Формулировки теорем и формулы

1 Какое выражение называется ортогональным многочленом Фурье?

2 По каким формулам вычисляются коэффициенты тригонометрического ряда Фурье для периодических функций?

Доказательства теорем

1 Запишите основную тригонометрическую систему и докажите ее ортогональность.

2 Сформулируйте и докажите теорему об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье.

3 Сформулируйте и докажите неравенство Бесселя.

Вопросы и задачи на понимание

1 Как измерить близость функций?

2 Что можно сказать о сходимости обобщенного ряда Фурье, если для него выполняется неравенство Бесселя?

3 При выполнении каких условий тригонометрический ряд Фурье сходится к функции?

4 В чем особенность вычисления коэффициентов Фурье для четных и нечетных функций?

5 Как разложить в ряд Фурье непериодическую функцию?

– $(\lambda\varphi,\psi)=\lambda(\varphi,\psi)$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$;

– $(\varphi,\varphi)\ge 0$, $(\varphi,\varphi)=0\Leftrightarrow\varphi=0$,

т. е. удовлетворяет аксиомам евклидова пространства.

Множество всех кусочно-непрерывных на $[a;b]$ функций со скалярным произведением (φ,ψ) называется *пространством* L_2 и обозначается $L_2[a;b]$.

1.2 Гильбертовы пространства

Неотрицательное число

$$\|\varphi\|=\sqrt{\int_a^b\varphi^2(x)dx}$$

называется *нормой* функции $\varphi(x)$ в $L_2[a;b]$.

Учитывая, что

$$\int_a^b\varphi^2(x)dx=(\varphi,\varphi),$$

норму функции можно записать в виде:

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)}\,.$$

Функция $\varphi(x)$ называется *нормированной*, если ее норма равна единице. Пространство $L_2[a;b]$ с заданной нормой $\|\varphi\|$, называется *нормированным*.

Метрические пространства, элементами которых являются функции, называются *функциональными метрическими пространствами*.

Метрическое пространство называется *полным*, если всякая его фундаментальная последовательность сходится.

Полное нормированное пространство называется *банаховым* пространством.

Полнота понимается здесь в смысле метрики, порожденной нормой пространства.

Полное линейное пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым пространством*.

1.3 Ортогональные системы функций

Две функции $\varphi(x)\in L_2[a;b]$ и $\psi(x)\in L_2[a;b]$ называются *ортогональными* на отрезке $[a;b]$, если их скалярное произведение на

$[a;b]$ равно нулю:

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx=0\ .$$

Система функций

$$(\varphi_n(x))=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots)$$

(конечная или бесконечная) называется *ортогональной* на отрезке $[a;b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на этом отрезке, т. е.

$$(\varphi_m,\varphi_n)=0\ ,\ \forall m\neq n\ ,\ m,n\in\mathbb{N}.$$

Ортогональная система функций ($\varphi_n(x)$) на отрезке $[a;b]$ называется *ортонормированной*, если

$$\|\varphi_n\|^2=(\varphi_n,\varphi_n)=\int_a^b \varphi_n^2(x)dx=1\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Любую ортогональную на $[a;b]$ систему функций ($\varphi_n(x)$) с $\|\varphi_n\|\neq 0\quad \forall n\in\mathbb{N}$ можно нормировать. Для этого достаточно разделить каждую функцию системы ($\varphi_n(x)$) на ее норму. В результате получим ортонормированную систему функций $\left(\dfrac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}\right)$.

Основной тригонометрической системой функций на отрезке $[-l;l]$ называется система

$$\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\right).$$

Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке длиной $2l$.

Тема 2 Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

2.1 Экстремальное свойство коэффициентов Фурье.

2.2 Неравенство Бесселя.

2.3 Сходимость рядов Фурье.

2.4 Равенство Парсеваля.

