Практическое занятие 6 **Локальные и глобальные экстремумы функции**

6.1 Точки локального и глобального экстремума
6.2 Необходимое и достаточные условия существования локального экстремума функции
6.3 Глобальный экстремум функции на отрезке

6.1 Точки локального и глобального экстремума

С помощью производной функции можно произвести полное исследование функции (найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы, точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости, асимптоты графика) и построить график этой функции.

Теорема 1 Для того чтобы дифференцируемая на $(a;b)$ *функция не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x)\geq 0$ *(* $f'(x)\leq 0$*) для всех* $x\in(a;b)$. *Если же для любого* $x\in(a;b)$ $f'(x)>0$ *(* $f'(x)<0$*), то функция* f *возрастает (убывает) на этом интервале.*

Геометрический смысл теоремы. Касательная к графику возрастающей на $(a;b)$ функции ($f'(x)>0$) составляет острый угол с осью Ox, касательная к графику убывающей на $(a;b)$ функции, ($f'(x)<0$) образует тупой угол с осью Ox. Если функция $f(x)$ на $(a;b)$ является постоянной $f(x)=C$, $C=\text{const}$, то $f'(x)=0$ и касательная к графику функции параллельна оси Ox.

Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $f(x)$ если существует δ-окрестность точки x_0, такая, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ выполняется неравенство (рисунок 6.1)

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)<0$$
$$(\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)>0).$$

Значение $f(x_0)$ называется *локальным максимумом (минимумом)* функции.

Обозначается:

$$\max_{x\cup U(\delta;x_0)} f(x)=f(x_0)$$
$$(\min_{x\cup U(\delta;x_0)} f(x)=f(x_0)).$$

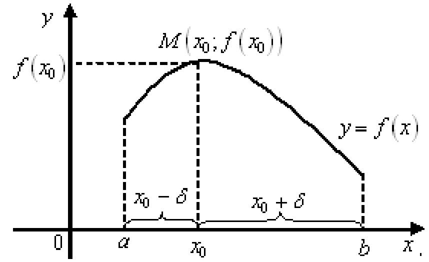

Рисунок 6.1 – Локальный максимум $M(x_0,f(x_0))$

Точки максимума или минимума функции называются *точками экстремума функции*, а максимумы и минимумы функции называются *экстремумами функции*.

Экстремумы функции носят локальный характер – это наибольшее или наименьшее значения функции по сравнению с близлежащими ее значениями.

Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ имеет несколько максимумов и минимумов, то возможен случай, когда максимум функции меньше ее минимума.

Наименьшее и наибольшее значения функции на $[a;b]$ называются *абсолютными минимумом* и *максимумом* или *глобальными экстремумами* функции $f(x)$

Обозначаются: $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

6.2 Необходимое и достаточные условия существования локального экстремума функции

Теорема 2 (необходимое условие экстремума) Если в точке x_0 *функция* $f(x)$ *достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.*

Из теоремы 2 следует, что в точках экстремума функции $f(x)$ касательная к ее графику:

– параллельна оси абсцисс, если существует $f'(x_0)=0$ (рисунок 6.2, а);

– параллельна оси ординат, если $f'(x_0)$ бесконечна (рисунок 6.2, б);

– существуют не совпадающие левая и правая касательные, если $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ (рисунок 6.2,в).

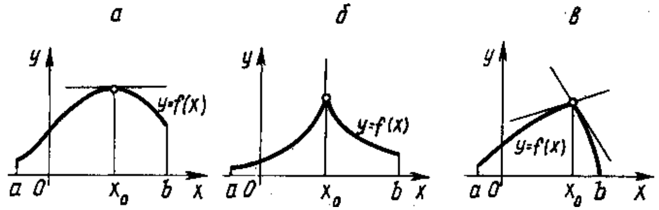

Рисунок 6.2 – Положение касательной к графику функции в точках экстремума

Точки, в которых производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль или не существует, называют *критическими* или *точками возможного экстремума*. Точки, в которых производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль, называют *стационарными*.

Критическая точка x_0 называется *угловой точкой* функции $f(x)$ если $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ (рисунок 6.2, в). Критическая точка x_0 называется *точкой возврата* функции, если ее левая $f'_-(x_0)$ и правая $f'_+(x_0)$ производные бесконечны (рисунок 6.2, б).

Не всякая критическая точка функции $f(x)$ является точкой ее локального экстремума.

Теорема 3 (первый достаточный признак существования экстремума функции) Пусть x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка локального максимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка локального минимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Теорема 4 (второй достаточный признак существования экстремума функции) Стационарная точка x_0 функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в $U(\delta;x_0)$, является точкой локального минимума $f(x)$, если $f''(x_0)>0$, и точкой локального максимума, если $f''(x_0)<0$ (рисунок 6.3).

а) б)

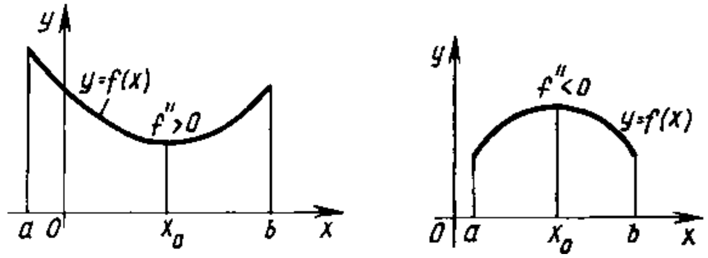

Рисунок 6.3 – Локальные минимум (а) и максимум (б) функции

Теорема 5 (третий достаточный признак существования экстремума функции) Пусть функция $f(x)$ – n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и в этой точке

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда:

1) если n – четное и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума.

2) если n – четное и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума;

3) если n – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

6.3 Глобальный экстремум функции на отрезке

Одной из основных характеристик функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ являются ее глобальные экстремумы, т. е. наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[a;b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах этого отрезка или в точках ее локального экстремума. Следовательно, для отыскания глобальных экстремумов $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ функции $f(x)$, надо найти ее значения на концах отрезка $[a;b]$, в точках локального экстремума и выбрать соответственно наименьшее и наибольшее из них.

Если x_1, x_2, ..., x_n – точки локальных экстремумов, то

$$\min_{x\in[a;b]} f(x) = \min\{f(a); f(b); f(x_1);...;(x_n)\},$$

$$\max_{x\in[a;b]} f(x) = \max\{f(a); f(b); f(x_1);...; f(x_n)\}$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какие условия должны выполнятся, чтобы функция возрастала, убывала, была неубывающей и невозрастающей?

2 Какая точка называется точкой локального экстремума?

3 Какая точка называется точкой абсолютного экстремума?

4 Сформулируйте необходимое условие локального экстремума.

5 Сформулируйте достаточные условия экстремума.

6 Как находится глобальный экстремум функции на отрезке?

Решение типовых примеров

1 Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

Решение. Областью определения данной функции является множество $D(f) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Производная этой функции имеет вид

$$y' = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3} & \text{при } x\in(-\infty;0)\cup(0;1), \\ \dfrac{2-x}{x^3} & \text{при } x\in(1;+\infty). \end{cases}$$

и обращается в нуль в точке $x = 2$. При этом производная не существует в точках $x = 0$ и $x = 1$. Поэтому точками возможного экстремума являются $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Они разбивают область определения на четыре интервала монотонности: $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Видно, что $y'(x) > 0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(1;2)$, $y'(x) < 0$ при $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x\in(-\infty;0)\cup(1;2)$, и монотонно убывает при $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$. Согласно первому достаточному условию локального экстремума, в точке $x_3 = 2$ функция достигает максимума, $y_{\max} = y(2) = \dfrac{1}{4}$, а в точке $x_2 = 1$ функция имеет минимум, $y_{\max} = y(1) = 0$.

