(x)dx$ первого дифференциала постоянным, получим:

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)\cdot dx + f'(x)\cdot d(dx) =$$
$$= \left(f''(x)dx\right)dx = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка $d^3y = d\left(d^2y\right)$ и он равен:.

$$d^3y = d\left(f''(x)(dx)^2\right) = d\left(f''(x)\right)(dx)^2 + f''(x)d\left((dx)^2\right) =$$
$$= \left(f'''(x)dx\right)(dx)^2 = f'''(x)(dx)^3.$$

Дифференциал n-го порядка (или *n-й дифференциал*) функции $y = f(x)$ определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^{(n)}y = d\left(d^{(n-1)}y\right)$ и $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Скобки при степенях dx можно опустить: $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Отсюда следует, что производная n-го порядка функции $y = f(x)$ есть отношение ее дифференциала n-го порядка к n-й степени дифференциала независимой переменной:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

В частности, при $n = 1, 2, 3$ получим соответственно:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},\ f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},\ f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Как найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями?

2 Как найти производную неявной функции?

3 Дайте определение второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

4 Может ли существовать вторая производная $f''(x_0)$, если не существует первая? Приведите пример функции, у которой существует $f'(x_0)$, но не существует $f''(x_0)$.

5 Как определяются производные высших порядков?

6 Дайте определение дифференциала n- го порядка:

а) если x независимая переменная;

б) если x зависимая переменная.

Решение типовых примеров

1 Найти $y'(x)$ и $y''(x)$, если функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$$

где $0 < t < \pi$.

Р е ш е н и е. Находим первую производную:

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = -\dfrac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}, \\ t = \arccos\dfrac{x}{R}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x = -\frac{\frac{x}{R}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Итак,

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \\ x = R\cos t. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x = \dfrac{(-\operatorname{ctg} t)'}{(R\cos t)'}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x = -\dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ x = R\cos t. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} y''_x = -\dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ t = \arccos\dfrac{x}{r}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$y''_x = -\frac{1}{\sin^3\left(\arccos\frac{x}{R}\right)} = -\frac{1}{\left(1-\left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R^3}{\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2 Найти производную функции заданной неявно

$$x^3 + x^2y^2 - xy - y^3 = 0$$

Решение. Продифференцируем данное уравнение по переменной x, считая, что y есть функция от x:

$$3x^2 + 2xy^2 + 2x^2yy' - y - xy' - 3y^2y' = 0.$$

Отсюда

$$y' = \frac{y - 3x^2 - 2xy^2}{2x^2y - x - 3y^2}.$$

3 Найти производную n-го порядка от функции $y = \sin x$.

Решение. Выполняя последовательное дифференцирование, получаем:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

……………………………………,

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

4 Найти производную второго порядка функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Находим первую производную данной функции:

$$y = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

Дифференцируя полученное выражение, получаем:

$$y'' = (\sin 2x)' = \cos 2x(2x)' = 2\cos 2x.$$

5 Найти производную второго порядка от функции $y(x)$, заданной уравнением: $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Найдем первую производную $2x + 2yy' = 0$. Отсюда $y' = -\dfrac{x}{y}$. Дифференцируя данное уравнение вторично, получим:

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - y'x}{y^2}.$$

Учитывая, что $y' = -\dfrac{x}{y}$, имеем:

$$y'' = -\frac{y - \left(-\dfrac{x}{y}\right)x}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{R^2}{y^3}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти $y'(x)$ и $y''(x)$, если функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

а) $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$; в) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$;

б) $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$; г) $x = -5t^2 + 2t^5$, $y = -3t^2 + 2t^3$

2 Найти производные $y'(x)$ и $y''(x)$ функций, заданных неявно уравнением:

а) $y^2 + x^2 + xy - 3 = 0$; г) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

б) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$; д) $\sin y - e^y - e^{-x} = 0$;

в) $y + 2x - \operatorname{arcctg} y = 0$; е) $\operatorname{sh}(xy) + \operatorname{cth} x = 0$.

Вычислить дифференциалы 2-го порядка в точке $M(1,1)$.

3 Найти производные 2-го порядка:

а) $y = 4x^2 - 2x + 3$; в) $y = x + \sqrt{4-x}$;

б) $y = \dfrac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$; г) $y = \ln\dfrac{x+3}{x-3}$.

4 Найти производные 3-го порядка:

а) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 7$; в) $y = \sin 2x$;

б) $y = e^{3x}$; г) $y = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 9$.

5. Найти производные n-го порядка:

а) $y = \ln x$; б) $y = 2^x$; в) $y = \dfrac{1}{2x+5}$.

Задания для домашней работы

1 Найти $y'(x)$ и $y''(x)$, если функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

а) $x = 4t$, $y = t^2$;

б) $x = t(1 - \sin t)$, $y = t\cos t$;

в) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

2 Найти производные $y'(x)$ и $y''(x)$ функций, заданных неявно уравнением:

а) $x^2 + 5xy + y^3 - 7 = 0$; г) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$;

б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y + 20 = 0$; д) $y + 3x - \operatorname{arctg} 2y = 0$;

в) $y^2 + xy + \sin y = 0$; е) $\operatorname{ch}(x + y^2) - \operatorname{th} y = 0$.

3 Найти производные 2-го порядка:

а) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$; г) $y = x^3 + 6x^2 - 5x + 8$;

б) $y = \ln\dfrac{x-4}{x+4}$; д) $y = \cos^2 x$;

в) $y = \operatorname{sh}^2 x$; е) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

4 Найти производные 4-го порядка:

а) $y = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$; б) $y = \ln(x+1)$.

5 Найти производные n-го порядка:

а) $y = \cos x$; б) $y = \dfrac{1}{1+x}$.