2.1 Экстремальное свойство коэффициентов Фурье

При изучении возможности представления функции рядом Тейлора в точке x_0 предполагалось, что $f(x)$ бесконечно дифферен-

на отрезок $[-l;0]$ нечетным образом (рисунок 3):

$$f^*(x)=\begin{cases}-f(-x) \text{ при } x\in[-l;0],\\ f(x) \text{ при } x\in[0;l],\end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось.

В этом случае ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$ содержит только косинусы:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ ,$$

где $b_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$, $n\in\mathbb{N}$.

Пусть $f(x)\in L_2[-l;l]$, $2l$-периодическая функция, которая представима сходящимся тригонометрическим рядом Фурье. В электро- и радиотехнике для такой функции используется *комплексная форма* тригонометрического ряда Фурье:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}\ .$$

Коэффициенты c_n, $n=0,\pm1,\ldots$, ряда находятся по формулам:

$$c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\ ,\ c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx\quad n=0,\pm1,\pm2\ldots.$$

Выражения $e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ называются *гармониками*, числа $\alpha_n=\dfrac{n\pi}{l}$, $n=0,\pm1,\pm2\ldots$ – *волновыми числами*, множество всех волновых чисел – *спектром*, коэффициенты c_n – *комплексными амплитудами*.

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Что называется скалярным произведением функций и какими свойствами оно обладает?

2 Какая система функций называется ортогональной и ортонормированной?

3 Какая функция называется кусочно-непрерывной?

4 Какое выражение называется обобщенным рядом Фурье?

5 Что называется среднеквадратичным уклонением функций?

6 Какая ортогональная система функций называется замкнутой?

$$a_0 = a_n = 0,\ n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in \mathbb{N},$$

а сам тригонометрический ряд Фурье для нечетной функции содержит только синусы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

3.4 Разложение непериодических функций в тригонометрический ряд Фурье

Если кусочно-гладкая функция $f(x)$ задана на отрезке $[0;l]$, то ее можно разложить в ряд Фурье или только по косинусам, или только по синусам.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд по *косинусам* ее продолжают на отрезок $[-l;0]$ четным образом (рисунок 2):

$$f^*(x) = \begin{cases} f(-x) & \forall x \in [-l;0], \\ f(x) & \forall x \in [0;l], \end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось.

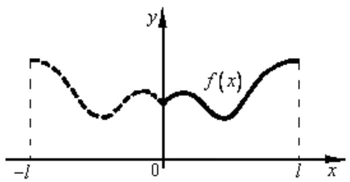

Рисунок 2 – Продолжение непериодической функции четным образом

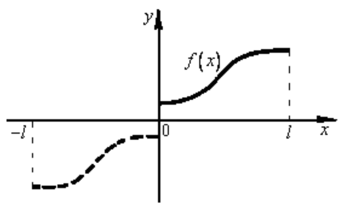

Рисунок 3 – Продолжение непериодической функции нечетным образом

В этом случае ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$ содержит только косинусы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

где $a_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)dx$, $a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд по *синусам* ее продолжают

цируема в окрестности этой точки. Представление же функций рядами Фурье допускает более широкий класс кусочно-непрерывных функций.

Пусть $(\varphi_n(x))$ – ортогональная система функций в $L_2[a;b]$.

Выражение

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x).$$

называется *обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций* $(\varphi_n(x))$. Если $(\varphi_n(x))$ – основная тригонометрическая система функций, то ряд называется *тригонометрическим рядом Фурье*.

Метрикой ρ *(расстоянием)* в пространстве $L_2[a;b]$ называется величина

$$\rho(f,\varphi) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx}.$$

Величина $\rho(f,\varphi)$ характеризует близость функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ *в среднем квадратичном*.

Используя определение нормы функции, имеем

$$\rho(f,\varphi) = \|f(x) - \varphi(x)\|.$$

Ортогональным многочленом Фурье называется частичная сумма

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x).$$

Если в качестве ортогональной системы функций выбрана основная тригонометрическая система, то многочлен Фурье называется *тригонометрическим* и обозначается $T_n(x)$.