2 Найти экстремумы функции $y = 1-(x-2)^{\frac{4}{5}}$.

Решение. Данная функция определена при всех $x\in\mathbf{R}$. Производная данной функции имеет вид

$$y' = -\frac{4}{5}(x-2)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}.$$

Производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует при $x = 2$. Поэтому точка $x = 2$ является точкой возможного экстремума функции.

При $x < 2$ имеем $y' > 0$, при $x > 2$ имеем $y' < 0$. Согласно первому достаточному условию точка $x = 2$ является точкой максимума, $y_{\max} = 1$.

3 Найти экстремумы функции $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Данная функция определена при $x\in[-1;1]$.

Найдем первую производную

$$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решая уравнение $y' = 0$, найдем

$$\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow 1-2x^2 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При этом функция y' не существует при $x = \pm 1$.

Значит, точками возможного экстремума являются $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. В точках $x = \pm 1$ экстремума нет, так как по определению производной точками экстремума могут быть лишь внутренние точки области определения.

Вторая производная функции имеет вид

$$y'' = \frac{x\left(2x^2-3\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как $y''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$, то функция имеет в точке $x_1 = -1/\sqrt{2}$ минимум, и

$$y_{\min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

В точке $x_2 = 1/\sqrt{2}$ получим $y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} < 0$.

Значит в точке $x_2 = 1/\sqrt{2}$ функция имеет максимум, и

$$y_{\max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

4 Найти на отрезке $[-1;4]$ глобальные экстремумы функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

Решение. Определяем точки возможного экстремума (стационарные точки) функции $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9,\ 3x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Значит, $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

Так как при $-1 < x < 1$ имеем $y' > 0$, при $1 < x < 3$ имеем $y' < 0$, то $x_1 = 1$ является точкой максимума. Так как при $1 < x < 3$ имеем $y' < 0$ и при $3 < x < 4$ имеем $y' > 0$, то $x_2 = 3$ является точкой минимума.

Вычисляем значения $f(x)$ на концах отрезка $[-1;4]$ и в стационарных точках, принадлежащих отрезку:

$$f(-1) = -16,\ f(4) = 4,\ f(1) = 4,\ f(3) = 0.$$

Тогда

$$\min_{x\in[-1;4]} f(x) = \min\{-16,4,4,0\} = -16,$$

$$\max_{x\in[-1;4]} f(x) = \max\{-16,4,4,0\} = 4$$

Наименьшее значение данная функция принимает на левом конце отрезка в точке $x = -1$, наибольшее – в точке $x = 1$ и на правом конце отрезка в точке $x = 4$. График данной функции изображен на рисунке 6.4.

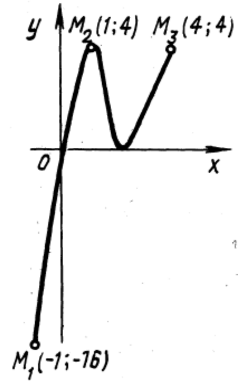

Рисунок 6.4 – График функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ на отрезке $[-1;4]$

5 Баржу, палуба которой на $h=4$ м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот, со скоростью $v=2$ м/с. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на расстояние l=8м (по горизонтали)?

Решение. Пусть через t секунд после начала движения баржа (рисунок 6.5) находится на расстоянии $l(t)$ м от пристани (по горизонтали).

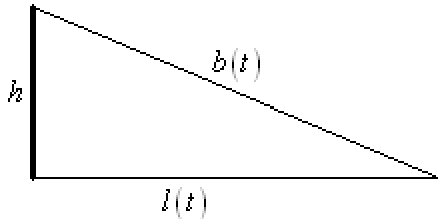

Рисунок 6.5 – Геометрическая интерпретация задачи 5

Тогда длина каната представляет собой функцию

$$b(t)=\sqrt{l^2(t)+h^2},$$

производная которой имеет вид

$$b'(t)=\frac{l(t)l'(t)}{\sqrt{l^2(t)+h^2}}.$$

Поскольку канат подтягивают, то по условию задачи $b'(t)=-2$. Отсюда

$$-2=\frac{l(t)l'(t)}{\sqrt{l^2(t)+h^2}}.$$

Разрешая относительно $l'(t)$, получим скорость движения баржи

$$l'(t)=\frac{-2\sqrt{l^2(t)+h^2}}{l(t)}=-2\frac{b(t)}{l(t)}.$$

Ускорение движения баржи есть вторая производная от функции $l(t)$:

$$a(t)=-l''(t)=2\frac{b'(t)\cdot l(t)-b(t)\cdot l'(t)}{l^2(t)}.$$

Если t_0 – тот момент времени, когда $l(t_0)$=8, то

$$b(t_0)=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5},$$

$$l'(t_0)=\frac{-2\cdot 4\sqrt{5}}{8}=-\sqrt{5},$$

$$a(t_0)=2\frac{b'(t_0)\cdot l(t_0)-b(t_0)\cdot l'(t_0)}{l^2(t_0)}=\frac{1}{8}\ (\text{м/с}^2).$$

6 Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Каков должен быть угол при большем основании, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

Решение. На рисунке 6.6 изображена трапеция $ABCD$. Пусть $AB=a$. Тогда по условию $AB=CD=BC=a$. Пусть BE и CF – высоты трапеции; BE=CF. Полагая $\angle BAD$=α, выразим площадь трапеции как функцию от α:

$$S=S(\alpha),\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

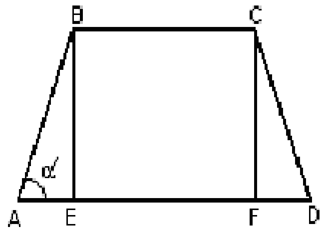

Рисунок 6.6 – Геометрическая интерпретация задачи *6*

Площадь трапеции $ABCD$ равна

$$S_{\text{ABCD}}=S_{ABE}+S_{BCFE}+S_{CDF}$$

Из геометрических соображений имеем:

$$S_{ABE}=S_{CDF}=\frac{1}{2}AE\cdot BE==\frac{1}{2}a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha=\frac{1}{4}a^2\sin 2\alpha,$$

$$S_{BCFE}=BC\cdot BE=a^2\sin\alpha.$$

Тогда площадь трапеции равна

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha+a^2\sin\alpha .$$

Исследуем функцию $S(\alpha)$ на экстремум.

$$S'(\alpha)=a^2(\cos 2\alpha+\cos\alpha).$$

Решая уравнение $S'(\alpha)=0$, получим:

$$\cos 2\alpha+\cos\alpha=0 \;\Rightarrow\; \cos\alpha=-1 \text{ и } \cos\alpha=\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\alpha_1=\pi+2n\pi,\ n\in\mathbf{Z},$$

$$\alpha_2=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Единственным решением этого уравнения, лежащим на $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ является $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Убедимся, что при $\alpha=\frac{\pi}{3}$ функция $S(\alpha)$ достигает максимума.

$$S''(\alpha)=-a^2(2\sin 2\alpha+\sin\alpha).$$

Так как $\sin\frac{2\pi}{3}>0$, $\sin\frac{\pi}{3}>0$, $a>0$, то $S''\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$.

Значит, при $\alpha=\frac{\pi}{3}$ функция $S(\alpha)$ достигает наибольшего значения на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Угол при большем основании трапеции равен $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти интервалы монотонности и точки экстремума следующих функций:

а) $y=x^2\left(1-x\sqrt{x}\right)$; г) $y=(2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$;

б) $y=\operatorname{ch}^2 x$; д) $y=\ln(x^2+1)$;

в) $y=x+\sqrt{x-3}$; е) $y=\frac{|x+1|}{(x-1)^2}$.

2 Найти глобальные экстремумы функции на отрезке:

а) $y=x^4-2x^2+3$, $[-3;2]$;

б) $y=2x^3-5x^2+7x-3$, $[-2;2]$;

в) $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $[0;1]$.

3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции в ее области определения.

а) $y=\frac{x}{(1+x^2)^2}$; б) $y=x\ln x$; в) $y=\frac{e^x}{x}$.

4 Разложить число 80 на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

5 Пункт B находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A до ближайшей к пункту B точки C составляет 285 км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижение между пунктами A и B, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе равна 20 км/ч?

6 Проволока длиной l согнута в прямоугольник. Каковы размеры этого прямоугольника, если площадь его наибольшая?

Задания для домашней работы

1 Найти интервалы монотонности и точки экстремума следующих функций:

а) $y=x^3-5x^2+3x-2$; г) $y=\frac{\ln x^2}{x}$;

б) $y=\operatorname{sh}^2 x$; д) $y=x-\sqrt{2-x}$;

в) $y=(x-1)^{\frac{6}{7}}$; е) $y=|x+3|-\frac{x}{x^2-4}$.

2 Найти глобальные экстремумы функции на отрезке:

а) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$, $[-4;1]$;

б) $y = x^4 - 3x^3 + 15$, $[-2;4]$;

в) $y = x + \sqrt{x}$, $[0;4]$.

3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции в ее области определения.

а) $y = \dfrac{3x^2 - 1}{\left(1 + x^2\right)^3}$;   б) $y = e^{-x^2}$;   в) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 5}$.

4 Найти наибольшее значение произведения двух положительных чисел, сумма которых постоянна и равна 34.

5 В шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема.

6 Для доставки продукции завода N в город A (рисунок 6.7) строится шоссе NP, соединяющее завод с железной дорогой AB=500 км, проходящей через город A. Стоимость перевозок по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге. К какому пункту P нужно подвести шоссе, чтобы общая стоимость перевозок продукции завода N в город A по железной дороге и шоссе была наименьшей? Здесь $NB = 100$ км.

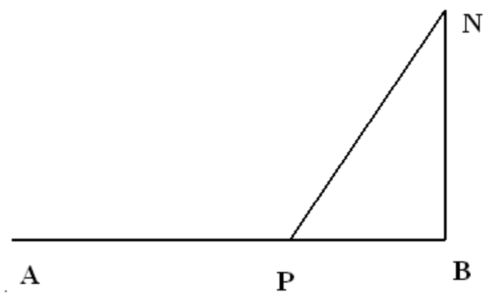

Рисунок 6.7 – Геометрическая интерпретация задачи 6 из домашней работы

Практическое занятие 7 **Исследование функций**

7.1 Выпуклость и вогнутость графика функции
7.2 Точки перегиба графика функции
7.3 Асимптоты графика функции
7.4 Общая схема исследования функции

7.1 Выпуклость и вогнутость графика функции

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* на интервале $(a;b)$, если дуга кривой $y=f(x)$ $\forall x \in (a;b)$ расположена выше любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рисунок 7.1).

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* на интервале $(a;b)$, если дуга кривой $y = f(x)$ $\forall x \in (a;b)$ расположена ниже любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рисунок 7.2).

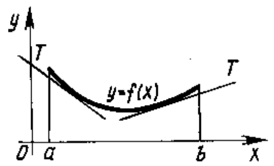

Рисунок 7.1 – Вогнутость графика

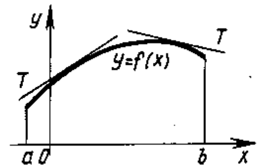

Рисунок 7.2 – Выпуклость графика

Теорема 1 (достаточный признак вогнутости (выпуклости) графика функции) Если функция $y = f(x)$ на интервале $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ вогнутый (выпуклый вниз). Если функция $y = f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ выпуклый.

7.2 Точки перегиба графика функции

Точка $M(x_0; f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется *точкой перегиба* (рисунок 7.3).

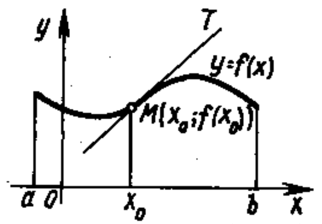

Рисунок 7.3 – Точка $M(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба графика функции

Теорема 2 (необходимое условие точек перегиба) Если функция $f(x)$ имеет в точке $M(x_0; f(x_0))$ перегиб и существует вторая производная $f''(x)$ в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Обратное утверждение верно не всегда.

Точки $M(x_0; f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называются *точками возможного перегиба*, если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Теорема 3 (достаточное условие существования точек перегиба) Если для функции $f(x)$ вторая производная $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в нуль или не существует и при переходе через нее меняет свой знак, то точка $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

7.3 Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, т.е. при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что расстояния между точками графика функции и точками некоторой прямой с теми же абсциссами

сколь угодно малы. Такая прямая называют *асимптотой графика*.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} = f(x) \pm \infty \text{ или } \lim_{x \to x_0 + 0} = f(x) \pm \infty .$$

Очевидно, что непрерывные на множестве **R** функции вертикальных асимптот не имеют; такие асимптоты существуют только в точках разрыва второго рода функции $y = f(x)$. Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот графика функции надо определить те значения x, при которых хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Теорема 4 Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x \to \pm\infty} = \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b .$$

Если $k = 0$, то прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой.*

7.4 Общая схема исследования функции

Исследование дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ на $D(f)$ (за исключением, быть может, конечного множества точек) и построение ее графика может быть выполнено по следующей схеме:

1) находится $D(f)$, определяются точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрия;

2) находятся наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции (если они существуют);

3) с помощью первой производной функции определяются стационарные точки и интервалы монотонности;

4) с помощью второй производной определяются интервалы вогнутости и выпуклости графика функции, точки перегиба;

5) находятся локальные экстремумы функции на $D(f)$.

По результатам исследований строится график функции. Если исследуемая функция четная или нечетная, то достаточно исследовать функцию и построить ее график для положительных значений аргумента из области определения. Иногда для удобства результаты исследования сводятся в таблицу, построение которой приведено в типовом примере 5.

При решении конкретных задач отдельные этапы схемы могут быть расширены, другие же могут оказаться излишними или не выполнимыми.

Вопросы для самоконтроля

1 Какой график функции называется выпуклым, вогнутым?

2 Сформулируйте достаточное условие выпуклости и вогнутости.

3 Какая точка графика называется точкой перегиба?

4 Сформулируйте необходимое и достаточное условия точек перегиба.

5 Какая прямая называется вертикальной (наклонной, горизонтальной) асимптотой?

6 Перечислите основные этапы исследования функции.

Решение типовых примеров

1 Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $y = x^5 + 5x - 6$.

Решение. Имеем:

$$y' = 5x^4 + 5,$$
$$y'' = 20x^3.$$

Если $x < 0$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла.

Если $x > 0$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута.

Итак, кривая выпукла на промежутке $(-\infty;0)$, вогнута на промежутке $(0;+\infty)$.

2 Найти точки перегиба графика функции:

а) $y = (x+1)^2(x-2)$; б) $y = \sqrt[3]{(x-5)^5} + 2$.