2.2 Неравенство Бесселя

Теорема 1 (об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье) Среди всех обобщенных многочленов вида $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\varphi_k(x)$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, *наилучшей средней квадратичной аппроксимацией функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *является многочлен Фурье, коэффициенты которого находятся по форму-*

лам $\alpha_k = c_k = \dfrac{(f,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$.

Т е о р е м а 2 (н е р а в е н с т в о Б е с с е л я) Если $f(x) \in L_2[a;b]$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ ее обобщенный ряд Фурье по ортогональной системе функций ($\varphi_n(x)$), то справедливо неравенство

$$\int_a^b f^2(x)dx \ge \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 .$$

2.3 С х о д и м о с т ь р я д о в Ф у р ь е

Ряд Фурье $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* к функции $f(x) \in L_2[a;b]$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) сходится к функции $f(x)$ равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться равенство

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b].$$

Из равномерной сходимости следует, что при $n \to \infty$

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - S_n(x)| \to 0 .$$

Ряд Фурье называется *сходящимся в среднем квадратичном* к функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0 .$$

Понятие сходимости в среднем квадратичном является обобщением понятия равномерной сходимости.

2.4 Р а в е н с т в о П а р с е в а л я

Т е о р е м а 3 Если обобщенный ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ функции $f(x)$ сходится на отрезке $[a;b]$ равномерно к функции

$f(x) \in L_2[a;b]$ влияют на сходимость ее ряда Фурье:

– если $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция с периодом $T = 2l$, то ее ряд Фурье сходится к ней в среднем квадратичном;

– если $f(x)$ – кусочно-гладкая функция, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности этой функции и к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точке разрыва, т.е. сумма ряда не везде совпадает с $f(x)$;

– если $f(x)$ – кусочно-гладкая и непрерывная функция, то ее ряд Фурье сходится равномерно к $f(x)$.

3.3 Т р и г о н о м е т р и ч е с к и е р я д ы Ф у р ь е д л я ч е т н ы х и н е ч е т н ы х ф у н к ц и й

Для четной функции имеет место равенство $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in [-l;l]$. В этом случае произведение $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ является четной функцией, а произведение $f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ – нечетной. Поэтому коэффициенты ряда Фурье для четной функции находятся по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx ,\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx ,\ b_n = 0 ,\ n \in \mathbb{N}.$$

а сам ряд Фурье для четной функции содержит только косинусы и свободный член:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} .$$

Для нечетных функций имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in [-l;l]$. В этом случае произведение $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ является нечетной функцией, а произведение $f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ – четной. Таким образом, коэффициенты тригонометрического ряда Фурье для нечетной функции находятся по формулам:

Ответ на эти вопросы будет дан в следующих теоремах.

Т е о р е м а 1 Если $f(x)\in L_2[-l;l]$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[-l;l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье (2.4) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right)dx=0.$$

Т е о р е м а 2 Если $f(x)\in L_2[-l;l]$ – кусочно-гладкая на отрезке $[-l;l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке этого отрезка и для суммы ряда Фурье справедливы следующие соотношения:

1) $S(x)=f(x)$, если x – точка непрерывности функции $f(x)$;

2) $S(x)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, если x_0 – точка разрыва первого рода функции $f(x)$;

3) $S(-l)=S(l)=\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

На рисунке 1 дана геометрическая интерпретация условий 1), 2), 3) теоремы 2.

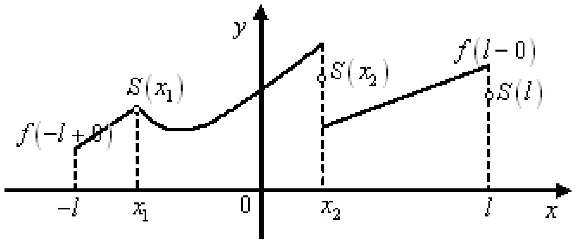

Рисунок 1 – Сходимость ряда Фурье в различных точках

Так, например, условие 2) означает, что в точках разрыва первого рода сумма ряда Фурье равна среднему арифметическому пределов функции справа и слева.