Решение. а) первая и вторая производные равны соответственно

$$y' = 3(x^2 - 1),$$
$$y'' = 6x.$$

Так как $y'' = 0$ в точке $x = 0$, то исследуем эту точку на перегиб. В окрестности точки $x = 0$ при $x < 0$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла, при $x > 0$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута. Следовательно, $x = 0$ – точка перегиба, при этом $y_{\text{пер}} = -2$.

б) имеем:

$$y' = \frac{5}{3}(x-5)^{\frac{2}{3}},\ y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}.$$

Вторая производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует в точке $x = 5$. В окрестности точки $x = 5$ получим при $x < 5$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла, при $x > 5$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута. Следовательно, $x = 5$ – точка перегиба, при этом $y_{\text{пер}} = 2$.

3 Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Решение. 1) функция определена на промежутках

$$(-\infty;-2) \cup (-2;+\infty).$$

Так как

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = -\infty,\ \lim_{x\to -2+0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = +\infty,$$

то прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой.

2) наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x(x+2)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{(x+2)}-x\right]=-4.$$

Следовательно, наклонная асимптота имеет вид

$$y=x-4.$$

3) горизонтальных асимптот нет, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{(x+2)}=\infty.$$

4 Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ и построить ее график.

*Решение***.** Для построения графика функции проведем ее исследование по приведенной схеме.

1) находим $D(f)$*, определяем точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью* Oy*, периодичность, симметрию.* Функция неопределенна в точках, где знаменатель обращается в нуль, т. е. при $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$. Следовательно, область определения есть $D(f)=(-\infty;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};\infty)$.

Исследуем поведение функции в окрестностях точек $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty.$$

Следовательно, точки $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$ являются точками разрыва второго рода.

Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{3-x^2}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{3-x^2}=-\infty$, то здесь функция неограничена.

График функции пересекает координатные оси в только в начале координат, так как $y=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$.

Функция не является периодичной.

Функция нечетная, так как область определения $D(f)$ симметрична и $f(-x)=-f(x)$, т. е.

$$\frac{(-x)^3}{3-x^2}=\frac{-x^3}{3-x^2}.$$

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат и достаточно исследовать функцию для $x\ge 0$.

2) асимптоты графика функции. Поскольку односторонние пределы в точках $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$ раны бесконечности, то прямые $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(3-x^2)x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=0,$$

Прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой графика функции.

3) точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции. Находим первую производную функции:

$$y'=\frac{3x^2(3-x^2)+2x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$

Функция y' определена на $D(f)$. В промежутке $[0;+\infty)$ производная обращается в нуль в точках $x_1=0$, $x_2=3$.

Определяем интервалы монотонности из неравенств $y'>0$ и $y'<0$ для любого $x\ge 0$.

Имеем:

$$\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}>0,\; 9-x^2>0 \;\Rightarrow\; 0<x<3,$$

т. е. функция возрастает на $\left(0;\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};3\right)$.

Аналогично:

$$\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}<0\,,\ 9-x^2<0\ \Rightarrow\ x>3\,,$$

т. е. функция убывает на $\left[3;\infty\right)$.

4) промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

Вычисляем вторую производную функции $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$:

$$y''=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)2\left(3-x^2\right)\left(-2x\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=\frac{6x\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

Функция y'' определена на области определения $D(f)$.

Находим интервалы вогнутости и выпуклости графика функции из неравенств $y''>0$, $y''<0$ для любого $x\geq 0$.

Имеем:

$$\frac{6x\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}>0\,,$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 3-x^2>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>0, \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \end{cases}\Rightarrow 0<x<\sqrt{3}\,,$$

т. е. кривая вогнута на $\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Аналогично:

$$\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}<0\,,$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 3-x^2<0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>0, \\ 3<x^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>0, \\ x<-\sqrt{3},\ x>\sqrt{3} \end{cases}\quad\Rightarrow x>\sqrt{3}\,,$$

т. е. кривая выпукла на $\left(\sqrt{3};\infty\right)$.

В точке $x=0$ имеем $y''=0$ и $y''(x)<0$ в окрестности $U(\delta;0-0)$, а $y''(x)>0$ в окрестности $U(\delta;0+0)$. Значит, точка кривой с абсциссой $x=0$ отделяет интервал выпуклости кривой от ее интервала вогнутости. Поэтому $O(0;0)$ является точкой

перегиба кривой.

5) локальные экстремумы. Определяем с помощью второй производной $y''(x)$ локальные экстремумы. Так как $y''(3)=0$, точка A_1 с абсциссой $x=3$ является точкой локального максимума. В силу симметрии графика функции точка A_2 с абсциссой $x=-3$ является точкой локального минимума. Итак, $\max\limits_{x\in U(\delta;3)}y(x)=-4{,}5$, $\min\limits_{x\in U(\delta;-3)}y(x)=4{,}5$.

Результаты исследования функции заносим в таблицу 7.1.

Таблица 7.1 – Результаты исследования функции

x	0	$\left(0;\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3};3\right)$	3	$\left(3;\infty\right)$
y'	0	+	Не сущ.	+	0	–
y''	0	+	Не сущ.	–	–	–
y	0	↗	Не сущ.	↗	-4,5	↘
	(т.перег)				max	

Исходя из результатов, содержащихся в таблице 7.1, строим график данной функции для $x\in\left[0;\infty\right)$. Используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рисунок 7.4).

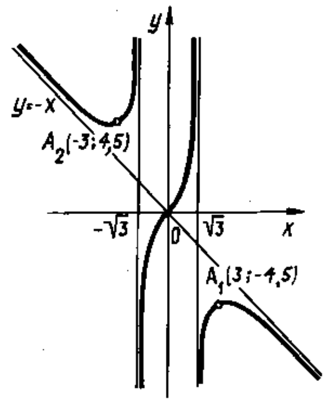

Рисунок 7.4 – График функции $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$

Задания для аудиторной работы

1 Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

а) $f(x)=2x^4-3x^2+x-1$;
б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;
в) $f(x)=e^{-x^2}$;
г) $f(x)=x+36x^2-2x^3-x^4$;
д) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{4}}$;
е) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$;
ж) $f(x)=x-\cos x$;
и) $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$;
к) $f(x)=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$;
л) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

2 Найти асимптоты графиков функций:

а) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$;
б) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x$;
в) $y=2x-\dfrac{\cos x}{x}$;
г) $y=x^2e^{-x}$;
д) $y=x+\operatorname{arctg}2x$;
е) $y=2^{\frac{1}{1-x}}$.

3 Исследовать функции:

а) $f(x)=x^3-3x+2$;
б) $f(x)=(x-1)^2(x+2)$;
в) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$;
г) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$;
д) $f(x)=x^4-10x^2+9$;
е) $f(x)=x^3-5x^2+3x-1$;
ж) $f(x)=x+\dfrac{7}{x}-\dfrac{3}{x^2}$;
и) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$.

Задания для домашней работы

1 Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

а) $f(x)=x^5-10x^2+3x$;
б) $f(x)=x+\sin x$;
в) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;
г) $f(x)=x^4-12x^3+48x^2$;
д) $f(x)=2x^2+\ln x$;
е) $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$;
ж) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$;
и) $f(x)=x^4-6x^2+5x$;
к) $f(x)=4x^2+\dfrac{1}{x}$;
л) $f(x)=\sin x+\cos x$.

2 Найти асимптоты графиков функций:

а) $y=x+\dfrac{\sin x}{x}$;
б) $y=\dfrac{1}{2}x+\operatorname{arctg}x$;
в) $y=\sqrt{x}\ln x$;
г) $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$;
д) $y=-x\operatorname{arctg}x$;
е) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

3 Исследовать функции:

а) $f(x)=x^3+3x^2+1$;
б) $f(x)=x^4+4x^2+3$;
в) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$;
г) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+2}$;
д) $f(x)=(x+2)^2(x-1)^2$;
е) $f(x)=x^3-3x^2+4$;
ж) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$;
и) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Практическое занятие 8 Построение графиков функций

8.1 Исследование функций, заданных параметрическими уравнениями
8.2 Исследование функций, заданных неявно
8.3 Исследование функций, заданных в полярных координатах

8.1 Исследование функций, заданных параметрическими уравнениями

Параметрические уравнения плоской кривой имеют вид

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T. \qquad (8.1)$$

Исследование и построение такой кривой можно провести по следующей схеме:

1) найти множество T – общую часть областей определения функций $x(t)$, $y(t)$ (если множество T не задано). При этом необходимо отметить те значения параметра t_i (включая $t_i = \pm\infty$), для которых хотя бы один из односторонних $\lim\limits_{t \to t_i \pm 0} x(t)$, $\lim\limits_{t \to t_i \pm 0} y(t)$ равен $+\infty$ или $-\infty$;

2) установить, обладает ли кривая симметрией, позволяющей сократить выкладки;

3) найти нули функций $x(t)$, $y(t)$ и области знакопостоянства этих функций;

4) найти точки t_k, в которых хотя бы одна из производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ равна нулю или разрывна. Заметим, что точки t_i отмеченные в п. 1) и точки t_k, найденные в этом пункте, разбивают множество T на промежутки знакопостоянства производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$. Поэтому на каждом таком промежутке $(t_p; t_{p+1})$ функция $x(t)$ строго монотонна. Следовательно, система уравнений (8.1) на интервале $(t_p; t_{p+1})$ задает параметрически функцию вида $y = f(x)$. Производные этой функции выражаются по формулам

$$y'_x = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},\ y''_{xx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(y'_x\right)}{\dot{x}(t)}.$$

Часть кривой, соответствующую изменению параметра t от t_p до t_{p+1} называется *ветвью кривой*. Каждая ветвь кривой является графиком функции вида $y = f(x)$;

5) найти точки t_j, в которых $y''_{xx} = 0$;

6) результаты исследования занести в таблицу, аналогичную таблице 8.1.

Таблица 8.1 – Результаты исследования графика функции, заданной параметрическими уравнениями

$(t_p; t_{p+1})$		…	
$(x_p; x_{p+1})$		…	
$(y_p; y_{p+1})$		…	
Знак y''_{xx}		…	

Здесь в первой строке записываются промежутки изменения параметра t, граничными точками которых t_p и t_{p+1} служат точки, найденные в п. 1), 4) и 5). Во второй и третьей строках таблицы приводятся соответствующие промежутки изменения переменных x и y. В последней строке таблицы указывается знак y''_{xx}, определяющий направление выпуклости графика соответствующей ветви кривой;

7) пользуясь таблицей, построить ветви кривой, соответствующие промежуткам $(t_p; t_{p+1})$.

Замечания. *1* В п. 1) схемы можно найти асимптоты кривой (если они имеются). Для этого надо иметь в виду следующее:

а) если при $t \to t_p$ ($t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0$) $x \to x_0$, а $y \to \infty$, то $x = x_0$ – вертикальная асимптота кривой;

б) если при $t \to t_p$ ($t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0$) $x \to \infty$, а $y \to y_0$, то $y = y_0$ – горизонтальная асимптота кривой;

в) если при $t \to t_p$ $(t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0)$ $x \to \infty$ и $y \to \infty$, то возможна наклонная асимптота, нахождение которой надо провести в соответствии с теоремой 4 практического занятия 7.

2 Вместо всей области определения T рассматривается только ее неотрицательная часть в следующих случаях:

– $\forall\ t \in T$ $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$ (симметрия относительно оси Ox);

– $\forall\ t \in T$ $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$ (симметрия относительно оси Oy);

– $\forall\ t \in T$ $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$ (симметрия относительно начала координат);

– $\forall\ t \in T$ $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = y(t)$ (наложение).

3 Если t_p – точка, найденная в п. 4) схемы, и если на интервале $(t_p; t_{p+1})$ производная $\dot{x}(t)$ сохраняет знак, то на этом интервале система уравнений (8.1) задает параметрически функцию вида $y = f(x)$, для которой точка $x(t_p)$ является точкой возможного экстремума. Является ли $x(t_p)$ точкой экстремума функции $y = f(x)$, можно определить, рассмотрев изменение y на интервалах $(t_{p-1}; t_p)$ и $(t_p; t_{p+1})$.

8.2 Исследование функций, заданных неявно

Если функцию, заданную неявно уравнением

$$F(x; y) = 0 \qquad (8.2)$$

возможно разрешить относительно одной из переменных, то исследование этой функции проводится обычным образом.

Иногда удается получить параметрические уравнения функции. Для этого положим $y = \alpha(t)x^n$, где $\alpha(t)$ и n – выбранные подходящим образом функция и число.

Подставляя выражение для y в уравнение (8.2), получим

$$F\left(x; \alpha(t)x^n\right) = 0 .$$

Пусть $x = \varphi(t)$ – решение этого уравнения. Тогда

$$x = \varphi(t),\ y = \alpha(t)\varphi^n(t) = \psi(t)$$

есть параметрические уравнения кривой.

На практике выбор функции $\alpha(t)$ определяется видом функции $F(x; y)$.

8.3 Исследование функций, заданных в полярных координатах

Пусть в полярной системе координат $(\varphi; r)$ кривая задана уравнением $r = r(\varphi)$.

В полярных координатах прямая, задаваемая уравнением

$$r = \frac{d}{\sin(\varphi - \varphi_0)},\ d \neq 0,$$

является асимптотой графика функции $r(\varphi)$, если выполнены следующие условия:

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0} r(\varphi) = +\infty ,$$

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0} r(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0) = d ,\ d \neq 0.$$

Тогда, выражая декартовы координаты через полярные:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

получим параметрические уравнения кривой (φ – параметр):

$$x = r(\varphi)\cos\varphi ,$$

$$y = r(\varphi)\sin\varphi .$$

Вопросы для самоконтроля

1 Как вычисляются производные функции, заданной параметрическими уравнениями?

2 Как найти асимптоты графика функции, заданной параметрическими уравнениями?

3 Как исследовать и использовать симметрию функции, заданной параметрическими уравнениями?

4 Сформулируйте необходимое условие локального экстремума функции, заданной параметрическими уравнениями.

5 Приведите схему исследования функции, заданной параметрическими уравнениями.

6 Как исследовать функцию, заданную неявно?

7 Как исследовать функцию, заданную в полярных координатах?

Решение типовых примеров

1 Исследовать функцию $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1) находим $D(f)$, определяем точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию. Функция определена при тех значениях x, для которых, как следует из определения арксинуса, выполнено неравенство

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \le 1 .$$

Данное неравенство равносильно неравенству $\left(1-|x|^2\right) \ge 0$, которое верно для любых вещественных x.

Итак, $D(f) = \mathbf{R}$.

Функция $\dfrac{2x}{1+x^2}$ непрерывна в любой точке (как частное двух непрерывных функций). Поэтому функция $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ также непрерывна в любой точке (как суперпозиция непрерывных функций).

Функция непериодическая.

Поскольку

$$y(-x) = \arcsin \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = y(x),$$

то функция является нечетной. Поэтому вместо всей области определения достаточно рассмотреть полупрямую $[0;+\infty)$.