Т е о р е м а 3 Если функция $f(x)\in L_2[-l;l]$ является кусочно-гладкой и непрерывной на отрезке $[-l;l]$, а на концах этого отрезка удовлетворяет условию $f(-l)=f(l)$, то ее тригонометрический ряд Фурье на $[-l;l]$ сходится к $f(x)$ равномерно.

Теоремы 1 – 3 показывают, как свойства функции

$f(x)\in L_2[a;b]$, то он сходится к $f(x)$ на $[a;b]$ и в среднем квадратичном.

Т е о р е м а 4 Для того чтобы обобщенный ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ функции $f(x)\in L_2[a;b]$ сходился к $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ в среднем квадратичном необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство Парсеваля – Стеклова:

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2\|\varphi_k\|^2=\int_a^b f^2(x)dx.$$

Ортогональная система функций $(\varphi_k(x))$, для которой выполняется равенство Парсеваля – Стеклова, называется *замкнутой* в $L_2[a;b]$, а само равенство – *уравнением замкнутости*.

Из теоремы 4 следует, что любая функция $f(x)\in L_2[a;b]$ может быть разложена в сходящийся к ней в среднем квадратичном ряд Фурье по ортогональной на $[a;b]$ системе функций $(\varphi_k(x))$, если эта система является замкнутой в $L_2[a;b]$.

Тема 3 Ряды Фурье по тригонометрической системе

3.1 Основная тригонометрическая система.

3.2 Тригонометрические ряды Фурье.

3.3 Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций.

3.4 Разложение непериодических функций в тригонометрический ряд Фурье.

3.1 Основная тригонометрическая система

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная периодическая функция с периодом $T=2l$. Рассмотрим основную тригонометрическую систему функций, ортогональную на $[-l;l]$:

$$\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\right),$$

для которой:

$$\|1\|=\sqrt{2l},\ \left\|\sin\frac{\pi nx}{l}\right\|=\left\|\cos\frac{\pi nx}{l}\right\|=\sqrt{l}.$$

Основная тригонометрическая система функций обладает полнотой, т. е. для любой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом, имеет место равенство Парсеваля – Стеклова при $a=-l$, $b=l$:

$$\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2\|\varphi_n\|^2.$$

Поэтому периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T=2l$ можно разложить в ряд Фурье, который будет сходиться к функции $f(x)$ в среднем квадратичном:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)=c_0+c_1\cos\frac{\pi x}{l}+c_2\sin\frac{\pi x}{l}+\ldots.$$

С учетом того, что коэффициенты при косинусах принято обозначать буквой a, при синусах – буквой b, а начальный коэффициент – буквой $c_0=\dfrac{a_0}{2}$.

3.2 Тригонометрические ряды Фурье

Ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_0=\frac{(1,f)}{\|1\|^2}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{\left(f,\cos\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{\left(f,\sin\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n\in\mathbb{N}.$$

называется *тригонометрическим рядом Фурье* для периодической функции $f(x)\in L_2[a;b]$.

Для тригонометрического ряда Фурье справедливо *уравнение Ляпунова*:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{l}\|f\|^2.$$

В частности, если $f(x)\in L_2[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье для такой функции имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

где коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n\in\mathbb{N}.$$

Каждой периодической с периодом $T=2l$ функции $f(x)\in L_2[-l;l]$ можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Важными являются два вопроса о сходимости рядов Фурье:

– при каких условиях, налагаемых на функцию $f(x)$, ряд Фурье сходится в том или ином смысле к этой функции?

– как влияют свойства функции $f(x)$ на характер сходимости ее ряда Фурье?