При $x = 0$ имеем $y = 0$. Других нулей функция не имеет. На полупрямой $(0;+\infty)$ функция является положительной;

2) асимптоты графика функции. В силу непрерывности функции $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ на $\mathbf{R}$, график функции не имеет вертикальных асимптот. Для нахождения наклонной асимптоты при $x \to +\infty$ вычислим следующие пределы:

$$k = \lim_{x\to+\infty} = \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \arcsin 0 = 0 .$$

Отсюда следует, что прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$.

Аналогично устанавливается, что прямая $y = 0$ – горизонтальной асимптотой при $x \to -\infty$;

3) точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции.

Найдем точки возможного экстремума на полупрямой $[0;+\infty)$. Вычислим производную функции при $x \ne 1$:

$$y' = \left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}} \cdot \frac{2\left(1+x^2\right) - 4x^2}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2}{\left|1-x^2\right|} \cdot \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\,\mathrm{sgn}\left(1-x^2\right)}{1+x^2} .$$

Отсюда видно, что производная не обращается в нуль ни в одной точке. Так как $y'(1+0) = -1$, $y'(1-0) = 1$, то точка $x = 1$ является точкой излома. Значит, имеем только одну точку возможного экстремума $x = 1$.

Промежутки монотонности функции определяются знаком производной: $y' > 0$ при $x \in [0;1)$, $y' < 0$ при $x \in (1;+\infty)$.

Знак производной при переходе через точку $x=1$ меняется с плюса на минус. Поэтому в точке $x=1$ функция имеет локальный максимум, причем $y(1)=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$.

Отметим, что в точке $x=1$ функция непрерывна, а ее производная имеет разрыв 1-го рода. Значит, точка графика $\left(1;\dfrac{\pi}{2}\right)$ является угловой точкой;

4) промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба. Вторая производная при $x \neq 1$ имеет вид

$$y'' = \frac{-4x\,\mathrm{sgn}\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Направление выпуклости определяется знаком второй производной:

– $y''<0$ при $x\in[0;1)$, значит график функции на этом промежутке выпуклый,

– $y''>0$ при $x\in(1;+\infty)$, значит график функции на этом промежутке вогнут.

Так как вторая производная обращается в нуль лишь при $x=0$ и при переходе через точку $x=0$ меняет знак, то в точке $(0;0)$ график функций имеет перегиб.

Результаты исследования функции заносим в таблицу 8.2.

Таблица 8.2 – Результаты исследования функции $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

x	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y'	2	+	Не сущ.	–
y''	0	–	Не сущ.	+
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$
	Точка перег.		max Угл.точ.	

Исходя из результатов, содержащихся в таблице 8.2, строим график данной функции на полупрямой $[0;\infty)$.

Используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рисунок 8.1).

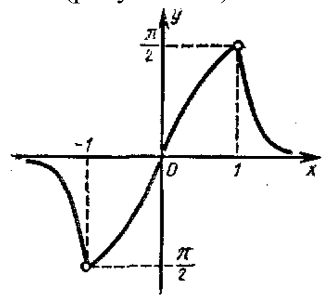

Рисунок 8.1 – График функции $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

2 Исследовать функцию, заданную параметрическими уравнениями, и построить график

$$x=\frac{t}{1-t^2},\quad y=\frac{t\left(1-2t^2\right)}{1-t^2}. \tag{8.3}$$

Решение. 1) функции $x(t)$, $y(t)$ определены на множестве

$$T=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$$

Поскольку

$$\lim_{t\to-\infty} x(t)=0,\ \lim_{t\to-\infty} y(t)=-\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)=0,\ \lim_{t\to\infty} y(t)=-\infty,$$

то $x=0$ – вертикальная асимптота кривой.

Найдем односторонние пределы в точках $t=-1$ и $t=1$:

$$\lim_{t\to-1-0} x(t)=+\infty,\ \lim_{t\to-1+0} x(t)=-\infty,$$

$$\lim_{t\to-1-0} y(t)=-\infty,\ \lim_{t\to-1+0} y(t)=+\infty,$$

$$\lim_{t\to1-0} x(t)=+\infty,\ \lim_{t\to1+0} x(t)=-\infty,$$

$$\lim_{t\to1-0} y(t)=-\infty,\ \lim_{t\to1+0} y(t)=+\infty.$$

Отсюда следует, что при $t \to -1$ и $t \to 1$ возможны наклонные асимптоты.

Так как при $t \to 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 1\pm 0} \left(1-2t^2\right) = -1, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (y+x) = \lim_{t\to 1\pm 0} \frac{1+t-2t^2}{1-t^2} = \frac{3}{2},$$

то прямая $y = -x + \dfrac{3}{2}$ – наклонная асимптота.

Так как при $t \to -1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to -1\pm 0} \left(1-2t^2\right) = -1, \ \lim_{x\to\pm\infty} (y+x) = \lim_{t\to -1\pm 0} \frac{1+t-2t^2}{1-t^2} = -\frac{3}{2},$$

то прямая $y = -x - \dfrac{3}{2}$ – наклонная асимптота.

Итак,

$$x \in (0;+\infty) \cup (-\infty;+\infty) \cup (-\infty;0),$$
$$y \in (-\infty;-\infty) \cup (+\infty;-\infty) \cup (+\infty;+\infty);$$

2) так как

$$x(-t) = \frac{-t}{1-(-t)^2} = -x(t), \qquad y(-t) = \frac{-t\left(1-2(-t)^2\right)}{1-(-t)^2} = -y(t),$$

то график функции симметричен относительно начала координат $O(0;0)$. Поэтому рассмотрим график функции только на множестве $T_1 = [0;1) \cup (1;+\infty)$;

3) на множестве $T_1 = [0;1) \cup (1;+\infty)$ имеем $x = 0$ при $t = 0$, $y = 0$ при $t = 0$ и $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

4) найдем производные функций $x(t)$, $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{1+t^2}{\left(1-t^2\right)^2}, \qquad \dot{y}(t) = \frac{2t^4-5t^2+1}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

На множестве $T_1 = [0;1) \cup (1;+\infty)$ $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$ при

$$t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}} \approx 0{,}47 \text{ и } t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}} \approx 1{,}51.$$

Тогда $x_1 = 0{,}6$, $y_1 = 0{,}3$ и $x_2 = -0{,}7$, $y_2 = 2{,}3$, т. е. имеем точки возможного экстремума $M_1(0{,}6;0{,}3)$ и $M_2(-0{,}7;2{,}3)$;

5) найдем производные y'_x и y''_{xx}:

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t^4-5t^2+1}{1+t^2}, \qquad y''_{xx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(y'_x\right)}{\dot{x}(t)} = \frac{-4t\left(1-t^2\right)^3\left(3+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^3}.$$

Отсюда $y''_{xx} \le 0$ при $t \in [0;1)$, $y''_{xx} \ge 0$ при $t \in (1;+\infty)$;

6) составим таблицу результатов исследования (таблица 8.3):

Таблица 8.3 – Результаты исследования функции

$(t_p;t_{p+1})$	$(0;0{,}47)$	0,47	$(0{,}47;1)$	$(1;1{,}51)$	1,51	$(1{,}51;+\infty)$
$(x_p;x_{p+1})$	$(0;0{,}6)$	0,6	$(0{,}6;+\infty)$	$(-\infty;-0{,}7)$	-0,7	$(-0{,}7;0)$
$(y_p;y_{p+1})$	$(0;0{,}3)$	0,3	$(0{,}3;-\infty)$	$(+\infty;2{,}3)$	2,3	$(2{,}3;+\infty)$
Знак y''_{xx}	+	+	+	–	–	–

7) строим часть кривой, соответствующую множеству $T_1 = [0;1) \cup (1;+\infty)$. Далее, используя симметрию кривой, построим всю кривую (рисунок 8.2).

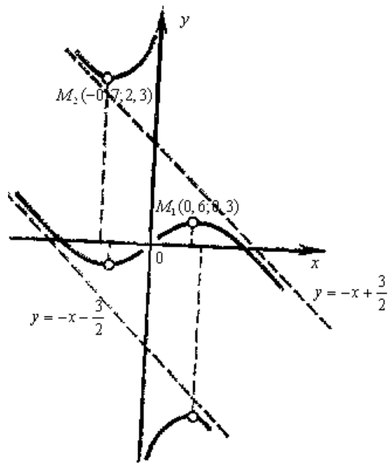

Рисунок 8.2 – График функции (8.3)

3 Исследовать функцию заданную параметрическими уравнениями и построить график

$$x = 2t - t^2,\ y = 3t - t^3. \qquad (8.4)$$

Решение. 1) функции $x(t),\ y(t)$ определены на $\mathbf{R}$.

При этом

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty,\ \lim_{t\to-\infty} y(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} x(t) = -\infty,\ \lim_{t\to\infty} y(t) = -\infty.$$

Таким образом, возможны наклонные асимптоты.

Так как

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{3t - t^3}{2t - t^2} = \infty,$$

то наклонных асимптот нет;

2) свойствами симметрии и периодичности функция не обладает;

3) имеем $x = 0$ при $t = 0$ и $t = 2$; $y = 0$ при $t = 0$, $t = -\sqrt{3}$ и $t = \sqrt{3}$;

4) найдем производные функций $x(t),\ y(t)$:

$$\dot{x}(t) = 2(1 - t), \qquad \dot{y}(t) = 3(1 - t^2).$$

Имеем $\dot{x} = 0$ при $t = 1$, $\dot{y} = 0$ при $t = 1$ и $t = -1$. Тогда точки возможного экстремума $W(1;2)$, $N(-3;-2)$;

5) найдем производные y'_x и y''_{xx}:

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3(1+t)}{2},\ y''_{xx} = \frac{3}{4(1-t)},\ t \neq 1.$$

Отсюда $y''_{xx} > 0$ при $t \in (-\infty;1)$, $y''_{xx} < 0$ при $t \in (1;+\infty)$;

6) составим таблицу результатов исследования (таблица 8.4);

Таблица 8.4 – Результаты исследования функции (8.4)

$(t_p;t_{p+1})$	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
$(x_p;x_{p+1})$	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;1)$	1	$(1;+\infty)$
$(y_p;y_{p+1})$	$(+\infty;-2)$	-2	$(-2;2)$	2	$(2;-\infty)$
Знак y''_{xx}	+	+	+		-

7) строим график функции. Первая производная y'_x не определена в точке $t = 1$, поэтому точка $W(1;2)$ является угловой точкой графика.

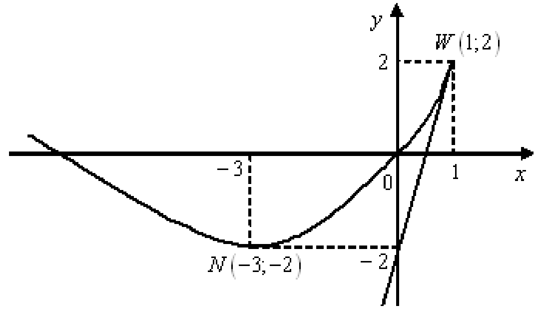

Рисунок 8.3 – График функции $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$

4 Исследовать функцию, заданную неявно и построить ее график

$$x^2 = y^2 + x^4 \qquad (8.5)$$

Решение. <u>1 способ.</u> Разрешая данное уравнение относительно y, получим $y = \pm x\sqrt{1 - x^2}$.

Функции $y_1 = x\sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = -x\sqrt{1 - x^2}$ симметричны относительно оси $0x$, то исследование можно провести для функции y_1. Эта функция определена на отрезке $[-1;1]$, т. е. $D(y_1) = [-1;1]$. Функция y_1 равна нулю при $x = -1$, $x = 1$, $x = 0$. На области определения $D(y_1)$ функция является нечетной.

Находим производные функции y_1:

$$y'_1 = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad y''_1 = \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$$

Точками возможного экстремума являются точки:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x_3 = -1,\ x_4 = 1.$$

Точки x_3 и x_4 являются граничными точками области определения $D(y_1)$. Определим характер точек x_1 и x_2 с помощью второй производной:

$$y_1''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^3}}=4>0,$$

$$y_1''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^3}}=-4<0.$$

Следовательно, $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ является точкой минимума, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ – точкой максимума. Значения функции y_1 в этих точках соответственно равны:

$$y_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=-\frac{1}{2},$$

$$y_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

В точке $x=0$ вторая производная обращается в нуль. При $x\in(-1;0)$ имеем $y_1''<0$, при $x\in(0;1)$ имеем $y_1''>0$. Следовательно, точка $O(0,0)$ является точкой перегиба графика функции $y_1=x\sqrt{1-x^2}$.

График функции $y_1=x\sqrt{1-x^2}$ изображен на рисунке 8.4. Отображая построенный график симметрично относительно оси $0x$, получим график исходной функции $y=\pm x\sqrt{1-x^2}$ (рисунок 8.5). Видно, в точке $O(0,0)$ график пересекает себя, поэтому является точкой самопересечения.

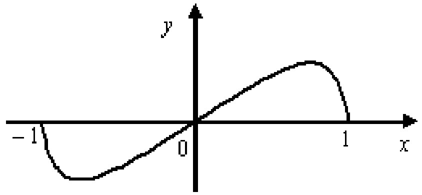

Рисунок 8.4 – График функции $y_1=x\sqrt{1-x^2}$

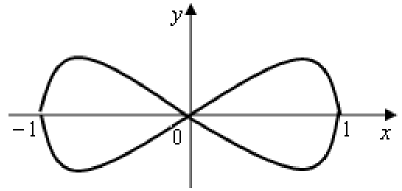

Рисунок 8.5 – График функции $x^2=y^2+x^4$

2 способ. Полагая $y=x^2\operatorname{sh}t$ из уравнения $x^2=y^2+x^4$, получим $x^2=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$. Отсюда $x=\pm\frac{1}{\operatorname{ch}t}$. Поскольку $y(-x)=y(x)$, то график функции симметричен относительно оси $0y$, и поэтому будем рассматривать случай $x>0$.

Тогда параметрические уравнения кривой имеют вид:

$$x(t)=\frac{1}{\operatorname{ch}t},\qquad y(t)=\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}^2 t}. \tag{8.6}$$

Исследование данной функции проводится по схеме для функций, заданных параметрическими уравнениями.

1) функции $x(t)$, $y(t)$ определены на $\mathbf{R}$.

При этом

$$\lim_{t\to-\infty}x(t)=0,\ \lim_{t\to-\infty}y(t)=0,\qquad \lim_{t\to+\infty}x(t)=0,\ \lim_{t\to\infty}y(t)=0.$$

Таким образом, наклонные асимптоты отсутствуют;

2) так как

$$x(-t)=x(t),\ y(-t)=-y(t),$$

то график функции симметричен относительно оси $0x$.

Свойством периодичности функция не обладает;

3) имеем $x=1$, $y=0$ при $t=0$;

4) найдем производные функций $x(t)$, $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}, \qquad \dot{y}(t) = \frac{1-\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^3 t}.$$

Имеем $\dot{x} = 0$ при $t = 0$, $\dot{y} = 0$ в точках $t_1 = -\operatorname{arsh} 1$ и $t_2 = \operatorname{arsh} 1$;

5) найдем производные y_x' и y_{xx}'':

$$y_x' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\operatorname{sh}^2 t - 1}{\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t}, \qquad y_{xx}'' = -\frac{\operatorname{sh}^2 t\left(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t\right)+1}{\operatorname{sh}^3 t}.$$

Так как $y_{xx}''(-\operatorname{arsh} 1) > 0$, то $t_{\min} = -\operatorname{arsh} 1$. Тогда

$$x_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; y_{\min} = -\frac{1}{2}.$$

Так как $y_{xx}''(\operatorname{arsh} 1) < 0$, то $t_{\max} = \operatorname{arsh} 1$. Тогда

$$x_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; y_{\max} = \frac{1}{2};$$

6) строим график функции, заданной уравнениями (8.6). Отображая симметрично относительно оси $0y$, получаем график исходной функции (рисунок 8.7).

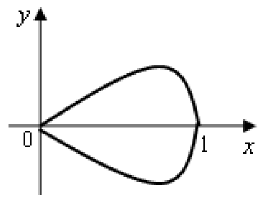

Рисунок 8.6 – График функции $x(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$, $y(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$,

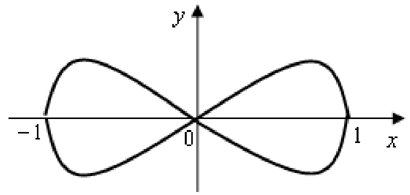

Рисунок 8.7 – График функции $x^2 = y^2 + x^4$

5 Исследовать и построить график функции

$$r(\varphi) = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}. \tag{8.7}$$

Решение. Данная функция при тех значениях φ, для которых, как следует из определения полярного радиуса, выполнено неравенство

$$\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \geq 0.$$

Кроме того, функция $r(\varphi)$ является 2π периодической, то достаточно рассмотреть промежуток

$$\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right].$$

Поскольку

$$\lim_{\varphi \to -\frac{\pi}{4}-0} \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi \to -\frac{\pi}{4}-0} \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

то прямая

$$r = -\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)}$$

является асимптотой при $\varphi \to -\dfrac{\pi}{4} - 0$.

Аналогично

$$\lim_{\varphi \to \frac{3\pi}{4}+0} \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi \to \frac{3\pi}{4}+0} \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}\sin(\varphi - \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и прямая

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi - \dfrac{3\pi}{4}\right)}$$

является асимптотой при $\varphi \to \dfrac{3\pi}{4} + 0$.

Так как $\sin\left(\varphi - \dfrac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)$, то это одна и та же прямая.

Если $\cos\varphi = 0$, то из уравнения (8.7) следует r =0, т. е. имеем точку $x = y = 0$.

При $\cos\varphi \neq 0$, полагая $t = \mathrm{tg}\,\varphi$, получим параметрическое задание кривой:

$$x = \frac{3t}{t^3+1},\ y = \frac{3t^2}{t^3+1}. \qquad (8.8)$$

Найдем производные

$$\dot{x} = \frac{3\left(1-2t^3\right)}{\left(t^3+1\right)^2}, \qquad \dot{y} = \frac{3t\left(2-t^3\right)}{\left(t^3+1\right)^2}.$$

Имеем $\dot{x} = 0$ при $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\dot{y} = 0$ при $t = 0$ и $t = \sqrt[3]{2}$.

Найдем производные f' и f'':

$$y_x' = \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}, \qquad y_{xx}'' = \frac{2\left(1+t^3\right)^4}{3\left(1-2t^3\right)^3}.$$

При $t \in (-\infty;-1)$ имеем $y_x'<0$ и $y_{xx}''>0$, значит функция убывает и вогнута, следовательно, подходит к асимптоте сверху.

При $t \in (-1;0)$ имеем $y_x'<0$ и $y_{xx}''>0$, значит, функция убывает и вогнута. При этом

$$x_{\min} = y_{\min} = 0$$

При $t \in \left(0;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ имеем $y_x'>0$ и $y_{xx}''>0$, значит, функция возрастает и вогнута. При этом

$$x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \sqrt[3]{4},\quad y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \sqrt[3]{2}.$$

При $t \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\sqrt[3]{2}\right)$ имеем $y_x'<0$ и $y_{xx}''<0$, значит, функция возрастает и выпукла. При этом

$$x_{\max} = x\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{2}, \qquad y_{\max} = y\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{4}.$$

При $t \in \left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$ имеем $y_x'>0$ и $y_{xx}''<0$, значит, функция возрастает и выпукла.

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = +\infty$, то $O(0;0)$ является точкой возврата.

График функции (8.7) называется *декартов лист* и изображен на рисунке 8.8. В декартовой системе координат декартов лист задается уравнением:

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

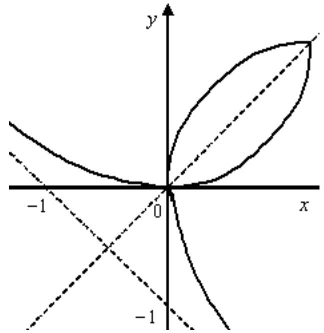

Рисунок 8.8. Декартов лист

Задания для аудиторной работы

1 Исследовать функции и построить их графики:

а) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$;

б) $f(x) = \sqrt{2x^3+9x^2}$;

в) $f(x) = e^x - x$;

г) $f(x) = \ln x - x + 1$;

д) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x+1}$;

е) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$;

ж) $f(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$;

и) $f(x) = \sin x - \sin^2 x$.

2 Исследовать следующие функции, заданные параметрическими уравнениями, и построить график:

а) $x = \frac{1}{4}(t+1)^2$, $y = \frac{1}{4}(t-1)^2$;

в) $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$.

б) $x=\dfrac{t^2}{1-t^2}$, $y=\dfrac{1}{1+t^2}$; г) $x=-5t^2+2t^5$, $y=-3t^2+2t^3$;

3 Исследовать следующие функции, заданные неявно, и построить график:

а) $xy^2-y^2-4x=0$; б) $x^6+2x^3y=y^3$ (положить $y=x^2t$).

4 Исследовать следующие функции, заданные в полярных координатах и построить график:

а) $r=\dfrac{5}{\varphi}$; б) $r=\dfrac{2}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$.

Задания для домашней работы

1 Исследовать функции и построить их графики:

а) $f(x)=x-\sqrt{x^2-2x}$; д) $f(x)=x^2\sqrt{x+1}$;

б) $f(x)=\sqrt{x^2-x^3}$; е) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$;

в) $f(x)=xe^{-2x}$; ж) $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$;

г) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$; и) $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

2 Исследовать следующие функции, заданные параметрическими уравнениями, и построить график:

а) $x=\dfrac{t^2}{t^2+1}$, $y=\dfrac{t^3}{t^2+1}$; в) $x=\dfrac{t^2}{t^2+1}$, $y=\dfrac{t^2(1-t^2)}{t^2+1}$;

б) $x=4t^2$, $y=3t(t^2+1)$; г) $x=\dfrac{t^2+1}{4(1-t)}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$.

3 Исследовать следующие функции, заданные неявно, и построить график:

а) $x^3+y^3=3x^2$; б) $4y^2=4x^2y+x^5$ (положить $y=x^2t$).

4 Исследовать следующие функции, заданные в полярных координатах и построить график:

а) $r=3\cos\varphi+3$; б) $r=4\cos^2 2\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.